

# 基于拉格朗日描述的罐车内液体晃动模拟\*

石怀龙 王勇<sup>†</sup> 邬平波

(西南交通大学 牵引动力国家重点实验室,成都 610031)

**摘要** 基于拉格朗日描述的柔性多体系统动力学理论,采用绝对节点坐标有限元方法描述液体大变形运动,开展铁路液罐车内液体晃动模拟研究.本方法能够模拟液体自由表面的连续性变化,并适用于研究具有复杂外形容器的内部液体晃动问题.基于流体力学牛顿体基础理论,推导液体粘性方程和满足体积不可压缩的条件方程;采用基于绝对节点坐标方法描述的实体单元进行液体网格划分;采用罚函数方法描述液体与罐体之间的接触关系,组建液体-罐体耦合多体系统动力学方程.仿真计算液罐车内液体的横向和纵向晃动行为,发现液体自由表面形状呈非线性变化,不同断面处的高度和形状不同.

**关键词** 液罐车, 柔性多体系统, 绝对节点坐标方法, 液体晃动

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-008

## 引言

液体晃动会影响货物运输安全,如公路、铁路和航空运输中的液罐车以及海底运输管道等,主要是由于液体自由表面发生非线性运动,对罐体施加动态载荷.液体晃动行为研究起源于航空航天领域,主要难点为容器和液体接触面之间的运动边界条件模拟、液体自由表面的非线性运动模拟等.

Abramson 等人基于线性弹簧振子模型研究了航天器内储油箱的液体振动,分析具有不同罐体形状内的液体晃动频率和振型,并给出接触作用力解析表达式,指出液体第一阶晃动频率对系统影响最大<sup>[1]</sup>.Ranganathan 等人建立了单摆-固定质量块模型,用单摆模拟液体一阶晃动效应,用固定质量块模拟未参与晃动的部分液体,并应用于公路槽罐车制动过程中的液体晃动行为<sup>[2,3]</sup>.文献[4,5]详细阐述了等效模型研究进展,分析了不同建模方法和充比液时重载槽罐车的倾覆性能.然而,这些典型的等效物理模型过于简化,不能描述液体惯量和自由表面的连续性变化.Celebi 基于 Navier-Stokes 方程建立了连续非线性模型,研究带有隔板的矩形贮箱内的液体晃动<sup>[6]</sup>.Ibrahim<sup>[7,8]</sup>总结了二十一世纪初之前的液体晃动研究进展,明确了液体晃动的被动

控制方法以及其在结构振动抑制中的应用,讨论了液体的非线性属性和结构非线性振动等编程实现的困难.Aliabadi<sup>[9]</sup>对比了连续流体模型与弹簧振子和单摆系统构成的等效模型的结果差异,分析了液体自由液面的变化和动态惯量特性,这些都是等效模型所不能实现的.文献[10]总结了近期液固耦合的建模手段和数值方法,并与试验数据对比分析各自优缺点.Bogomaz<sup>[11]</sup>和 Vera 等人<sup>[12]</sup>采用单摆等效模型模拟液体,建立考虑液体晃动的三维车辆系统动力学模型,分析车辆在启动、制动和连挂以及过曲线时的车钩振动、车体加速度变化情况,指出液体晃动对车辆承载和振动响应产生显著影响.Wang 等<sup>[13]</sup>和 Wei 等<sup>[14]</sup>较早地采用连续介质力学方法模拟矩形贮箱内液体的晃动效应,可模拟液体表面的连续性变化.

虚拟质量法将液体考虑为附加质量代入系统质量阵,借助有限元软件计算当前液体质量,然后通过插值得到任意时刻的液体质量,即做了线性叠加假设<sup>[15]</sup>.刘富等<sup>[16]</sup>通过光滑粒子流体动力学方法研究矩形容器内隔板设置问题,合理设置隔板可有效抑制液体晃动.等效力学模型需借助流体动力学和有限元仿真等手段推算或拟合模型参数,并基于线性假设组建车辆系统三维晃动模型,可提高计算

2017-12-15 收到第 1 稿,2018-01-03 收到修改稿.

\* 国家重点研发计划资助(2017YFB1201303-09);牵引动力国家重点实验室课题项目(2018TPL\_T08)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: wyong@home.swjtu.edu.cn

效率,但仅适用于基本规律性研究,不能描述液体自由表面和惯量的非线性变化<sup>[17,18]</sup>.

综上,有必要提出可适用于描述液体惯量连续变化的非线性模型,并易于与车辆多体系统动力学模型集成. Shabana 提出绝对节点坐标方法(Absolute Nodal Coordinate Formulation, ANCF),在全局坐标系下用节点位失的梯度代替传统有限元中的转角坐标,形成的柔性体质量矩阵为常数阵,在大变形问题研究中具有高精度等特点<sup>[19,20]</sup>.

本文基于采用绝对节点坐标方法的柔性多体系统动力学理论,提出一种液体晃动模拟新方法,并应用于液罐车内的液体晃动问题. 首先,基于流体力学基础理论推导液体粘性方程和体积不可压条件方程,然后,采用绝对节点坐标方法描述的实体单元对液体进行网格划分,并通过罚函数描述液体与罐体的接触作用,最后组建罐体-液体耦合多体系统动力学模型,仿真研究液罐车内液体的横向和纵向晃动行为.

## 1 基于绝对节点坐标方法的柔性多体系统

### 1.1 运动学描述

柔性体上任意点的空间位置矢量为  $\mathbf{r} = \mathbf{S}\mathbf{e}$ <sup>[19]</sup>, 其中,  $\mathbf{S}$  为形函数矩阵, 包含柔性体的刚体运动模态和柔性变形模态;  $\mathbf{e}$  为定义在全局坐标系的节点坐标, 包含位置矢量和梯度矢量, 表达式为  $\mathbf{e} = [\mathbf{r} \ r_x \ r_y \ r_z]$ , 且  $\mathbf{r}_x = \mathbf{S}_x \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{r}_y = \mathbf{S}_y \mathbf{e}$  和  $\mathbf{r}_z = \mathbf{S}_z \mathbf{e}$  ( $\mathbf{S}_x$ ,  $\mathbf{S}_y$  和  $\mathbf{S}_z$  为形函数对坐标的偏导数).

### 1.2 惯性力表达

由位置矢量对时间求导得速度和加速度矢量  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{S}\dot{\mathbf{e}}$  和  $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{S}\ddot{\mathbf{e}}$ , 动能为  $T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV$ , 其中  $\rho$  和  $V$  分别为单元在初始构型下的密度和体积, 代入速度矢量则运动能表示为:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \left( \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV \right) \dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{e}} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV$  为质量矩阵(常对称阵).

### 1.3 弹性力表达

基于绝对节点坐标方法描述的柔性体刚度阵为强非线性阵, 可通过单元内部应变能函数对节点坐标求偏导获得. 应变能一般表达式为  $U = \frac{1}{2} \int_{V_0} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV_0$ , 其中,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为格林-拉格朗日应变张量

矩阵,  $\mathbf{E}$  为材料弹性系数矩阵,  $V_0$  为单元初始构型体积. 则单元弹性力为:

$$\mathbf{Q}_s^j = \frac{\partial U^j}{\partial \mathbf{e}^j} = -\mathbf{K}(\mathbf{e}^j) \cdot \mathbf{e}^j \quad (2)$$

其中, 单元刚度阵  $\mathbf{K}$  为节点坐标的强非线性阵; 格林-拉格朗日应变张量  $\boldsymbol{\varepsilon}$  定义为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^T \mathbf{J} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \text{sym} & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{J} = [\mathbf{r}_x \ \mathbf{r}_y \ \mathbf{r}_z]$  为当前构型的雅克比矩阵,  $\mathbf{r}_\xi$  为梯度矢量,  $X$ ,  $Y$  和  $Z$  为定义在初始构型的系统坐标; 对于初始构型弯曲的单元,  $\mathbf{J}$  定义为  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_e \mathbf{J}_0^{-1}$ , 而  $\mathbf{J}_e = [\mathbf{r}_x \ \mathbf{r}_y \ \mathbf{r}_z]$ ,  $\mathbf{J}_0 = [\mathbf{r}_{x_0} \ \mathbf{r}_{y_0} \ \mathbf{r}_{z_0}]$ ,  $x$ ,  $y$  和  $z$  为定义在当前构型的系统坐标,  $x_0$ ,  $y_0$  和  $z_0$  为定义在标准构型的系统坐标. 各构型之间的系统坐标定义如图 1 所示, 体积变换关系为  $dv = |\mathbf{J}_e| dV$ ,  $dV_0 = |\mathbf{J}_0| dV$ ,  $dv = |\mathbf{J}| dV_0$ .

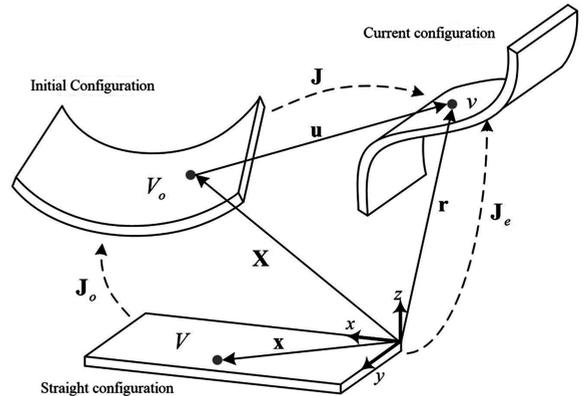


图1 单元各构型定义及相互关系

Fig.1 ANCF deformable body configurations

### 1.4 广义力表达

假设单元任意一点处受外力矢量作用  $\mathbf{f}$ , 则外力对应的虚功为  $\mathbf{f}^T \delta \mathbf{r}$ , 其中  $\mathbf{r}$  为单元上的力作用点处的位置矢量,  $\delta \mathbf{r}$  为  $\mathbf{r}$  的虚变量. 为获得与系统广义坐标相关的广义外力, 将广义力写成节点坐标虚变量形式为:

$$\mathbf{f}^T \delta \mathbf{r} = \mathbf{f}^T \mathbf{S} \delta \mathbf{e} = \mathbf{Q}_f^T \delta \mathbf{e} \quad (4)$$

则  $\mathbf{Q}_f = \mathbf{S}^T \mathbf{f}$  对应外力  $\mathbf{f}$  的广义力.

### 1.5 运动微分代数方程组

由于绝对节点坐标方法的位置矢量定义在全局坐标系下, 因此其运动约束方程描述和雅克比矩阵形式较简单. 因此, 这里仅给出含非线性约束方

程的增广式多体系统运动微分代数方程组:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e \\ \mathbf{Q}_d \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{Q}_e$  为系统广义外力,  $\mathbf{Q}_d$  为与约束方程相关的广义约束力,  $\lambda$  为拉格朗日乘子,  $\mathbf{C}_q$  为与约束方程相关的雅克比矩阵.

## 2 流体力学基础理论

### 2.1 Navier-Stokes 方程

流体力学研究方法通常可分为两类, 欧拉法关注空间网格点处的流体流动情况, 而拉格朗日法则追踪流体物质点运动轨迹. 当流体粘性属性只与温度场相关, 且内部应力与应变线性相关, 称该类流体满足牛顿型特征, 适用牛顿第二定律描述其运动. 假设流体为不可压的牛顿类, 连续性方程写为:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (6)$$

式中,  $\rho$  为流体密度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ),  $t$  为时间 ( $s$ ),  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{v}$  分别为位置 ( $m$ ) 和速度矢量 ( $m/s$ ),  $\nabla$  为散度算子. 假设流体不可压缩, 即流体密度保持不变, 则连续性方程式(6)简化为  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , 即不可压条件. 流体运动偏微分方程为:

$$(\nabla \sigma^T)^T + \mathbf{f}_b - \rho \mathbf{a} = 0 \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{a}$  为加速度矢量,  $\sigma$  为柯西应力张量,  $\mathbf{f}_b$  为单位体积所受外力. 牛顿类流体本构方程为  $\sigma = \{-p(\rho, T) + \lambda(\rho, T) \text{tr}(\mathbf{D})\} \mathbf{I} + 2\mu(\rho, T) \mathbf{D}$ , 其中,  $\lambda$  和  $\mu$  为与流体密度  $\rho$  和温度  $T$  相关的粘性系数;  $p$  为静水压力, 表达式为  $p = (1/3) \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}$ ;  $\mathbf{I}$  为  $3 \times 3$  单位矩阵;  $\text{tr}$  表示矩阵的迹, 即主对角线上各元素之和;  $\mathbf{D}$  为变形率张量<sup>[21]</sup>. 若液体不可压缩且忽略温度影响, 本构方程简化为:

$$\sigma = \{-p + \lambda \text{tr}(\mathbf{D})\} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (8)$$

将公式(8)代入(7)得流体单元状态平衡方程:

$$\{-\nabla(\rho \mathbf{I}) + \nabla[\lambda \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I}] + \nabla(2\mu \mathbf{D})\} + \mathbf{f}_b - \rho \mathbf{a} = 0 \quad (9)$$

由于后文会将液体的有限元单元集成到多体系统中, 因此会用到拉格朗日方程系统描述方法, 即用格林-拉格朗日应变张量  $\boldsymbol{\varepsilon}$  和第二类皮奥拉-基尔霍夫应力张量  $\sigma_{p2}$  描述流体单元的应力-应变

关系. 已知  $\sigma_{p2} = \mathbf{J} \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}^{-T}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{J}^{-1T} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{J}^{-1}$ , 则:

$$\sigma_{p2} = -p \mathbf{J} \mathbf{C}_r^{-1} + \lambda \mathbf{J} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{C}_r^{-1} + 2\mu \mathbf{J} (\mathbf{C}_r^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{C}_r^{-1}) \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{J} = |\mathbf{J}|$ ;  $\mathbf{C}_r = \mathbf{J}^T \mathbf{J}$  为右柯西-格林应变张量.

### 2.2 流体不可压条件

质量守恒条件为  $dm = \rho_o dV = \rho dv$ , 其中  $\rho_o$  和  $dV$  分别为流体在初始构型时密度和体积, 而  $\rho$  和  $dv$  分别为当前构型即发生形变后的密度和体积. 流体变形前后的体积关系为<sup>[22]</sup>:

$$\begin{aligned} dv &= \mathbf{r}_x dx \cdot (\mathbf{r}_y dy \times \mathbf{r}_z dz) \\ &= (\mathbf{r}_x \cdot (\mathbf{r}_y \times \mathbf{r}_z)) dx dy dz = \mathbf{J} dV \end{aligned} \quad (11)$$

上式两边同时乘以  $\rho_o \rho$ , 再利用质量守恒关系可得出流体发生形变前后的密度关系为  $\rho_o = \rho \mathbf{J}$ . 若流体不可压条件为  $\mathbf{J} = 1$ , 表明流体发生形变前后的体积和密度均保持不变.

## 3 基于绝对节点坐标方法的液体运动描述

### 3.1 六面体实体单元

采用基于绝对节点坐标方法的六面体实体单元对液体进行网格划分, 单元  $j$  节点  $k$  坐标为  $e^{jk} = [r_x^{jkT} \ r_y^{jkT} \ r_z^{jkT}]^T$ ,  $k = 1, \dots, 8$ , 其中,  $r_x^{jk}$  为节点绝对位置矢量,  $r_x^{jk}$ 、 $r_y^{jk}$  和  $r_z^{jk}$  为梯度矢量. 低阶单元形函数为<sup>[22]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} S^{k,1} &= (-1)^{1+\xi_k+\eta_k+\zeta_k} (\xi+\xi_k-1) (\eta+\eta_k-1) (\zeta+\zeta_k-1) \cdot \\ &\quad (1+(\xi-\xi_k)(1-2\xi) + (\eta-\eta_k)(1-2\eta) + \\ &\quad (\zeta-\zeta_k)(1-2\zeta)) \\ S^{k,2} &= (-1)^{\eta_k+\xi_k} a \xi^{\xi_k+1} (\xi-1)^{2-\xi_k} \eta^{\eta_k} (\eta-1)^{1-\eta_k} \cdot \\ &\quad \zeta^{\zeta_k} (\zeta-1)^{1-\zeta_k} \\ S^{k,3} &= (-1)^{\xi_k+\zeta_k} b \xi^{\xi_k} (\xi-1)^{1-\xi_k} \eta^{\eta_k+1} (\eta-1)^{2-\eta_k} \cdot \\ &\quad \zeta^{\zeta_k} (\zeta-1)^{1-\zeta_k} \\ S^{k,4} &= (-1)^{\xi_k+\eta_k} c \xi^{\xi_k} (\xi-1)^{1-\xi_k} \eta^{\eta_k} (\eta-1)^{1-\eta_k} \cdot \\ &\quad \zeta^{\zeta_k+1} (\zeta-1)^{2-\zeta_k} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中,  $a$ 、 $b$  和  $c$  分别为单元沿轴  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的长度;  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$ ,  $\zeta = z/c$ , 其中,  $\xi$ 、 $\eta$  和  $\zeta \in [0, 1]$ ,  $\xi_k$ 、 $\eta_k$  和  $\zeta_k$  为节点  $k$  的自然坐标. 单元  $j$  上任意一点的位置矢量表示为:

$$\mathbf{r}^j = \sum_{k=1}^8 [S^{k,1} \mathbf{I} \ S^{k,2} \mathbf{I} \ S^{k,3} \mathbf{I} \ S^{k,4} \mathbf{I}] e^{jk} = \mathbf{S}^j \mathbf{e}^j \quad (13)$$

式中,  $\mathbf{I}$  为  $3 \times 3$  单位阵,  $\mathbf{S}^j$  和  $\mathbf{e}^j$  分别为单元的形函数矩阵和节点坐标矢量. 六面体实体单元含 8 个节点, 共计 96 个自由度, 其位置矢量及梯度矢量可以表达液体形状及其惯量变化.

### 3.2 体积不可压条件

在数值仿真时中采用罚函数方法施加不可压条件, 保证单元  $j$  内  $J^j = |\mathbf{J}^j| = 1$ . 基于罚函数的应变能函数  $U_{IC}^j = (1/2)k_{IC}^j(J^j - 1)^2$ , 对单元节点坐标求偏导可得满足体积不可压条件的约束力:

$$\mathbf{Q}_{IC}^j = \partial U_{IC}^j / \partial \mathbf{e}^j = k_{IC}^j (J^j - 1) (\partial J^j / \partial \mathbf{e}^j) \quad (14)$$

其中,  $k_{IC}^j$  为罚函数刚度系数,  $\partial J^j / \partial \mathbf{e}^j = \mathbf{S}_x^{jT}(\mathbf{r}_x^j \times \mathbf{r}_y^j) + \mathbf{S}_y^{jT}(\mathbf{r}_z^j \times \mathbf{r}_x^j) + \mathbf{S}_z^{jT}(\mathbf{r}_x^j \times \mathbf{r}_y^j)$ ,  $\mathbf{S}_x^j$ ,  $\mathbf{S}_y^j$  和  $\mathbf{S}_z^j$  分别为形函数对空间坐标  $x$ 、 $y$  和  $z$  求偏导.

上式在位置层面上保证了体积不可压条件 ( $J^j = 1$ ), 同样采用罚函数方法可满足速度层面上的体积不可压条件  $\dot{J}^j = 0$ , 对应的应变能为  $U_{TD}^j = (1/2)c_{TD}^j(\dot{J}^j)^2$ ,  $c_{TD}^j$  为罚函数阻尼系数. 将应变能对单元节点速度求偏导, 得不可压约束力:

$$\mathbf{Q}_{TD}^j = \partial U_{TD}^j / \partial \dot{\mathbf{e}}^j = c_{TD}^j \dot{J}^j (\partial \dot{J}^j / \partial \dot{\mathbf{e}}^j) \quad (15)$$

其中,  $\dot{J}^j = \text{tr}(\mathbf{D}^j) \dot{J}^j$ ,  $\partial \dot{J}^j / \partial \dot{\mathbf{e}}^j = \partial J^j / \partial \mathbf{e}^j$ .

### 3.3 单元内部粘性力

已知  $J^j = 1$  和  $\dot{J}^j = 0$ , 则  $\text{tr}(\mathbf{D}^j) = \dot{J}^j / J^j = 0$ , 从而本构方程式(8)进一步简化为  $\boldsymbol{\sigma}^j = 2\mu \mathbf{D}^j$ <sup>[22]</sup>. 液体单元内部应力对应的虚功表达式为:

$$\delta W_v^j = - \int_{V^j} \boldsymbol{\sigma}^j : \delta \mathbf{J}^j \mathbf{J}^{j-1} dV^j = - \int_{V^j} \boldsymbol{\sigma}^j : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^j dV^j,$$

其中,  $V^j$  为单元当前构型的体积,  $V^j$  为单元初始构型的体积. 结合公式(10), 液体单元的内部粘性力虚功表达式可简化为:

$$\delta W_v^j = - \int_{V^j} 2\mu J^j (C_r^{j-1} \boldsymbol{\varepsilon}^j C_r^{j-1}) : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^j dV^j \quad (16)$$

式中, 应变张量微应变写为  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^j = (\partial \boldsymbol{\varepsilon}^j / \partial \mathbf{e}^j) \delta \mathbf{e}^j$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^j$  为应变变化率. 上式记为  $\delta W_v^j = \mathbf{Q}_v^j \delta \mathbf{e}^j$ , 则广义粘性力  $\mathbf{Q}_v^j$  表达式为:

$$\mathbf{Q}_v^j = - \int_{V^j} 2\mu J^j (C_r^{j-1} \boldsymbol{\varepsilon}^j C_r^{j-1}) : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^j}{\partial \mathbf{e}^j} dV^j \quad (17)$$

### 3.4 液体运动方程

根据液体单元的质量矩阵、外力矢量(式(4))、保证体积不可压条件的约束力(式(14)和(15))和粘性力(式(17)), 则其运动微分方程组为:

$$\mathbf{M}^j \ddot{\mathbf{e}}^j = \mathbf{Q}_e^j - (\mathbf{Q}_v^j + \mathbf{Q}_{IC}^j + \mathbf{Q}_{TD}^j) \quad (18)$$

若液体被划分为多个单元, 通过组装单元运动方程来组建系统运动方程, 利用数值仿真求得系统速度和位置矢量.

## 4 基于罚函数描述的液体与罐体接触关系

采用罚函数方法描述液体单元  $j$  和罐体  $i$  之间的接触作用, 仿真计算时遍历液体外表面上任意点位置, 实时检查液体单元表面是否与罐体发生穿透. 正压力表示为穿透量  $\delta$  和速度  $\dot{\delta}$  函数:

$$f_n = -K\delta^{3/2} - C\dot{\delta}|\dot{\delta}| \quad (19)$$

式中,  $K$  和  $C$  为罚函数刚度和阻尼系数.

由于正压力  $f_n$  应垂直于罐体上接触点处切平面, 因此需要计算接触点处的法向量  $\mathbf{v}$ . 已知罐体结构两端为半椭球体, 中间部分为圆柱体, 如图 2 所示, 可根据液体空间位置计算出罐体上对应的接触点位置. 摩擦力  $f_c = \mu f_n$  沿接触点处切平面向量,  $\mu$  为摩擦系数. 正压力和摩擦力同时作用在液体和罐体上, 幅值相等但方向相反.

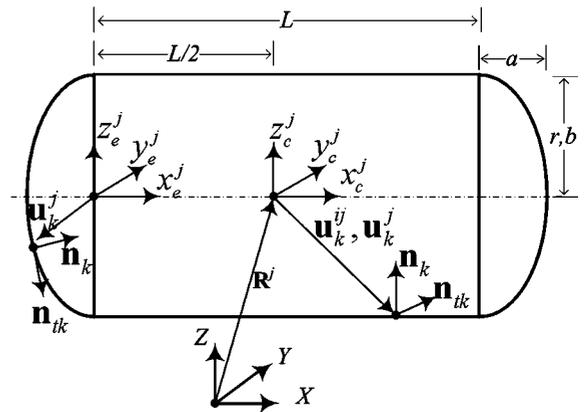


图 2 液体与罐体接触关系的坐标系定义

Fig.2 Interaction definition between the liquid and tank

假设液体上接触点为  $\mathbf{r}_p^j = \mathbf{S}_p^j \mathbf{e}^j$ , 该点相对于罐体坐标系原点的位置矢量和速度分别为:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_p^j = \dot{\mathbf{r}}_p^j - \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\mathbf{u}}_p^j = \ddot{\mathbf{r}}_p^j - \ddot{\mathbf{R}}^i \end{cases} \quad (20)$$

式中,  $\mathbf{R}^i$  和  $\dot{\mathbf{R}}^i$  分别为罐体坐标系原点位置和速度矢量. 将相对位置矢量转换到罐体坐标系并求其速度矢量:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{u}}_p^j = \mathbf{A}^{iT} \mathbf{u}_p^j = \mathbf{A}^{iT} (\mathbf{r}_p^j - \mathbf{R}^i) \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}}_p^j = \mathbf{A}^{iT} \dot{\mathbf{u}}_p^j + \dot{\mathbf{A}}^{iT} \mathbf{u}_p^j \end{cases} \quad (21)$$

式中,  $\mathbf{A}^i$  为罐体的空间方向转换矩阵;  $\dot{\mathbf{A}}^i = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \mathbf{A}^i$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i$  定义为罐体角速度矢量  $\boldsymbol{\omega}^i$  反对称阵。

计算出液体表面任意点相对罐体的位置矢量  $\vec{\mathbf{u}}_p^i$  和速度矢量  $\dot{\vec{\mathbf{u}}}_p^i$ , 从而可以判断是否发生接触, 并计算出罐体上对应的接触点位置和穿透速度。根据  $\vec{\mathbf{u}}_p^i$  在罐体结构纵向的分量, 确定接触点是处于罐体中部圆柱体区域还是端部椭球体区域。

#### 4.1 中部圆柱体区域接触关系

法向量  $\bar{\mathbf{v}}$  指向罐体圆形截面圆心, 用  $\vec{\mathbf{u}}_p^i$  表示为  $\bar{\mathbf{v}}_1 = [0 \quad -\vec{\mathbf{u}}_p^i(2) \quad -\vec{\mathbf{u}}_p^i(3)]^T$ , 其单位向量为  $\bar{\mathbf{n}}_c = \bar{\mathbf{v}}_1 / \sqrt{\bar{\mathbf{v}}_1^T \bar{\mathbf{v}}_1}$ . 切向量为  $\bar{\mathbf{v}}_2 = \dot{\vec{\mathbf{u}}}_p^i - (\dot{\vec{\mathbf{u}}}_p^i \cdot \bar{\mathbf{n}}_c) \bar{\mathbf{n}}_c$ , 其单位向量为  $\bar{\mathbf{n}}_t = \bar{\mathbf{v}}_2 / \sqrt{\bar{\mathbf{v}}_2^T \bar{\mathbf{v}}_2}$ . 根据圆柱体几何结构特征, 接触点处穿透量为:

$$\delta = \sqrt{(\vec{\mathbf{u}}_p^i(2))^2 + (\vec{\mathbf{u}}_p^i(3))^2} - r \quad (22)$$

式中:  $r$  为圆柱体半径, 假设罐体为刚体. 接触点处穿透速度定义为:

$$\dot{\delta} = \dot{\vec{\mathbf{u}}}_p^i \cdot \bar{\mathbf{n}}_c \quad (23)$$

然后, 可根据式(19)计算出正压力数值, 从而可获得摩擦力数值. 因此, 正压力向量为  $\mathbf{f}_n = f_n \cdot \bar{\mathbf{n}}_c$ , 摩擦力为  $\mathbf{f}_c = -f_c \cdot \bar{\mathbf{n}}_t$ , 则由接触产生的反力为  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_c$ , 定义在全局坐标系下为:  $\mathbf{F} = \mathbf{A}^i \mathbf{f}$ .

作用在液体上的力为:

$$\mathbf{Q}_{ep}^i = \mathbf{S}_p^i \mathbf{F} = \mathbf{S}_p^i \mathbf{A}^i \mathbf{f} \quad (24)$$

式中,  $\mathbf{S}_p^i$  为对应的液体接触点处的形函数值. 已知作用在罐体上的力与作用在液体上的力等值反向, 则作用在罐体上的广义力为:

$$\mathbf{Q}_{ep}^i = \begin{bmatrix} I \\ \bar{\mathbf{G}}^{iT} \tilde{\mathbf{u}}_p^i \mathbf{A}^{iT} \end{bmatrix} (-\mathbf{F}) = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^i \mathbf{f} \\ \bar{\mathbf{G}}^{iT} \tilde{\mathbf{u}}_p^i \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (25)$$

式中,  $\bar{\mathbf{G}}^i$  为与联系罐体转动角速度和转角坐标偏导之间的关系矩阵;  $\tilde{\mathbf{u}}_p^i$  为罐体上接触点的局部位置矢量, 表示为  $\tilde{\mathbf{u}}_p^i = r \cdot \bar{\mathbf{n}}_c$  或用  $\vec{\mathbf{u}}_p^i$  作为近似。

#### 4.2 端部椭球体区域接触关系

假定罐体坐标系原点在结构几何中心, 将位置矢量  $\vec{\mathbf{u}}_p^i$  转换到椭球坐标系下为  $\vec{\mathbf{u}}_p^i = \vec{\mathbf{u}}_p^i \pm L/2$ ,  $L$  为罐体圆柱体部分长度, 即椭球坐标系相对罐体坐标系仅进行平移. 设椭球体半轴长分别为  $a$ 、 $b$  和  $c$ , 则判定液体与罐体是否接触的依据为  $(\vec{\mathbf{u}}_p^i(1)/a)^2 + (\vec{\mathbf{u}}_p^i(2)/b)^2 + (\vec{\mathbf{u}}_p^i(3)/c)^2 > 1$ . 假设该接触点处位置矢量  $\vec{\mathbf{u}}_p^i$  与液体上的接触点的位置矢量  $\vec{\mathbf{u}}_p^i$  同向, 可

根据椭球体方程求罐体接触点  $\vec{\mathbf{u}}_p^i$ , 法向量  $\bar{\mathbf{v}}_1 = -2 [\vec{\mathbf{u}}_p^i(1)/a^2 \quad \vec{\mathbf{u}}_p^i(2)/b^2 \quad \vec{\mathbf{u}}_p^i(3)/c^2]^T$ , 单位向量为  $\bar{\mathbf{n}}_c = \bar{\mathbf{v}}_1 / \sqrt{\bar{\mathbf{v}}_1^T \bar{\mathbf{v}}_1}$ . 接触点处穿透量为:

$$\delta = \sqrt{\vec{\mathbf{u}}_p^i \vec{\mathbf{u}}_p^i} - \sqrt{\vec{\mathbf{u}}_p^i \vec{\mathbf{u}}_p^i} \quad (26)$$

由于椭球坐标系相对体坐标系无转动, 相对速度表达式仍为  $\dot{\delta} = \dot{\vec{\mathbf{u}}}_p^i \cdot \bar{\mathbf{n}}_c$ . 接触正压力和摩擦力计算同圆柱体部分。

## 5 液罐车内液体晃动行为仿真

以液罐车装载类似水的液体为例, 密度  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , 重力系数  $g = -9.81 \text{ m/s}^2$ , 粘性系数取  $\mu = 9.3 \times 10^{-4} \text{ Pa}^{[14]}$ . 体积不可压缩函数系数  $k_{ic} = 1.0 \times 10^6 \text{ N/m}$  和  $c_{TD} = 1.0 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ . 罐体长度 12m, 直径 2.8m. 模拟液罐车半载情况, 液面高度 1.4m, 则液体质量约 37.5t.

### 5.1 横向晃动模拟

在罐体上施加横向简谐激励  $f = 0.5 \text{ Hz}$ 、 $A = 0.1 \text{ m}$ , 仿真时间 4s, 模拟液罐车内液体的横向往复晃动过程, 如图 3 和图 4 所示.  $t = 0.0 \text{ s}$  时, 半圆柱形液体在重力作用下开始与罐体内壁发生接触, 最终构型与罐体内壁贴合;  $t = 1.5 \text{ s}$ 、 $2.5 \text{ s}$  时, 液体发生纵向、横向和垂向变形以贴合罐体内壁, 但不同断面处的液体自由表面形状不完全相同, 即液体自由表面的运动呈现非线性;  $t = 3.0 \text{ s}$ 、 $4.0 \text{ s}$  时可以观察到罐体内液体的显著晃动行为, 液体上表面位置呈非线性变化. 仿真计算时仅采用了 1 个单元, 参考第 1.3 节和第 4 节定义单元初始外形, 以尽可能保证液体初始形状与罐体内壁贴合, 从而节省计算工时. 通过增加单元数, 可以获得更加连续的液体自由表面变化形状, 但基本上与 1 个单元情况相似, 因此不再列写多个单元时的仿真结果。

### 5.2 纵向晃动模拟

对罐体施加纵向简谐激励  $f = 0.1 \text{ Hz}$ 、 $A = 1 \text{ m}$ , 模拟液罐车内液体的纵向晃动过程, 仿真时间 20s, 结果如图 5 所示. 可见, 液体的纵向晃动必然引起液体质心的纵向移动. 仿真计算表明其质心最大位移可达 0.5m 以上, 按此值估算液罐车前后转向架轴重转移量可达 15%, 从而影响液罐车的动力学性能和车轮磨损. 液罐车采用长大编组方式运行, 制动过程中的液体纵向晃动必然引起车钩/缓冲器受力的突变或制动效能损失。

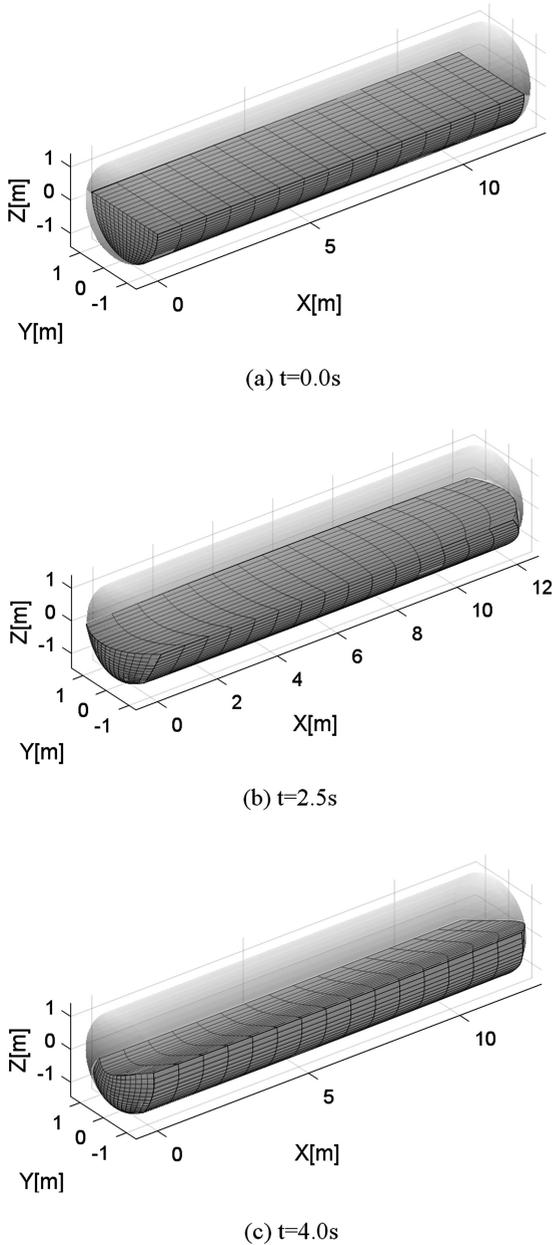


图3 液罐车内液体的横向晃动(主视图)

Fig.3 Liquid sloshing along lateral direction (axial view)

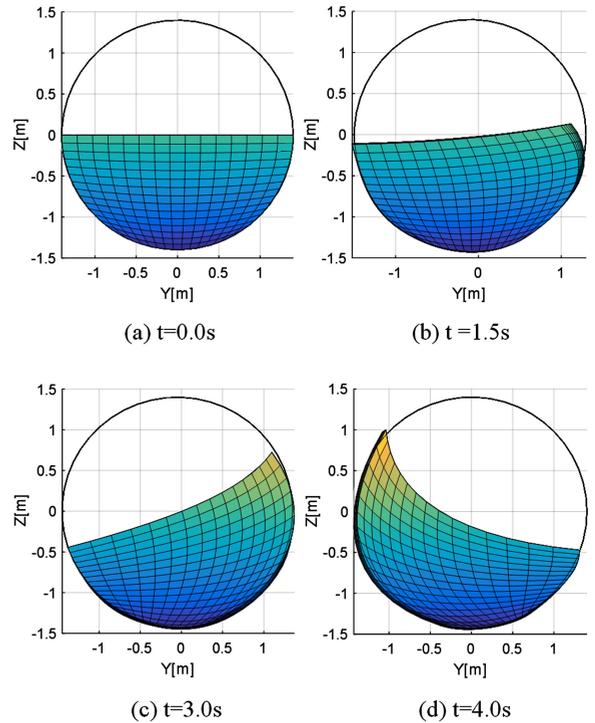


图4 液罐车内液体的横向晃动(俯视图)

Fig.4 Liquid sloshing along lateral direction (side view)

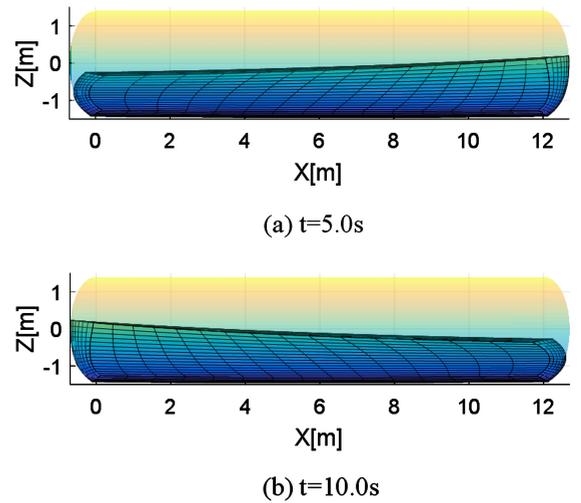


图5 液罐车内液体的纵向晃动

Fig.5 Liquid sloshing along longitudinal direction in tank

## 6 结论

1) 本文提出采用绝对节点坐标方法的液体晃动模拟新方法,用于模拟液罐车内液体自由表面的连续性变化.该方法描述液体自由表面形状的连续性变化,并适用于研究具有复杂结构或形状容器的内部液体晃动问题.

2) 基于流体力学牛顿类体基础理论,推导粘性方程和满足体积不可压缩的条件方程;采用绝对节点坐标方法描述的实体单元进行液体网格划分.

3) 采用罚函数方法描述液体与罐体的接触作

用,给出液体与罐体中部圆柱体或端部椭球体的接触关系,组建罐体-液体耦合系统动力学模型.

4) 仿真计算液罐车内液体的横向和纵向晃动过程,发现液体自由表面形状呈非线性变化,不同断面处的高度和形状不同;液体的横向、纵向晃动必然引起液罐车的质心发生改变,从而影响轮重减载和车钩力变化.

5) 本文限于研究罐体和液体之间的耦合运动,

暂未考虑整车模型,也未考虑罐体内含隔板情况。

## 参 考 文 献

- Abramson H N. The dynamic behavior of liquids in moving containers-with applications to space vehicle technology. Technical Report NASA SP-106, 1966. San Antonio, TX: Southwest Research Institute
- Ranganathan R, Ying Y, Miles J B. Analysis of fluid slosh in partially filled tanks and their impact on the directional response of tank vehicles. SAE Technical Paper, (No. 932942), 1993
- Ranganathan R, Ying Y, Miles J B. Development of a mechanical analogy model to predict the dynamic behavior of liquids in partially filled tank vehicles, SAE Technical Paper, (No. 942307), 1994
- Salem M I. Rollover stability of partially filled heavy-duty elliptical tankers using trammel pendulums to simulate fluid sloshing [Ph.D Thesis]. West Virginia: West Virginia University, 2000
- Zheng X, Li X, Ren Y. Equivalent mechanical model for lateral liquid sloshing in partially filled tank vehicles. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012;123~132
- Celebi M S, Akyildiz H. Nonlinear modeling of liquid sloshing in a moving rectangular tank. *Ocean Engineering*, 2001,29(12):1527~1553
- Ibrahim R A, Pilipchuk V N, Ikeda T. Recent advances in liquid sloshing dynamics. *Applied Mechanics Reviews*, 2001,54(2):133~199
- Ibrahim R A. *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2005
- Aliabadi S, Johnson A, Abedi J. Comparison of finite element and pendulum models for simulation of sloshing. *Computers & Fluids*, 2003,32(4):535~545
- Rebouillat S, Liksonov D. Fluid-structure interaction in partially filled liquid containers: a comparative review of numerical approaches. *Computers & Fluids*, 2010, 39(5):739~746
- Bogomaz G I, Markova O M, Chernomashentseva Y G. Mathematical modelling of vibrations and loading of railway tanks taking into account the liquid cargo mobility. *Vehicle System Dynamics*, 1998,30(3-4):285~294
- Vera C, Paulin J, Suarez B, et al. Simulation of freight trains equipped with partially filled tank containers and related resonance phenomenon. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 2005,219(4):245~259
- Wang L, Octavio J R J, Wei C, et al. Low order continuum-based liquid sloshing formulation for vehicle system dynamics. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2015,10(2):021022
- Wei C, Wang L, Shabana A A. A total Lagrangian ANCF liquid sloshing approach for multibody system applications. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016,10(5):051014
- 马驰骋,张希农,柳征勇等. 变质量贮箱类流固耦合系统的振动响应及时频特性分析. *振动与冲击*, 2014,33(21):166~171 (Ma C C, Zhang X N, Liu Z Y, et al. Dynamic responses and time-frequency feature analysis for a fluid-structure coupling system with a variable mass tank. *Journal of Vibration and Shock*, 2014,33(21):166~171 (in Chinese))
- 刘富,童明波,陈建平. 储箱内液体晃动动力学分析及防晃结构优化. *计算机应用与软件*, 2011,28(12):202~205 (Liu F, Tong M B, Chen J P. Inside-container liquid sloshing dynamics analysis and sloshing suppression structure optimization. *Computer Applications and Software*, 2011,28(12):202~205 (in Chinese))
- 王勇. 考虑液体晃动的三大件转向架罐车耦合系统动力学性能研究 [博士学位论文]. 成都:西南交通大学, 2004 (Wang Y. Study on the coupling system dynamics for three-piece bogie tank cars taking into account the liquid sloshing [Ph.D Thesis]. Chengdu, Southwest Jiaotong University, 2004 (in Chinese))
- 卢军. 任意充液比油罐车液体晃动及整车横向稳定性研究 [硕士学位论文]. 成都:西南交通大学, 2009 (Lu J. Liquid sloshing and transverse stability analysis of tank truck with arbitrary proportional liquid [Master Thesis]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2009 (in Chinese))
- Shabana A A, Hussien H A, Escalona J L. Application of the absolute nodal coordinate formulation to large rotation and large deformation problems. *Journal of Mechanical Design*, 1998,120(2):188~195
- 田强,刘钺,李培等. 多柔体系统动力学研究进展与挑战. *动力学与控制学报*, 2017,15(5):385~405 (Tian Q, Liu C, Li P, et al. Advances and challenges in dynamics of flexible multibody systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2017,15(5):385~405 (in Chinese))
- Olshevskiy A, Dmitrochenko O, Kim C W. Three-dimen-

sional solid brick element using slopes in the absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2014,9(2):021001

22 Shabana A A. *Computational continuum mechanics*, 3rd ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017

## LIQUID SLOSHING SIMULATING IN RAILWAY TANK CAR BASED ON TOTAL LAGRANGIAN APPROACH\*

Shi Huailong Wang Yong<sup>†</sup> Wu Pingbo

(State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract** A new approach for simulating the liquid sloshing in a tank car is proposed based on the flexible multibody dynamics (MBS) and the absolute nodal coordinate formulation (ANCF) in describing the large deformation. It is used to study the non-linear free-surface of the liquid during sloshing, and it can be applied also to study the liquid sloshing problem within a container with the complex geometry. Based on the Newton fluid, derivations of the fluid constitutive equations are provided as well as the incompressibility characteristics. The ANCF solid element is applied to mesh the liquid inside the tank car, the penalty method is used to develop the fluid-tank contact model, and the fluid-tank coupled MBS model is then built. Furthermore, numerical simulations are conducted to demonstrate the liquid sloshing inside a railway tank, in which harmonics are applied along the lateral and longitudinal axes, respectively. It shows that the free-surface has a non-linear shape and height, which experiences different values for different tank cross-sections.

**Key words** tank car, multibody dynamics, absolute nodal coordinate formulation(ANCF), liquid sloshing

Received 15 December 2017, revised 03 January 2018.

\* The project supported by National Key R&D Program of China (2017YFB1201303-09) and Key Laboratory Grants of the Independent Research and Development Projects (2018TPL\_T08).

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: wyong@home.swjtu.edu.cn