第 16 卷第 3 期 2018 年 6 月
1672-6553/2018/16(3)/201-5
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol.16 No.3
Jun. 2018

# (2+1)维 AKNS 方程的可积性研究*

郝晓红[1]　程智龙[2†]

(1.安徽信息工程学院基础教学部, 芜湖　241000)(2.苏州科技大学数理学院, 苏州　215009)

**摘要**　运用 Bell 多项式定理研究了一个(2+1)维 AKNS 方程的可积性,得到双线性方程、Bäcklund 变换以及运用 Bäcklund 变换求得其孤子解,最后运用 Bell 多项式得出 Lax 对.

**关键词**　Bell 多项式,　Bäcklund 变换,　孤子解

DOI:　10.6052/1672-6553-2018-012

## 引言

近几十年来,可积系统的研究以及非线性偏微分方程的求解越来越受到一些专家学者的关注.一些有效的求精确解的方法不断被引用,如双线性方法、齐次平衡法、以及黎曼 $\theta$ 函数法[1-7]等等.

1996 年,Lambert,Gilson,Nimmo 建立了多项式与双线性算子之间的关系,通过转换关系得到双线性变换,这个方法很有效地避免了在求变换过程中使用交换公式繁琐的计算,简洁实用.并且直接对其做变换线性化还可以得到方程的 Lax 对,在此基础上,我们来研究(2+1)维 AKNS 方程[8-9]:

$$4u_{xt}+u_{xxxy}+8u_{xy}u_x+4u_yu_{xx}+\alpha u_{xx}=0 \tag{1}$$

其中 $\alpha$ 为一个常数,表示该系统方程具有耗散作用.方程(1)是 Ablowitz, Kaup, Newell 和 Segur (AKNS)他们所发现的.令 $y=x,\alpha=0$,则(1)可以退化为位势 KdV 方程.Özer 用 improved tanh 方法得出其行波解[9],Wazwaz 用简化的双线性方法得出其孤子解[10].本文应用双多项式系统研究其可积性:如 Bäcklund 变换,孤子解以及 Lax 对等等.

## 1　多项式应用于 AKNS 方程

### 1.1　Bell 多项式

设 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是具有 $n$ 个变量的 $C^\infty$ 函数,则称:

$$\begin{aligned}Y_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(f)&\equiv Y_{n_1,\cdots,n_l}(f_{r_1x_1,\cdots,r_lx_l})\\&=e^{-f}\partial_{x_1}^{n_1}\cdots\partial_{x_l}^{n_l}e^f,\end{aligned} \tag{2}$$

为 Bell 多项式.其中:

$$f_{r_1x_1,\cdots,r_lx_l}=\partial_{x_1}^{n_1}\cdots\partial_{x_l}^{n_l}f(r_1=0,\cdots,n_1=0;\cdots r_l=0,\cdots,n_l=0)$$

当 $f=f(x,t,y)$ 时,对应的(2+1)维 Bell 多项式为:

$$Y_{x,y,t}=f_{x,y,t}+f_{x,y}f_t+f_{x,t}f_y+f_xf_{y,t}+f_xf_yf_t,$$

$$Y_{3x,y}=f_{3x,y}+f_{3x}f_y+3f_{2x}f_{x,y}+2f_{2x,y}f_x+2f_xf_yf_{2x}+f_x^2f_y,\cdots$$

在上述定义中,

$$\begin{aligned}y_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(v,w)&=Y_{n_1,\cdots n_l}(f)\Big|_{f n_1x_1,\cdots,n_lx_l}\\&=\begin{cases}v_{r_1x_1,\cdots,r_lx_l} & r_1+r_2+\cdots+r_i\ \text{为奇数};\\ w_{r_1x_1,\cdots,r_lx_l} & n_1+n_2+\cdots+n_i\ \text{为偶数};\end{cases}\end{aligned}$$

则 Bell 多项式可以表示为函数具有 $v$ 和 $w$ 的形式.

$$y_x(v)=v_x,\ y_{2x}(v,w)=w_{2x}+v_x^2,$$

$$y_{x,t}=w_{xt}+v_xv_t,\ y_{3x}=v_{3x}+3v_xw_{2x}+v_x^3,\cdots.$$

同时 $y$ 多项式和 Hirota 双线性 $D$ 算子之间的转换关系:

$$\begin{aligned}&y_{n_1x_1,\cdots n_lx_l}(v=\ln F/G,w=\ln FG)\\&=(FG)^{-1}D_{X_1}^{n_1}\cdots D_{x_l}^{n_l}F\cdot G\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $n_1+n_2+\cdots n_l\geqslant 1$.而且,当 $F=G$ 时,

$$\begin{aligned}&(F)^{-2}D_{x_1}^{n_1}\cdots D_{x_l}^{n_l}F\cdot F=y_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(0,q=2\ln F)\\&=\begin{cases}0, & n_1+n_2+\cdots+n_l\ \text{为奇数};\\ P_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l(q)}, & n_1+n_2+\cdots+n_l\ \text{为偶数};\end{cases}\end{aligned} \tag{4}$$

这样 $P$ 多项式就可以写成含 $q$ 的函数形式,如:

$$P_{2x}(q)=q_{2x},\ P_{x,t}(q)=q_{x,t},\ P_{4x}(q)=q_{4x}+3q_{2x}^2,$$

2017-03-16 收到第 1 稿,2017-09-14 收到修改稿.
* 安徽省自然科学研究项目(KJ2016A071)和质量工程项目(2016xjjyxm04)
† 通讯作者 E-mail:zhilong0793@sina.cn

$$P_{2x}(q)=P_{3x,y}(q)=q_{3x,y}+3q_{2x}q_{xy} \tag{5}$$

由性质(4)和(5)就能得出其双线性形式，接下来将 Bell 多项式 $y_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(v,w)$ 分离成 $P$ 多项式和 $Y$ 多项式的组合：

$$\begin{aligned}&(FG)^{-1}D_{x_1}^{n_1}\cdots D_{x_l}^{n_l}F\bullet G\\&=y_{n_1x_1,\cdots n_lx_l}(v,w)\mid_{v=\ln F/G,w=\ln FG}\\&=y_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(v,v+q)\mid_{v=\ln F/G,q=2\ln G}\\&=\sum_{n_1+\cdots+n_l=even}\sum_{r_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{r_l=0}^{n_l}\prod_{i=1}^{l}(n_i,r_i)'P_{r_1x_1,\cdots r_lx_l}(q)\cdot\\&\quad Y_{(n_1-r_1)x_1,\cdots,(n_l-r_l)x_l}(v),\end{aligned} \tag{6}$$

注意：

$$Y_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(v)\mid_{v=\ln\psi}=\frac{\psi_{n_1x_1,\cdots n_lx_l}}{\psi}.$$

这意味着一个 Bell 多项式 $y_{n_1x_1,\cdots,n_lx_l}(v,w)$ 可以通过 Hopf-Cole 变换 $v=\ln\psi$（即 $\psi=F/G$）进行线性化.

### 1.2 双线性表达式

为了能够得出方程(1)的双线性形式，首先引入一个变量 $q$，使得：

$$u=cq_x+\varphi(y) \tag{7}$$

在这里 $c=c(t)$ 是关于变量 $t$ 的任意函数.将(7)代入(1)，则可得如下形式：

$$\begin{aligned}&4q_{2x,t}+\frac{2}{3}q_{4x,y}+8cq_{2x,y}q_{xx}+4cq_{xy}q_{3x}+\frac{1}{3}q_{4x,y}\\&\quad+4(q_{xy}q_{3x}+4\varphi(y))q_{3x}+\alpha q_{3x}=0\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\varphi(y)'=\varphi(y)$，再对 $x$ 积分一次得：

$$\begin{aligned}E(q)\equiv&4q_{x,t}+\frac{2}{3}(q_{3x,y}+6cq_{x,y}q_{xx})+\\&\frac{1}{3}\partial_x^{-1}\partial_y(q_{4x}+6cq_{2x}^2)+(4\varphi(y)+\alpha)q_{2x}=0\end{aligned} \tag{9}$$

比较(9)和公式(4)，我们取 $c=\frac{1}{2}$，则(9)可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}E(q)\equiv&4q_{x,t}+\frac{2}{3}(q_{3x,y}+3q_{x,y}q_{xx})+\\&\frac{1}{3}\partial_x^{-1}\partial_y(q_{4x}+3q_{2x}^2)+(4\varphi(y)+\alpha)q_{2x}=0\end{aligned} \tag{10}$$

为了使(10)能够写出双线性形式，我们必须消去 $\partial_x^{-1}$ 这一项.为此，我们引入一个辅助变量 $z$，其约束条件为：

$$(q_{4x}+3q_{2x}^2)=q_{xz} \tag{11}$$

因此，(10)化为：

$$\begin{aligned}E(q)\equiv&4q_{x,t}+\frac{2}{3}(q_{3x,y}+3q_{x,y}q_{xx})+\\&\frac{1}{3}q_{yz}+3q_{2x}^2+(4\varphi(y)+\alpha)q_{2x}=0\end{aligned} \tag{12}$$

由定义(3)，(11)与(12)就可以写成如下 $P$-多项式的形式：

$$\begin{aligned}&P_{4x}(q)-P_{xz}(q)=0\\&4P_{xt}(q)+\frac{2}{3}P_{3x,y}(q)+\frac{1}{3}p_{yz}(q)+\\&\quad(4\varphi(y)+\alpha)P_{2x}(q)=0\end{aligned} \tag{13}$$

最后，由于性质(4)如果做变换：

$$q=2\ln G\Leftrightarrow u=cq_x+\varphi(y)=(\ln G)_x+\varphi(y) \tag{14}$$

则(13)可以化为如下 AKNS 方程(1)的双线性形式：

$$\begin{aligned}&(D_x^4-D_xD_z)G\cdot G=0\\&[4D_xD_z+\frac{2}{3}D_yD_x^3+\frac{1}{3}D_yD_x+(4\varphi(y)+c)D_x^2]G\cdot G=0\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\varphi(y)$ 为任意的函数，这是一个新的双线性方程.

### 1.3 Bäcklund 变换，孤子解与 Lax 对

设 $q$ 与 $q'$ 为(12)的两个不同的解

$$q=2\ln F,\ q'=2\ln G \tag{16}$$

类似，引入两个新变量：

$$w=\frac{q'+q}{2}=\ln(FG),\ v=\frac{q'-q}{2}=\ln(\frac{F}{G}) \tag{17}$$

考虑如下二分离条件：

$$\begin{aligned}&E(q')-E(q)=E(v+w)-E(w-v)\\&=8v_{xt}+2v_{3x,y}+4w_{2x}v_{x,y}+4w_{x,y}v_{2x}+\\&\quad4\partial_x^{-1}(w_{2x}v_{2xy}+w_{2xy}v_{2x})+2(4\varphi_y+\alpha)v_{2x}\\&=2\partial_x^{-1}[4y_t(v)+y_{2x,y}(v,w)+(4\varphi(y)+\alpha)y_x(v)]+\\&\quad R(v,w)=0\end{aligned} \tag{18}$$

其中：

$$\begin{aligned}R(v,w)=&2w_{2x}v_{xy}-2w_{3x}v_y-4w_{2x,y}v_x-4v_xv_{2x}v_y-\\&2v_x^2v_{xy}+4\partial_x^{-1}(w_{2x}v_{2x,y}+w_{2x,y}v_{2x}).\end{aligned}$$

很显然，(18)是方程(12)的两个不同的解 $q$ 和 $q'$ 之间的关系.这二分离条件可以被认为是在一个附加的约束条件下转化为 Bäcklund 变换.

为了能够使 $R(v,w)$ 化为含有对 $x$ 偏导的 $y$-多项式，则需要取一个特定约束为：

$$y_{2x}(v,w)=w_{2x}+v_x^2=\lambda \tag{19}$$

其中 $\lambda$ 为任意常数，则在约束条件(19)下，$R(v,w)$

可以化为如下形式:

$$R(v,w)=2w_{2x}v_{xy}-2w_{3x}v_y-4w_{2x,y}v_x-4v_xv_{2x}v_y-2v_x^2v_{xy} \tag{20}$$

在此我们应用了如下关系:

$w_{2x,y}=-2v_xv_{xy}$, $w_{3x}=-2v_xv_{xx}$ 和 $w_{2x}=\lambda-v_x^2$

结合(18)~(20),我们得到一个含 $y$-多项式的组合:

$$y_{2x}(v,w)-\lambda=0,$$
$$\partial_x[4y_t(v)+y_{2x,y}(v,w)+(4\varphi(y)+\alpha)y_x(v)+3\lambda y_y(v)]=0 \tag{21}$$

对第二个方程中得变量 $x$ 积分一次,有性质(3),得到了方程(15)的双线性 Bäcklund 变换:

$$(D_x^2-\lambda)F\cdot G=0$$
$$[4D_t+D_x^2D_y+(4\varphi(y)+\alpha)D_x+3\lambda D_y]F\cdot G=0 \tag{22}$$

通过此 BT,我们可以很容易的求出其孤子解.接下来我们以一孤子解与二孤子解为例.

从平凡解 $u=0$ 出发,即 $F=1$,令 $\lambda=\frac{k_1{}^2}{4}$ 解得:

$$G_1=e^{\frac{\zeta_1}{2}}+e^{-\frac{\zeta_1}{2}},$$
$$\zeta_1=k_1x+\varphi(y)-\frac{k_1{}^2\varphi(y)+(4\varphi(y)+\alpha)k_1}{4}\cdot t+\zeta_1^{(0)} \tag{23}$$

其中 $k_1,\zeta_1^{(0)}$ 为任意实函数.上式也可以被化为:

$$G_1=e^{-\frac{\zeta_1}{2}}(1+e^{\zeta_1}) \tag{24}$$

这对应着方程(1)的一孤子解,其一孤子解为:

$$u=\ln[1+e^{ex+\varphi(y)-\frac{k^2\varphi(y)+(4\varphi(y)+\alpha)k}{4}t}]+\varphi(y) \tag{25}$$

其中 $\varphi(y)'=\varphi(y)$

如果取 $\varphi(y)=ly$,则其一孤子解为:

$$u=\ln[1+e^{kx+ly-\frac{k^2l+\alpha k}{4}t}]_x \tag{26}$$

这与[10]中的(33)式取得结果一致.

取 $F=e^{\frac{\zeta_1}{2}}+e^{-\frac{\zeta_1}{2}}$,可得:

$$G_2=(k_1-k_2)(e^{\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}}+e^{-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}})-(k_1+k_2)(e^{\frac{\zeta_1-\zeta_2}{2}}+e^{-\frac{\zeta_1-\zeta_2}{2}}),\lambda=\frac{k_2{}^2}{4} \tag{27}$$

其中:

$$\xi_j=k_jx+\varphi(y)-\frac{k_j^2\varphi(y)+(4\varphi(y)+\alpha)k_j}{4}t+\xi_j^{(0)},j=1,2.$$

令:

$\xi_j=\eta_j+\frac{1}{2}A_{12}$,其中 $e^{A_{12}}=\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}$,$j=1,2$,则(27)化为:

$$G_2=1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+e^{\eta_1+\eta_2+A_{12}} \tag{28}$$

这与二孤子解对应:

$$u=\ln[1+e^{\eta_1}+e^{\eta_2}+e^{\eta_1+\eta_2+A_{12}}]_x\varphi(y) \tag{29}$$

为了能够描述函数 $\varphi(y)$ 对 AKNS 方程的波动传播所造成的影响,我们以一孤子解与二孤子解为例,图 1 与 2 中函数 $\varphi(y)$ 分别取:$\varphi(y)=\sin(y)$,$\mathrm{sech}(y)$,$\tanh(y)$.

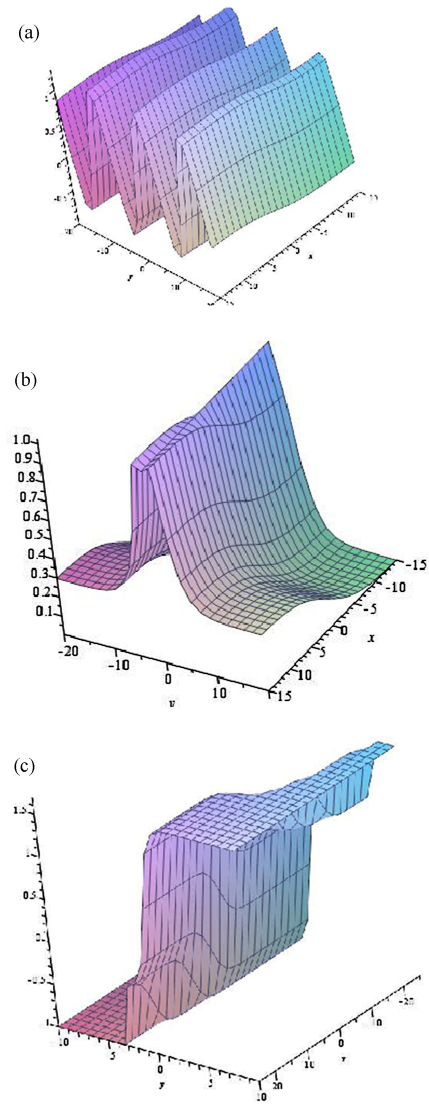


图 1　一孤子解在$(x,y)$轴上分别取参数:
(a)$t=1,k=0.3,\varphi(y)=\sin(y)$,
(b)$t=2,k=0.3,\varphi(y)=\mathrm{sech}(y)$,(c)$t=2,k=0.3,\varphi(y)=\tanh(y)$

Fig.1　Selection of the parameters in the axis of $x$ and $y$ for onesoliton solution, where (a)$t=1,k=0.3,\varphi(y)=\sin(y)$, (b)$t=2,k=0.3$, $\varphi(y)=\mathrm{sech}(y)$, (c)$t=2,k=0.3,\varphi(y)=\tanh(y)$

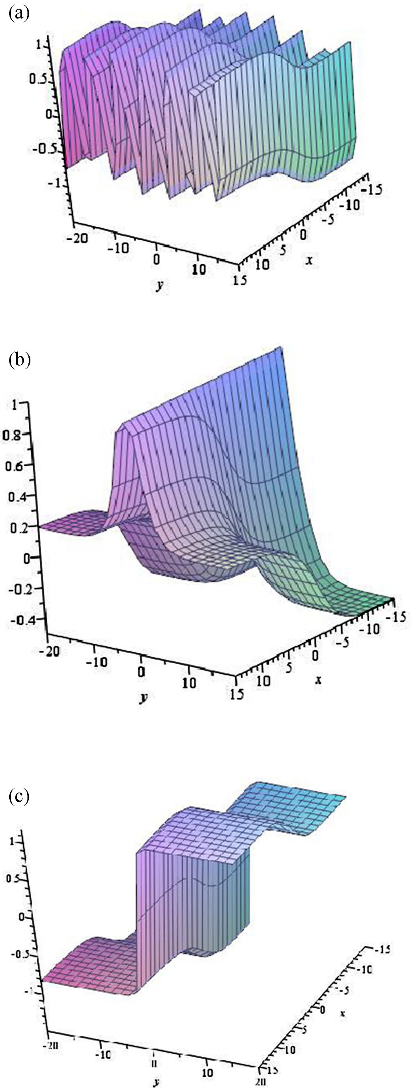


图 2 二孤子解在$(x,y)$轴上分别取参数:
(a)$t=1,k_1=-0.5,k_2=0.2,\varphi(y)=\sin(y)$,
(b)$t=2,k_1=-0.5,k_2=0.2,\varphi(y)=\mathrm{sech}(y)$,
(c)$t=2,k_1=-0.5,k_2=0.2,\varphi(y)=\tanh(y)$

Fig.2 Selection of the parameters in the axis of $x$ and $y$ for twosoliton solution, where
(a)$t=1,k_1=-0.5,k_2=0.2,\ \varphi(y)=\sin(y)$,
(b)$t=2,\ k_1=-0.5,k_2=0.2,\ \varphi(y)=\mathrm{sech}(y)$,
(c)$t=2,\ k_1=-0.5,k_2=0.2,\ \varphi(y)=\tanh(y)$

由 Hopf-Cole 变换 $v=\ln\psi$

$$y_x(v)=\frac{\psi_x}{\psi}\quad y_t=\frac{\psi_t}{\psi}\quad y_{2x}(v,w)=q_{2x}+\frac{\psi_{2x}}{\psi}$$

$$y_{3x}(v,w)=3q_{2x}+\frac{\psi_x}{\psi}+\frac{\psi_{3x}}{\psi},$$

$$y_{2x,y}(v,w)=2q_{xy}+\frac{\psi_x}{\psi}+q_{2x}\frac{\psi_y}{\psi}+\frac{\psi_{2x,y}}{\psi}\tag{30}$$

参照(30),则(21)可以化为一组 Lax 表示:

$$L_\psi=0$$
$$M_\psi=0\tag{31}$$

其中:

$$L=\partial_x^2+q_{2x}-\lambda$$
$$M=4\partial_t+(2q_{xy}+4\varphi(y)+\alpha)\partial_x+(q_{2x}+3\lambda)\partial_y+\partial_x^2\partial_y\tag{32}$$

如果将$\frac{1}{2}q_x+\varphi(y)$替换 $u$,即得到 AKNS 方程的 Lax 对:

$$L_\psi=\psi_{xx}+(2u_x-\lambda)\psi=0$$
$$M_\psi=4\psi_t+(4u_y+\alpha)\psi_x+(2u_x+3\lambda)\psi_y+\psi_{xxx}=0\tag{33}$$

很容易验证其相容性条件:

$$[L,M]=4u_{xt}+u_{xxxy}+8u_{xy}u_x+4u_yu_{xx}+\alpha u_{xx}=0\tag{34}$$

此即为 AKNS 方程(1).

## 2 结论

本文应 Bell 多项式方法,研究了一类(2+1)维 AKNS 方程的可积性问题:通过引入变换得出 AKNS 方程的双线性表达式以及 Bäcklund 变换,同时得出其孤子解,且用图描绘出不同函数的孤子解,说明 AKNS 方程在不同函数的作用下其具有不同形式的形状.最后给出其 Lax 对,通过 Lax 对可以推导出方程,从而证明了 AKNS 方程的可积性.

## 参 考 文 献

1 Hirota R. The Direct Methods in Soliton Theory. Berlin: Springer, 2004

2 Wang M L, Wang Y M. A new Bäcklund transformation and multi-soliton solutions to the KdV equation with general variable coefficients. *Physics Letters A*, 2001, 287(3-4):211~216

3 Zhang Y, Cheng Z L, Hao X H. Riemann theta functions periodic wave solutions for the variable-coefficient mKdV equation. *Chinese Physics B*, 2012, 21:120203

4 Cheng Z L, Hao X H. The periodic wave solutions for a (2+1)-dimensional AKNS equation. *Applied Mathematics & Computation*, 2014, 234:118~126

5 Cheng Z L, Hao X H. The travelling wave solutions for (2+1)-dimensional AKNS equation. *Chinese Quarterly Jour-*

nal of Mathematics, 2015,3(30):323~329

6 杨绍杰,化存才. 含外力项时变系数 KdV 方程与时变系数耦合 KdV 方程组的孤子解. 动力学与控制学报, 2014,12(6):115~118 (Yang S J, Hua C C. Solition of KdV equation and a coupled KdV equation with time dependent coefficients and forcing term. *Journal of Dynamics and Control*, 2014,12(6):115~118 (in Chinese))

7 Fan E G. The integrability of nonisospectral and variable-coeffcient KdV equation with binary Bell polynomials. *Physics Letter A*, 2011(375):493~497

8 Bell E T. Exponential polynomials. *Annals Mathematics*, 1934(35):258~227

9 Ozer T. New traveling wave solutions to AKNS and SKdV equations. *Chaos Solitons and Fractals*, 2009,42:577~583

10 Wazwaz A M. N-soliton solutions for shallow water waves equations in (1+1) and (2+1) dimensions. *Appiedl Mathematics Computation*, 2011(217):8840~8845

# RESEARCH ON INTEGRABILITY OF A (2+1)-DIMENSIONAL AKNS EQUATION *

Hao Xiaohong[1] Cheng Zhilong[2†]

(1.*Department of Basic Teaching*,*Anhui Institute of Information Technology*, *Wuhu* 241000, *China*)

(2.*School of Mathematics and Physics*,*Suzhou University of Sience and Technology*, *Suzhou* 215009, *China*)

**Abstract** Based on the Bell polynomial, the integrability of a (2+1)-dimensional AKNS equation was considered. The obtained bilinear equation form Bäcklund transform were presented. Meanwhile, the soliton solutions and Lax pair were obtained thought Bäcklund transform.

**Key words** Bell polynomial, Bäcklund transform, soliton solutions

Received 16 March 2017,revised 14 September 2017.

* The project supported by the Natural Science Foundation of Anhui Province(KJ2016A071) and the Quality Engineering Project (2016xjjyxm04).

† Corresponding author E-mail:Zhilong0793@ sina.cn