

# 多约束条件下空间飞行器姿态机动规划的 微分平坦方法\*

蔡伟伟<sup>1†</sup> 朱彦伟<sup>1</sup> 曾璞<sup>2</sup>

(1.国防科技大学空天科学学院,长沙 410073) (2.国防科技大学军事基础教育学院,长沙 410073)

**摘要** 考虑执行机构性能、传感器空间指向等复杂约束,研究了空间飞行器姿态机动的路径规划问题.建立了姿态机动路径规划模型,并通过使用微分平坦理论将其映射到平坦输出空间,消除微分方程约束的同时降低设计空间维数;给出了平坦输出参数化描述的伪谱法,并运用共形映射、重心插值等技术改善了微分矩阵的病态特性,提高了路径规划的精度.仿真表明:该方法能够较快规划出满足约束的姿态机动路径,对工程应用具有一定参考价值.

**关键词** 姿态机动, 微分平坦, 共形映射, Chebyshev 伪谱法

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-005

## 引言

空间飞行器在轨运行期间,需要通过大量的姿态机动在不同姿态指向之间进行切换,达成多样化的任务目的;然而,姿态执行机构性能、星上传感器空间指向等复杂约束的存在,使得姿态机动路径面临诸多限制,需要在多约束条件下开展姿态机动路径规划研究,为安全、稳定地工作提供支撑.针对空间飞行器姿态机动规划问题,国内外学者开展了许多有意义的研究.武长青从能量最优角度出发,将航天器姿态约束机动问题归纳为非凸二次约束二次规划问题,运用基于评价函数的迭代规划算法获得全局姿态优化路径<sup>[1]</sup>.赵乾考虑力矩陀螺奇异与饱和特性,根据工程实际偏好需求,研究了空间站姿态机动路径规划的多目标优化问题<sup>[2]</sup>.丰志伟针对单框架控制力矩陀螺驱动下的敏捷卫星姿态机动问题,考虑奇异状态规避,利用伪谱法对时间固定、能量最优的姿态机动路径进行了优化<sup>[3]</sup>.

近年来,一种基于微分平坦理论的轨迹规划方法因其显著的计算效率而广泛应用于四旋翼飞行器<sup>[4]</sup>、动态滑翔无人机<sup>[5]</sup>等领域.该方法利用系统的微分平坦属性,将初始轨迹规划问题映射到平坦输

出空间,有效消除微分约束,降低设计维度,从而达到提高计算效率的目的.在空间飞行器姿态机动方面,庄宇飞针对欠驱动航天器的姿态机动规划问题,引入虚拟控制输入的概念扩展了系统微分平坦属性,并利用样条函数、三角多项式函数等参数化平坦输出,实现姿态机动可行路径的快速规划<sup>[6]</sup>.然而,函数逼近论表明上述参数化方法在近似精度和计算效率两方面均不是最佳的选择.因此,对于最优轨迹规划问题需寻求其他平坦输出参数化方法.由于伪谱法能够以较少的离散点对待定函数进行高精度近似,Ross 最早将伪谱法应用于平坦输出参数化,并直接由伪谱微分矩阵计算平坦输出的各阶导数,改善了微分平坦方法的性能<sup>[7]</sup>.然而,标准伪谱法的微分矩阵存在病态特性,严重影响平坦输出高阶导数在规划时域端点处的精度.因此,为提高机动轨迹规划的性能,需进一步改善伪谱微分矩阵的病态特性.

本文研究了复杂约束条件下空间飞行器姿态机动的规划问题,建立了姿态机动轨迹规划的模型,分析了姿态运动方程的微分平坦属性,分别给出了基于微分平坦的规划策略和映射 Chebyshev 伪谱法参数化平坦输出的方法,并开展数值仿真分析验证所研究方法的性能.

2016-9-2 收到第 1 稿,2017-3-21 收到修改稿.

\* 航空科学基金资助(2016ZC88007),湖南省自然科学基金(2017JJ3360)

† 通讯作者 E-mail: tsaiweiwei@hotmail.com

## 1 姿态机动规划问题描述

### 1.1 姿态运动模型

本文以非对称刚体空间飞行器为研究对象,其沿各惯量主轴方向的姿态动力学方程为:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + u_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 + u_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + u_3 \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $I = \text{diag}\{I_1 \ I_2 \ I_3\}$ ,  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  和  $\boldsymbol{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  分别为惯量张量、角速度以及控制输入矢量。

采用欧拉角描述空间飞行器姿态,按 3-2-1 转动顺序,则姿态运动学方程为:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega_1 + (\omega_2 \sin\varphi + \omega_3 \cos\varphi) \tan\theta \\ \dot{\theta} = \omega_2 \cos\varphi - \omega_3 \sin\varphi \\ \dot{\psi} = (\omega_2 \sin\varphi + \omega_3 \cos\varphi) \sec\theta \end{cases} \quad (2)$$

式中  $\varphi$ ,  $\theta$  和  $\psi$  分别为滚转、俯仰和偏航角。

### 1.2 约束条件

在初始和终端期望姿态之外,空间飞行器姿态还面临控制输入受限、传感器指向受限等复杂约束。实际工程中,姿态执行机构提供的力矩幅值有限,形成控制输入饱和约束:

$$u_i(t) \leq u_{\max}, t \in [t_0, t_f] \quad (3)$$

式中  $i=1,2,3$ ;  $t_0$  和  $t_f$  分别表示初始和终端时刻。

在姿态机动过程中,红外敏感望远镜等传感器不能朝向太阳,以免损害敏感元件,这类约束称为空间指向约束:

$$\boldsymbol{r}_B^T (C_{BI} \boldsymbol{r}_I) \leq \cos\beta \quad (4)$$

式中  $\boldsymbol{r}_B$  表示传感器在空间飞行器本体系下的方向矢量,  $\boldsymbol{r}_I$  表示太阳在惯性系下的方向矢量,  $C_{BI}$  为惯性系相对于本体系之间的姿态矩阵,  $\beta$  为  $\boldsymbol{r}_B$  和  $\boldsymbol{r}_I$  间的最大夹角。

### 1.3 目标函数

在达成期望姿态的同时,姿态机动过程还可对机动时间、能量等进行优化,本文以能量最优为控制目标:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dt \quad (5)$$

以  $\boldsymbol{x} = [\varphi, \theta, \psi, \omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$  表征系统状态变量,多约束条件下空间飞行器姿态机动路径规划的目的是确定控制输入  $\boldsymbol{u}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ ,使飞行器在满足式(3)~(4)所示约束的同时,由初始姿态  $\boldsymbol{x}_0$

机动至期望姿态  $\boldsymbol{x}_f$ ,并使式(5)所示目标函数最优。

## 2 姿态机动规划方法

### 2.1 微分平坦简介

对于一般非线性系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \quad (6)$$

其中  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$  为状态变量,  $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$  为控制输入,  $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  为光滑函数。若存在一组相互微分独立的变量  $\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m] \in \mathbb{R}^m$  满足:

$$\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1, \dots, \zeta_m]^T = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \dots, \boldsymbol{u}^{(\lambda)}) \quad (7)$$

且系统状态和输入能够表示为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Gamma}_x(\boldsymbol{\zeta}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}, \dots, \boldsymbol{\zeta}^{(\eta-1)}) \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Gamma}_u(\boldsymbol{\zeta}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}, \dots, \boldsymbol{\zeta}^{(\eta)}) \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\boldsymbol{\Gamma}_x, \boldsymbol{\Gamma}_u$  为连续光滑函数;  $\zeta_i^{(k)}$  为元素  $\zeta_i$  的第  $k$  阶导数,  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_m]^T$  为  $\boldsymbol{\zeta}$  的相对阶:

$$\eta_i = \min\{k \in \mathbb{N}^*, \exists j \in \{1, \dots, m\} \mid \partial \zeta_i^{(k)} / \partial u_j \neq 0\} \quad (9)$$

则称非线性系统(6)是微分平坦的,其中变量  $\boldsymbol{\zeta}$  为平坦输出<sup>[8]</sup>。

根据微分平坦系统定义,平坦输出与系统状态和控制输入之间存在可逆映射关系,系统运动行为能够完全由平坦输出决定。基于此,可将状态空间中的轨迹规划问题映射到平坦输出空间中,解出最优平坦输出函数后,重新映射回状态空间即可生成期望的状态和控制变量轨迹。

### 2.2 姿态运动模型微分平坦属性

对第 1.1 节中的姿态运动模型,以欧拉角  $\varphi$ ,  $\theta$  和  $\psi$  为候选平坦输出,分别记为  $\zeta_1 = \varphi$ ,  $\zeta_2 = \theta$ ,  $\zeta_3 = \psi$ ,则其余状态变量可表示为:

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\zeta}_1 - \dot{\zeta}_3 \sin\zeta_2 \\ \omega_2 = \dot{\zeta}_2 \cos\zeta_1 + \dot{\zeta}_3 \sin\zeta_1 \cos\zeta_2 \\ \omega_3 = -\dot{\zeta}_2 \sin\zeta_1 + \dot{\zeta}_3 \cos\zeta_1 \cos\zeta_2 \end{cases} \quad (10)$$

将式(10)对时间  $t$  求导得:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \ddot{\zeta}_1 - \ddot{\zeta}_3 \sin\zeta_2 - \dot{\zeta}_2 \dot{\zeta}_3 \cos\zeta_2 \\ \dot{\omega}_2 = \ddot{\zeta}_2 \cos\zeta_1 - \dot{\zeta}_1 \dot{\zeta}_2 \sin\zeta_1 + \dots \\ \quad \ddot{\zeta}_3 \sin\zeta_1 \cos\zeta_2 + \dot{\zeta}_1 \dot{\zeta}_3 \cos\zeta_1 \cos\zeta_2 - \dots \\ \quad \dot{\zeta}_2 \dot{\zeta}_3 \sin\zeta_1 \sin\zeta_2 \\ \dot{\omega}_3 = -\ddot{\zeta}_2 \sin\zeta_1 - \dot{\zeta}_1 \dot{\zeta}_2 \cos\zeta_1 + \dots \\ \quad \ddot{\zeta}_3 \cos\zeta_1 \cos\zeta_2 - \dot{\zeta}_1 \dot{\zeta}_3 \sin\zeta_1 \cos\zeta_2 - \dots \\ \quad \dot{\zeta}_2 \dot{\zeta}_3 \cos\zeta_1 \sin\zeta_2 \end{cases} \quad (11)$$

将式(10)和(11)代入式(1)中,则控制输入变量可表示为平坦输出及其各阶导数的函数:

$$\begin{cases} u_1 = I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = \Gamma_{u1}(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}) \\ u_2 = I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 = \Gamma_{u2}(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}) \\ u_3 = I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = \Gamma_{u3}(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}) \end{cases} \quad (12)$$

至此可以判断姿态运动模型具有微分平坦属性,将式(10)和(12)代入约束条件式(3)~(4)和目标函数式(5)中,则姿态机动规划模型可以映射到平坦输出空间中:确定平坦输出  $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3]^T = [\varphi, \theta, \psi]^T$ ,使得如下目标函数最小:

$$J(\zeta(t), t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} (\Gamma_{u1}^2 + \Gamma_{u2}^2 + \Gamma_{u3}^2) dt \quad (13)$$

满足边界条件、控制输入饱和与空间指向约束:

$$\mathbf{B}(\tilde{\zeta}(t_0), t_0; \tilde{\zeta}(t_f), t_f) = 0 \quad (14)$$

$$\Gamma_{ui}(\tilde{\zeta}(t), t) \leq u_{\max}, (i=1, 2, 3) \quad (15)$$

$$\mathbf{C}(\tilde{\zeta}(t), t) \leq \mathbf{C}_{\max} \quad (16)$$

其中式(14)和(16)分别为平坦输出表示的边界条件与空间指向约束。

由于平坦输出是微分平坦系统的最小描述,其维数与非线性系统控制输入维数相等,因此对于状态空间维数较高的系统,基于微分平坦理论将轨迹规划问题映射到平坦输出空间中,能够有效减少系统分析设计的维度,降低问题求解难度。此外,通过微分平坦变换,系统微分方程约束得以完全消除,转换所得几何规划问题更易求解,计算效率更高。

### 2.3 映射 Chebyshev 伪谱法

本节给出参数化平坦输出的映射 Chebyshev 伪谱法,该方法以映射 Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL) 节点为插值节点,运用重心有理 Lagrange 插值技术近似平坦输出,由微分矩阵直接获取平坦输出在配点处的导数,并通过 Clenshaw-Curtis 积分替代目标函数中的积分项,最终将平坦输出规划问题进一步转换为非线性规划问题求解。相对于高阶多项式、样条插值等方式,该方法能够以较少的节点获得平坦输出高精度近似;相对于标准 Chebyshev 伪谱法,该方法能有效改善微分矩阵的病态特性,有利于提高平坦输出高阶导数的近似精度<sup>[9]</sup>。

#### (1) 时域变换

映射 Chebyshev 伪谱法的插值节点分布在区间  $[-1, 1]$  上,因此通过式(17)所示变换将姿态机动的时间区间映射到闭区间  $[-1, 1]$  上:

$$\lambda = 2(t - t_0) / (t_f - t_0) - 1, t \in [t_0, t_f] \quad (17)$$

#### (2) 平坦输出近似

映射 CGL 点  $\lambda_k (k=0, \dots, N)$  定义为:

$$\lambda_k = g(\tau_k, \alpha) = \text{asin}(\alpha \tau_k) / \text{asin} \alpha \quad (18)$$

式中  $0 \leq \alpha < 1$  为 Kosloff-Tal-Eaer 共形映射参数,  $\tau_k$  为第 II 类标准 CGL 节点:

$$\tau_k = \cos(\pi k / N) \quad (19)$$

共形映射的一对一以及充分光滑特性有效保持了 Chebyshev 伪谱法的收敛特性,且共形映射引入的舍入误差  $\varepsilon$  与参数  $\alpha, N$  间存在下列关系:

$$\alpha = \text{sech}(|\ln \varepsilon| / N) \quad (20)$$

当舍入误差  $\varepsilon$  与机器误差一致时,可有效降低共形映射引入的误差。

值得注意的是,映射 CGL 点相对于标准 CGL 点更趋于均匀分布;若直接采用传统 Lagrange 插值技术近似平坦输出,将可能产生龙格现象,因此,此处采用重心有理 Lagrange 插值技术。记平坦输出  $\zeta_i$  在映射 CGL 点处的取值为  $\zeta_i(\lambda_k) (i=1 \dots m; k=0, 1 \dots N)$ ,则平坦输出近似表达式为:

$$\begin{aligned} \zeta_i(\lambda) &\approx \bar{\zeta}_i^N(\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{\omega_k^{\text{bary}} \zeta_i(\lambda_k)}{\lambda - \lambda_k} / \sum_{k=0}^N \frac{\omega_k^{\text{bary}}}{\lambda - \lambda_k} \end{aligned} \quad (21)$$

式中  $\omega_k^{\text{bary}} (k=0, 1, \dots, N)$  为映射 CGL 点  $\lambda_k$  的重心权重:

$$\begin{cases} \omega_0^{\text{bary}} = \frac{1}{2}, \omega_N^{\text{bary}} = \frac{(-1)^N}{2} \\ \omega_k^{\text{bary}} = (-1)^k (k=1, \dots, N-1) \end{cases} \quad (22)$$

#### (3) 平坦输出导数近似

平坦输出在映射 CGL 点处的导数也可以写成微分矩阵乘积的形式:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_i(\lambda_k) \approx \dot{\bar{\zeta}}_i^N(\lambda_k) = \sum_{j=0}^N \bar{D}_{ij} \zeta_i(\lambda_j) \\ \ddot{\zeta}_i(\lambda_k) \approx \ddot{\bar{\zeta}}_i^N(\lambda_k) = \sum_{j=0}^N \bar{D}_{ij}^{(2)} \zeta_i(\lambda_j) \end{cases} \quad (23)$$

式中  $\bar{D}_{ij}$  和  $\bar{D}_{ij}^{(2)}$  分别为  $(N+1) \times (N+1)$  维的一阶、二阶映射 Chebyshev 微分矩阵:

若  $i \neq j$ ,

$$\begin{cases} \bar{D}_{ij} = \frac{\omega_j^{\text{bary}} / \omega_i^{\text{bary}}}{\lambda_i - \lambda_j} \\ \bar{D}_{ij}^{(2)} = -\frac{2\omega_j^{\text{bary}} / \omega_i^{\text{bary}}}{\lambda_i - \lambda_j} \left( \sum_{k \neq i} \frac{\omega_k^{\text{bary}} / \omega_i^{\text{bary}}}{\lambda_i - \lambda_k} - \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \right) \end{cases} \quad (24)$$

若  $i=j$ ,

$$\bar{D}_{ii} = -\sum_{k \neq i} \bar{D}_{ik}, \bar{D}_{ii}^{(2)} = -\sum_{k \neq i} \bar{D}_{ik}^{(2)} \quad (25)$$

#### (4) 目标函数近似

映射 Chebyshev 伪谱法采用 Clenshaw-Curtis 积分公式转换式(13)所示的积分型性能指标:

$$J \approx J^N = \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=0}^N \omega_k^c g'(\tau_k) \Lambda[\tilde{\zeta}(g(\tau_k))] \quad (26)$$

式中  $g'(\tau)$  为共形映射的一阶导数,  $\omega_k^c$  为 Clenshaw-Curtis 积分权重:

若  $N$  为偶数, 则:

$$\begin{cases} \omega_0^c = \omega_N^c = \frac{1}{N^2 - 1} \\ \omega_s^c = \omega_{N-s}^c = \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{N/2'} \frac{1}{1 - 4i^2} \cos \frac{2\pi is}{N} \end{cases} \quad (27)$$

式中  $s=1, \dots, N/2$ .

若  $N$  为奇数, 则:

$$\begin{cases} \omega_0^c = \omega_N^c = \frac{1}{N^2} \\ \omega_s^c = \omega_{N-s}^c = \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{(N-1)/2'} \frac{1}{1 - 4i^2} \cos \frac{2\pi is}{N} \end{cases} \quad (28)$$

式中  $s=1, \dots, (N-1)/2$ , 求和符号上方的两撇表示首末两项表达式应除以 2.

综上, 采用映射 Chebyshev 伪谱法参数化平坦输出, 微分平坦变换所得最优问题式(13)~(16)可以转换为如下非线性规划问题: 确定平坦输出在映射 CGL 点处的取值  $\zeta(\lambda_k)$  ( $k=0 \dots N$ ) 以及终端时刻  $t_f$ , 使得式(26)所示性能指标最小, 同时满足边界条件、控制输入饱和与空间指向约束:

$$B(\zeta(-1), t_0; \zeta(1), t_f) = 0 \quad (29)$$

$$\Gamma_{ui}(\zeta(\lambda_k), t) \leq u_{\max}, (i=1, 2, 3) \quad (30)$$

$$C(\zeta(\lambda_k), t) \leq C_{\max} \quad (31)$$

通过序列二次规划等数值方法求得平坦输出最优解后, 代入状态和控制变量关于平坦输出的表达式, 即式(10)和(12)中, 即可获得姿态机动规划问题的最优解.

### 3 仿真分析

假设空间飞行器的转动惯量矩阵  $I = \text{diag}\{66.36, 61.80, 50.16\} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 最大控制输入力矩为  $1 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 初始和终端时刻姿态欧拉角分别为  $[\pi/3, \pi/4, -\pi/3]^T$  和  $[-\pi/3, -\pi/4, \pi/4]^T$ , 姿态角速度均为零. 太阳光线在惯性坐标系中的方向矢量  $r_l = [0, -1, 0]^T$ , 传感器在空间飞行器本体系下的方向矢量  $r_b = [0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]^T$ , 姿态机动过程中

传感器空间指向约束角为  $\pi/4$ . 要求空间飞行器利用 100s 时间由初始姿态调整到期望姿态, 并使得所消耗的能量最省.

通过微分平坦理论对问题进行处理, 并采用映射 Chebyshev 伪谱法参数化平坦输出, 其中 Chebyshev 多项式阶次  $N$  和舍入误差  $\varepsilon$  分别取为 32 和  $1.0 \times 10^{-6}$ , 则共形映射参数  $\alpha$  为 0.9135, 共有决策变量 99 个. 对最终转换所得非线性规划问题, 调用 MATLAB® 软件中的 *fmincon* 函数进行求解, 其参数 TolFun, TolX 和 TolCon 均设置为  $1.0 \times 10^{-6}$ . 对于决策变量的初始猜测值, 即平坦输出在映射 CGL 点处取值, 通过样条插值边界条件获得. *fmincon* 函数经 246 次迭代计算, 规划所得能量最省机动路径对应的欧拉角、角速度和控制输入分别如图 1~3 所示, 图中圆圈表示相应变量在映射 CGL 点处的取值, 实线为经重心有理 Lagrange 插值获得的相应变量随时间变化关系. 式(5)所示目标函数取值为 0.2607.

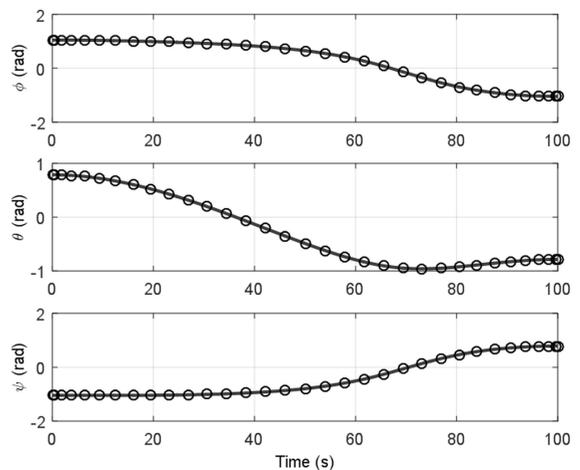


图1 欧拉角-时间曲线

Fig.1 Time histories of Euler angles

为验证微分平坦方法性能, 基于开源优化软件 GPOPS, 运用 Radau 伪谱法对相同配置的问题进行求解, 其中配点数同样为 32, 计算网格固定<sup>[10]</sup>. 值得说明的是, GPOPS 调用商业软件包 SNOPT 求解 Radau 伪谱法转换所得非线性规划问题. 两种方法的性能对比如表 1 所示, 显然微分平坦方法有效减少了决策变量数量, 且迭代优化的次数大幅降低. 运用 GPOPS 规划所得轨迹与微分平坦法规划结果的差异水平如图 4~6 所示, 两者差值的数量级达到  $1.0 \times 10^{-4}$  以上. 由此可见, 基于微分平坦的姿态机动规划方法有效降低了规划空间的维度, 有利于规划效率的提高.

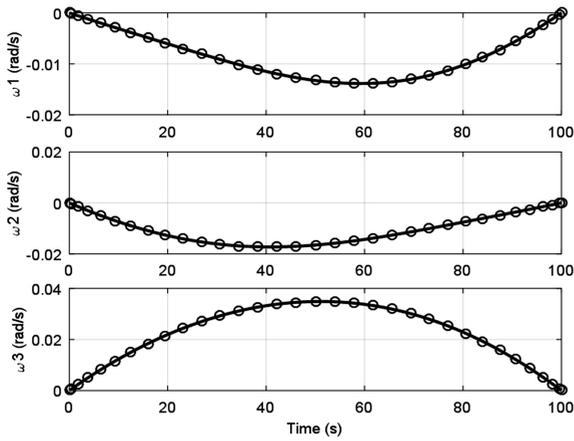


图2 角速度-时间曲线

Fig.2 Time histories of angle velocity

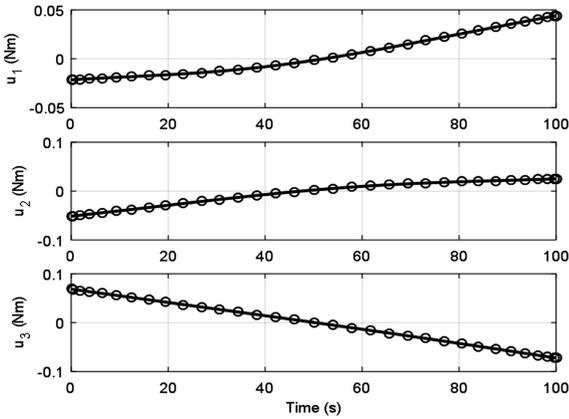


图3 控制输入-时间曲线

Fig.3 Time histories of control inputs

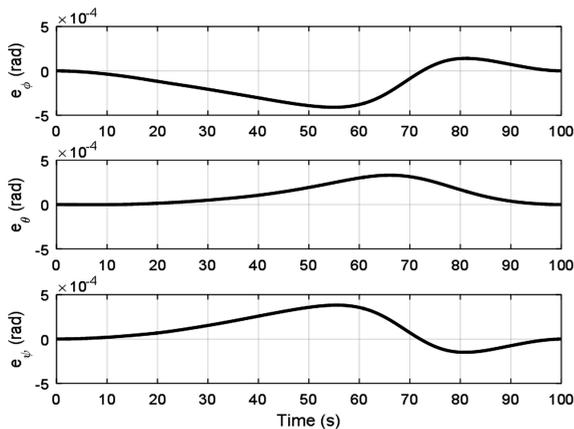


图4 欧拉角差异

Fig.4 Errors of the Euler angles

表1 两种方法性能对比

Table 1 Performance comparison of the two methods

| Method          | Number of decision variables | Number of iterations | Objective function |
|-----------------|------------------------------|----------------------|--------------------|
| Radau           | 294                          | 470                  | 0.2607             |
| Proposed method | 99                           | 246                  | 0.2607             |

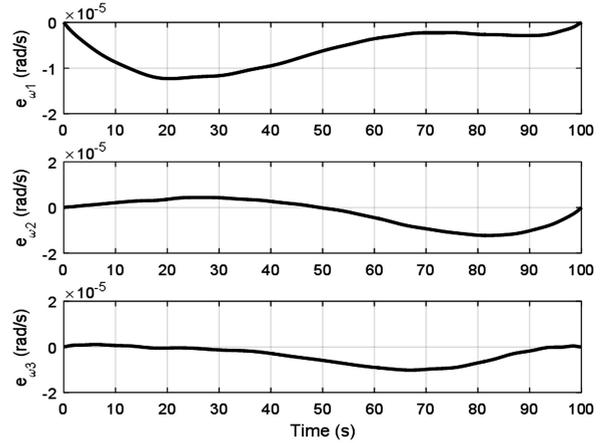


图5 角速度差异

Fig.5 Errors of the angle velocity

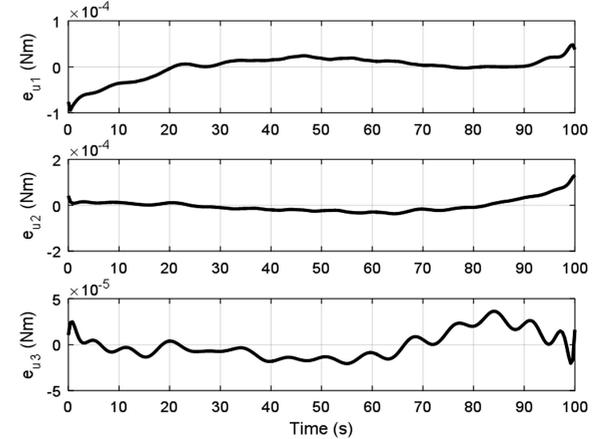


图6 控制输入差异

Fig.6 Errors of the control inputs

## 4 小结

本文研究了控制输入饱和、空间指向受限等多约束条件下的空间飞行器姿态机动规划问题,提出基于微分平坦理论的规划方法,将问题映射到平坦输出空间,在消除微分约束的同时降低了规划空间的维度;给出了平坦输出参数化的映射 Chebyshev 伪谱法,最终转换为非线性规划问题求解.数值仿真验证了本文方法的计算性能,对工程应用具有一定参考价值.值得说明的是,文中采用欧拉角描述空间飞行器姿态,其在大角度姿态机动情况下存在奇异问题,因此本文方法解决以四元数、修正罗德里格斯参数等描述的姿态机动规划问题是需要进一步研究的内容.

## 参考文献

- 迭代规划方法. 宇航学报, 2016, 37(6): 671~678 (Wu C Q, Xu R. Spacecraft attitude maneuver path iterative planning method under nonconvex quadratic constraints. *Journal of Astronautics*, 2016, 37(6): 671~678 (in Chinese))
- 2 赵乾. 考虑力矩陀螺奇异与饱和的空间站姿态机动控制策略与路径规划[博士学位论文]. 长沙: 国防科技大学, 2015 (Zhao Q. Study on space station attitude maneuver control strategy and path planning considering saturation and singularity of control moment gyroscopes [Ph.D Thesis]. Changsha: National University of Defense Technology, 2015 (in Chinese))
- 3 丰志伟, 张永合. 基于路径规划的敏捷卫星姿态机动反馈控制方法. 国防科技大学学报, 2013, 35(4): 1~6 (Feng Z W, Zhang Y H. Feedback control method for attitude maneuver of agile satellite based on trajectory optimization. *Journal of National University of Defense Technology*, 2013, 35(4): 1~6 (in Chinese))
- 4 Chamseddine A, Zhang Y, Rabbath C A, et al. Flatness-based trajectory planning/replanning for a quadrotor unmanned aerial vehicle. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2012, 48(4): 2832~2848
- 5 Deittert M, Richards A, Toomer C A, et al. Engineless unmanned aerial vehicle propulsion by dynamic soaring. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2009, 32(5): 1446~1457
- 6 庄宇飞. 带有非完整约束的欠驱动航天器控制方法研究[博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012 (Zhuang Y F. Control of underactuated spacecraft with nonholonomic constraints [Ph.D Thesis]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2012)
- 7 Ross I M, Fahroo F. Pseudospectral methods for optimal motion planning of differentially flat systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(8): 1410~1413
- 8 Fliess M. Flatness and Defect of Nonlinear Systems: Introductory Theory and Examples. *International Journal of Control*, 1995, 61(6): 1327~1361
- 9 Cai W W, Zhu Y W, Yang L P. Optimal guidance for hypersonic reentry using inversion and receding horizon control. *Let Control Theory & Applications*, 2015, 9(9): 1347~1355
- 10 Rao A V, Benson D A, Darby C, et al. Gpops, a Matlab Software for Solving Multiple-Phase Optimal Control Problems Using the Gauss Pseudospectral Method. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2010, 37(2): 1~39

## DIFFERENTIALLY FLAT METHOD OF ATTITUDE MANEUVER TRAJECTORY PLANNING FOR SPACE VEHICLES UNDER MULTIPLE CONSTRAINTS\*

Cai Weiwei<sup>1†</sup> Zhu Yanwei<sup>1</sup> Zeng Pu<sup>2</sup>

(1. College of Aeronautics and Astronautics, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(2. College of Military Education and Training, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** Considering the complex constraints like the performance of the actuators and the spatial pointing of the sensors, this paper studies the attitude maneuver trajectory planning problem for the space vehicles. The attitude maneuvering trajectory planning model was developed, and then mapped into the so-named flat output space via the differentially flat theory, eliminating the differential constraints and decreasing the design dimension. The pseudospectral method was utilized to parameterize the flat outputs, and the conformal map and barycentric rational interpolation techniques were introduced to improve the ill-conditioning of the differential matrix such that the trajectory planning accuracy could be enhanced. Numerical simulation eventually verifies that the attitude maneuver trajectory under various constraints could be planned efficiently via the proposed method, providing some reference for the engineering application.

**Key words** attitude maneuver, differentially flat, conformal map, Chebyshev pseudospectral method

Received 2 September 2016, revised 21 March 2017.

\* The project supported by the Aeronautical Science Foundation of China (2016ZC88007) and Hunan Natural Science Foundation (2017JJ3360).

† Corresponding author E-mail: tsaiweiwei@hotmail.com