

基于 Hermite 插值的多体系统动力学离散变分方法*

张冰冰¹ 王刚¹ 丁洁玉^{2,3†}

(1.青岛大学计算机科学技术学院, 青岛 266071) (2.青岛大学数学与统计学院, 青岛 266071)

(3.青岛大学计算力学与工程仿真研究中心, 青岛 266071)

摘要 针对多体系统动力学数值仿真问题,研究基于 Hermite 插值的离散变分方法.首先对广义坐标和广义速度进行 Hermite 插值,结合 Gauss 数值积分方法,利用 Hamilton 原理和离散力学变分原理,建立了含已知导数信息和含未知导数信息的 Hermite 插值离散变分数学模型,求解得到精确度较高的动力学仿真结果.该方法可以在步长较大时精确保持约束方程,并保持系统总能量在一定范围内有界变化,适用于长时间仿真情况.

关键词 多体系统动力学, 离散变分方法, Hermite 插值, 高斯求积

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-010

引言

多体系统动力学仿真目前已成为工程仿真的重要内容之一,在机械、航天、车辆、机器人学及生物力学等领域均有广泛应用.目前多体系统动力学仿真算法主要分为两个方向,一是对动力学方程进行离散求解,如 Runge-Kutta 方法、Newmark 方法、HHT 方法、广义- α 方法和辛算法等,二是对 Lagrange 函数进行离散,利用离散力学变分原理,得到离散方程进行求解,称为离散变分方法.

离散变分方法基本框架最早由 Marsden 等^[1]建立,对于受完整约束的保守系统,该方法能使辛-能量-动量均得到保持,其中能量是在一定误差范围内有界变化.这类方法提出之后很快在非光滑系统、非完整约束系统、随机系统等动力学领域得到应用^[2-4].Ober-Blöbaum 等^[5]基于 Galerkin 方法给出了无约束动力学系统高阶离散变分方法.潘振宽和丁洁玉等^[6,7]给出了完整约束和非完整约束多体系统动力学高阶离散变分方法.高强等^[8]采用了微分-代数方程求解的雷同策略,只在离散区段内满足无约束的积分,而在离散节点处则用约束冲量(Lagrange 乘子向量)让轨道发生转折,给出了非完整约束动力系统的离散积分格式.白龙等^[9]研究了基于球摆模型的离散变分积分分子算法.夏丽莉

等^[10]给出了离散 Hamilton 系统的差分方程和辛格式.目前该类方法的研究主要为基于李群方法以及不连续 Galerkin 方法的离散变分方法^[11,12].

离散变分方法的精度依赖于变量离散及相关的数值求积方法,变量离散主要采用 Lagrange 插值多项式,数值积分主要采用 Gauss 求积公式.拉格朗日插值在插值节点较多时存在 Runge 现象,影响插值精度,潘坤等^[13]采用重心拉格朗日插值,讨论了均匀节点与非均匀节点情况.本文考虑导数信息,对广义坐标和广义速度进行 Hermite 插值离散,讨论基于 Hermite 插值的多体系统动力学离散变分方法.

1 离散变分数学模型

通常情况下,多体系统动力学 Lagrange 函数可以表示为:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}, t) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{q}(t) \in R^n$ 为广义坐标, $\dot{\mathbf{q}}(t) \in R^n$ 为广义速度, $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in R^{n \times n}$ 为广义质量矩阵, $U(\mathbf{q}, t)$ 为系统势能,包括重力势能和弹性势能等.

对于完整约束多体系统,其 Hamilton 作用量可以表达为:

$$S = \int_0^T (L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t)) dt \quad (2)$$

2017-9-20 收到第 1 稿,2017-11-21 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(11472143,11772166)

† 通讯作者 E-mail: djy@qdu.edu.cn

其中 $\boldsymbol{\lambda} \in R^m$ 为 Lagrange 乘子, $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) \in R^m$ 为完整约束函数.

在多体系统动力学数值仿真中,离散变分方法是先对 Hamilton 作用量进行数值离散,然后利用离散变分原理得到离散欧拉-拉格朗日方程.

将仿真时间 $[0, T]$ 划分为若干小区间 $[t_i, t_{i+1}]$, $i=0, 1, \dots, N$, 假设 $\boldsymbol{q}_d(t)$, $\dot{\boldsymbol{q}}_d(t)$ 是广义坐标和广义速度在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上的离散形式, 则离散 Hamilton 作用量为:

$$\begin{aligned} S_d &= \sum_{i=0}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} (L(\boldsymbol{q}_d, \dot{\boldsymbol{q}}_d, t) - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t)) dt \\ &= \sum_{i=0}^N \left(\sum_{j=0}^M A_j L(\boldsymbol{q}_d(t_{ij}), \dot{\boldsymbol{q}}_d(t_{ij}), t_{ij}) - \boldsymbol{\lambda}_i^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}_i, t_i) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $A_j, j=0, 1, \dots, M$ 为数值积分系数, t_{ij} 为区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 的求积节点, $i=0, 1, \dots, N, j=0, 1, \dots, M$.

通常, $\boldsymbol{q}_d(t)$, $\dot{\boldsymbol{q}}_d(t)$ 可以表达为 $[t_i, t_{i+1}]$ 中若干点处函数值 $\boldsymbol{q}_{i,1}, \dots, \boldsymbol{q}_{i,s}$ 的插值函数, 例如 Lagrange 插值多项式等. 利用离散变分原理, 对离散 Hamilton 作用量泛函变分求极值可以得到关于 $\boldsymbol{q}_{i,1}, \dots, \boldsymbol{q}_{i,s}$, $i=0, 1, \dots, N$ 的离散欧拉-拉格朗日方程, 即为多体系统动力学离散变分数学模型.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^M A_j \left(D_1 L(\boldsymbol{q}_{i,1}, \dots, \boldsymbol{q}_{i,s}, t_{i,j}) \right. \\ \quad \left. + D_s L(\boldsymbol{q}_{i-1,1}, \dots, \boldsymbol{q}_{i-1,s}, t_{i-1,j}) \right) \\ - \boldsymbol{\Phi}_q^T(\boldsymbol{q}_i, t_i) \boldsymbol{\lambda}_i = 0 \\ \sum_{j=1}^M A_j D_k L(\boldsymbol{q}_{i,1}, \dots, \boldsymbol{q}_{i,s}, t_{i,j}) = 0, k = 2, \dots, s-1 \\ \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}_i, t_i) = 0 \\ i = 0, 1, \dots, N \end{cases} \quad (4)$$

利用初始条件 $\boldsymbol{q}(0)$, $\dot{\boldsymbol{q}}(0)$, 对方程(4)求解可得广义坐标离散值, 从而实现多体系统动力学数值仿真.

2 广义坐标和速度的 Hermite 插值

在区间 $[t_i, t_{i+1}]$, $i=0, 1, \dots, N$ 上对广义坐标 $\boldsymbol{q}(t)$ 和广义速度 $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ 进行插值可以使用不同的插值方法, 由于初始速度已知, 所以插值时可以利用速度信息, 即使用含导数的 Hermite 插值.

2.1 含已知导数值的 Hermite 插值

采用逐步求解方法, 在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上左端点

处 $\boldsymbol{q}(t_i)$, $\dot{\boldsymbol{q}}(t_i)$ 已知, 可以构造 s 点 s 次 Hermite 插值函数, $\boldsymbol{q}_{i,1}, \dots, \boldsymbol{q}_{i,s}$ 为 s 个插值点广义坐标, $\boldsymbol{q}_{i,1} = \boldsymbol{q}(t_i)$, $\dot{\boldsymbol{q}}_{i,1} = \dot{\boldsymbol{q}}(t_i)$.

$$\boldsymbol{q}_d(t) = \sum_{k=1}^s \boldsymbol{\alpha}_k(t) \boldsymbol{q}_{i,k} + \boldsymbol{\beta}(t) \dot{\boldsymbol{q}}_{i,1} \quad (5)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d(t) = \sum_{k=1}^s \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k(t) \boldsymbol{q}_{i,k} + \dot{\boldsymbol{\beta}}(t) \dot{\boldsymbol{q}}_{i,1} \quad (6)$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_k(t)$, $k=1, \dots, s$ 和 $\boldsymbol{\beta}(t)$ 可以由 s 点牛顿插值多项式加上一个 s 次项, 由已知导数值求解出待定系数得到.

为计算方便, 进行变量替换, 取 $\tau = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}$, 则 $\tau \in [0, 1]$,

$$\boldsymbol{q}_d(\tau) = \sum_{k=1}^s \boldsymbol{\alpha}_k(\tau) \boldsymbol{q}_{i,k} + \boldsymbol{\beta}(\tau) \dot{\boldsymbol{q}}_{i,1} \quad (7)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d(\tau) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^s \boldsymbol{\alpha}'_k(\tau) \boldsymbol{q}_{i,k} + \boldsymbol{\beta}'(\tau) \dot{\boldsymbol{q}}_{i,1} \quad (8)$$

当 $s=3$ 时, 三点三次 Hermite 插值函数中,

$$\boldsymbol{\alpha}_1(\tau) = 1 - 2\tau + 2\tau \left(\tau - \frac{1}{2} \right) + 2\tau \left(\tau - \frac{1}{2} \right) (\tau - 1)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2(\tau) = 2\tau - 4\tau \left(\tau - \frac{1}{2} \right)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3(\tau) = 2\tau \left(\tau - \frac{1}{2} \right) - 2\tau \left(\tau - \frac{1}{2} \right) (\tau - 1)$$

$$\boldsymbol{\beta}(\tau) = 2h\tau \left(\tau - \frac{1}{2} \right) (\tau - 1) \quad (9)$$

其插值余项为:

$$\boldsymbol{q}(\tau) - \boldsymbol{q}_d(\tau) = \frac{\boldsymbol{q}^{(4)}(\xi)}{4!} \tau^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) (\tau - 1), \xi \in [0, 1] \quad (10)$$

使用 s 点 s 次 Hermite 插值函数, 求解离散欧拉-拉格朗日方程(4), 可以求得 $\boldsymbol{q}_{i,2}, \dots, \boldsymbol{q}_{i,s}$, 如果 $\boldsymbol{q}_{i,s} = \boldsymbol{q}(t_{i+1})$, 则直接可得 $\boldsymbol{q}(t_{i+1})$, 否则由式(7)可得 $\boldsymbol{q}(t_{i+1}) = \boldsymbol{q}_d(1)$.

2.2 含未知导数值的 Hermite 插值

若将插值点处的导数值都考虑在内, 可以在区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上构造 $\boldsymbol{q}(t)$, $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ 的 s 点 $2s-1$ 次 Hermite 插值函数, $\boldsymbol{q}_{i,1}, \dots, \boldsymbol{q}_{i,s}$ 为 s 个插值点广义坐标, $\dot{\boldsymbol{q}}_{i,1}, \dots, \dot{\boldsymbol{q}}_{i,s}$ 为广义速度, $\boldsymbol{q}_{i,1} = \boldsymbol{q}(t_i)$, $\dot{\boldsymbol{q}}_{i,1} = \dot{\boldsymbol{q}}(t_i)$.

$$\boldsymbol{q}_d(t) = \sum_{k=1}^s (\boldsymbol{\alpha}_k(t) \boldsymbol{q}_{i,k} + \boldsymbol{\beta}_k(t) \dot{\boldsymbol{q}}_{i,k}) \quad (11)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d(t) = \sum_{k=1}^s (\dot{\boldsymbol{\alpha}}_k(t) \boldsymbol{q}_{i,k} + \dot{\boldsymbol{\beta}}_k(t) \dot{\boldsymbol{q}}_{i,k}) \quad (12)$$

其中,

$$\begin{aligned}\alpha_k(t) &= (1-2(t-t_{i,k})\dot{l}_k(t_{i,k}))l_k^2(t) \\ \beta_k(t) &= (t-t_{i,k})\dot{l}_k^2(t), \\ k &= 1, \dots, s\end{aligned}\quad (13)$$

$l_k(t), \dot{l}_k(t)$ 为 Lagrange 插值基函数及其导函数。

为计算方便,进行变量替换,取 $\tau = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}$, 则

$\tau \in [0, 1]$,

$$\mathbf{q}_d(\tau) = \sum_{k=1}^s (\alpha_k(\tau)\mathbf{q}_{i,k} + \beta_k(\tau)\dot{\mathbf{q}}_{i,k}) \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_d(\tau) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^s (\alpha_k'(\tau)\mathbf{q}_{i,k} + \beta_k(\tau)\dot{\mathbf{q}}_{i,k}) \quad (15)$$

当 $s=2$ 时,两点三次 Hermite 插值函数中,

$$\begin{aligned}\alpha_1(\tau) &= (1+2\tau)(\tau-1)^2 \\ \alpha_2(\tau) &= (3-2\tau)\tau^2 \\ \beta_1(\tau) &= h\tau(\tau-1)^2 \\ \beta_2(\tau) &= h(\tau-1)\tau^2\end{aligned}\quad (16)$$

其插值余项为:

$$\mathbf{q}(\tau) - \mathbf{q}_d(\tau) = \frac{\mathbf{q}^{(4)}(\xi)}{4!} \tau^2 (\tau-1)^2, \xi \in [0, 1] \quad (17)$$

使用 s 点 $2s-1$ 次 Hermite 插值函数,求解离散欧拉-拉格朗日方程(4),可以求得 $\mathbf{q}_{i,2}, \dots, \mathbf{q}_{i,s}, \dot{\mathbf{q}}_{i,2}, \dots, \dot{\mathbf{q}}_{i,s}$, 如果 $\mathbf{q}_{i,s} = \mathbf{q}(t_{i+1})$, 则直接可得 $\mathbf{q}(t_{i+1})$, 否则,由式(14)可得 $\mathbf{q}(t_{i+1}) = \mathbf{q}_d(1)$ 。

3 数值算例

图1为平面双连杆机械臂,设杆1的质量为 $m_1 = 1\text{kg}$, 质心坐标为 (x_1, y_1) , 杆长为 $l_1 = 1\text{m}$; 杆2的质量为 $m_2 = 2\text{kg}$, 质心坐标为 (x_2, y_2) , 杆长为 $l_2 = \sqrt{3}\text{m}$ 。

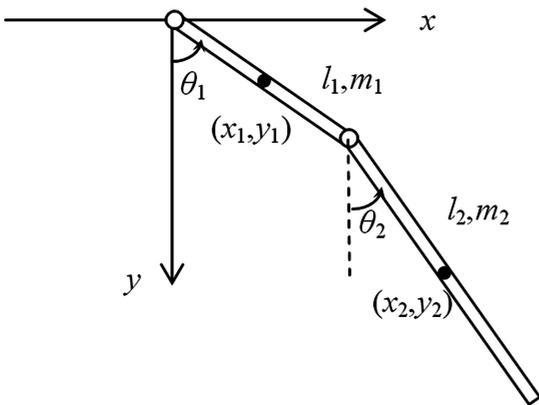


图1 双连杆平面机械臂

Fig.1 Two-link planar manipulator

选取广义坐标为 $\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \ \theta_1 \ x_2 \ y_2 \ \theta_2]^T$, 则 Lagrange 函数为:

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}m_1(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(x_2^2 + y_2^2) + \\ &\quad \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 - m_1gy_1 - m_2gy_2\end{aligned}\quad (18)$$

约束方程为:

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{l_1}{2}\cos\theta_1 \\ y_1 - \frac{l_1}{2}\sin\theta_1 \\ x_2 - \frac{l_2}{2}\cos\theta_2 - x_1 - \frac{l_1}{2}\cos\theta_1 \\ y_2 - \frac{l_2}{2}\sin\theta_2 - y_1 - \frac{l_1}{2}\sin\theta_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (19)$$

设仿真时间为 20s, 将时间区间 $[0, 20]$ 按步长 $h=0.01$ 等分, 在每个小区间上对广义坐标 $\mathbf{q}(t)$ 进行三点三次 Hermite 插值, 仿真结果如图 2-5 所示。

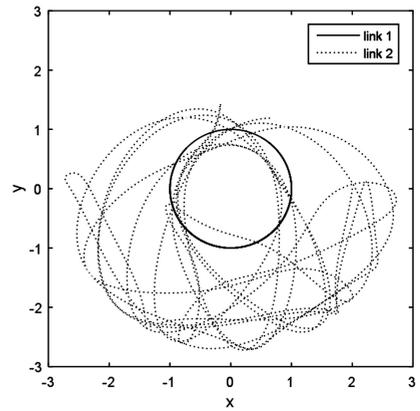


图2 两连杆末端运动轨迹, $t=20\text{s}$

Fig.2 Trajectories of the ends of two links when $t=20\text{s}$

图2和图3给出了使用三点三次 Hermite 插值得到的两连杆末端运动轨迹以及位移时间历程, 可以看到连杆运动过程稳定, 没有出现偏移误差。而如果使用 4 阶 Runge-Kutta 方法对系统动力学方程进行数值仿真, 在时间步长 $h=0.01$ 时的运动轨迹如图 6 所示, 可以看出杆 1 的轨迹已经出现偏移。这种现象在长时间仿真情况中表现比较明显, 如图 7 所示, 当仿真时间为 100s 时, 误差积累已经非常严重, 以致于运动轨迹已经严重失真。而使用基于三点三次 Hermite 插值的离散变分方法, 在仿真时间 100s 时运动轨迹仍保持稳定, 如图 8 所示。

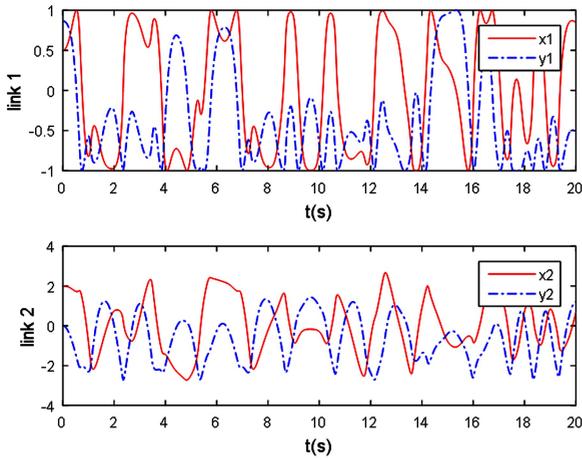


图 3 两连杆末端位移

Fig.3 Displacements of the ends of two links

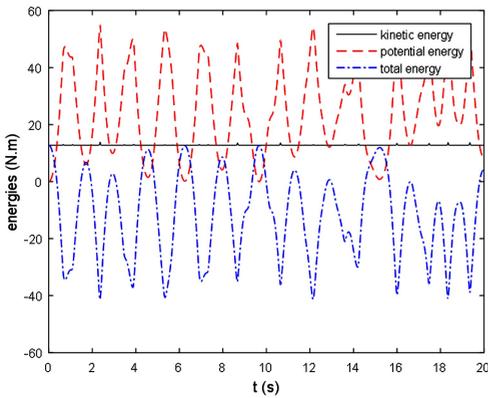


图 4 双连杆平面机械臂能量

Fig.4 Energies of the two-link planar manipulator

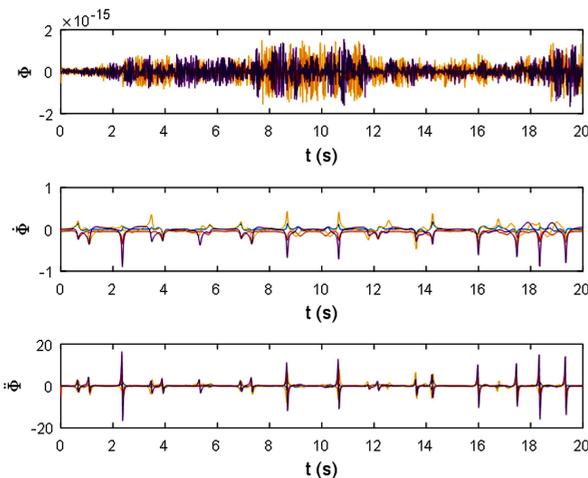


图 5 双连杆平面机械臂约束

Fig.5 Constraints of the two-link planar manipulator

使用两点三次 Hermite 插值同样可以保证长时间仿真实情况下的运动稳定,但是在仿真精度方面较三点三次 Hermite 插值结果稍有降低.具体结果

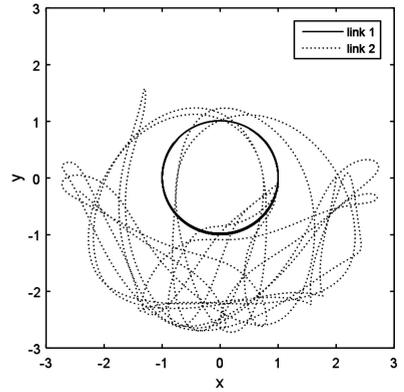


图 6 Runge-Kutta 法两连杆末端运动轨迹, $t=20s$

Fig.6 Trajectories of the ends of two links using Runge-Kutta method when $t=20s$

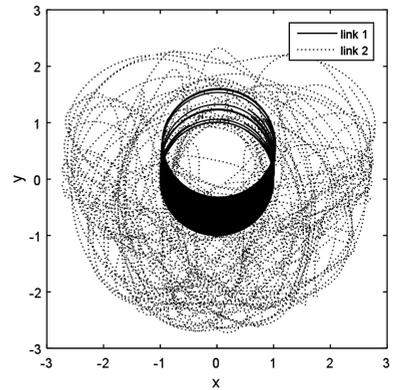


图 7 Runge-Kutta 法两连杆末端运动轨迹, $t=100s$

Fig.7 Trajectories of the ends of the two links using Runge-Kutta method when $t=100s$

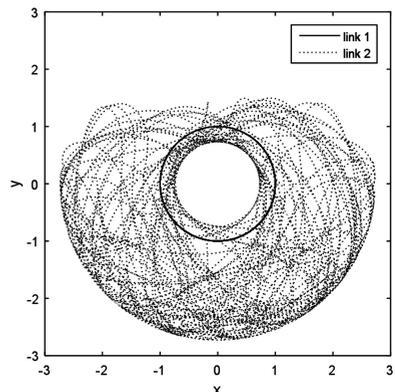


图 8 三点三次 Hermite 插值两连杆末端运动轨迹, $t=100s$

Fig.8 Trajectories of the ends of the two links using Hermite interpolation method when $t=100s$

比较见表 1 和表 2,其中 t_{CPU} 表示运行时间, $H=T+U$ 为系统总能量, $\varepsilon(H) = \max_{0 \leq i \leq n} |H(t_i) - H(0)|$ 为系统总能量最大误差, $\varepsilon(\Phi)$, $\varepsilon(\dot{\Phi})$, $\varepsilon(\ddot{\Phi})$ 为系统约束函数、速度级约束和加速度级约束最大误差.

H23G2 表示使用两点三次 Hermite 插值和两点高斯数值积分, H33G2 表示使用三点三次 Hermite 插值和两点高斯数值积分, RK4 表示使用 4 阶 Runge-Kutta 方法直接求解动力学方程, 仿真时间为 100s.

表 1 Hermite 插值离散变分方法和 Runge-Kutta 方法结果比较, $h=0.01$

Table 1 Comparison of the results from Hermite interpolation discrete variational method and Runge-Kutta method when $h=0.01$

Method	t_{CPU}	$\varepsilon(H)$	$\varepsilon(\Phi)$	$\varepsilon(\dot{\Phi})$	$\varepsilon(\ddot{\Phi})$
H23G2	7.2969	1.1540	3.2474×10^{-15}	0.8846	36.1570
H33G2	7.8438	1.0788	3.1364×10^{-15}	0.8962	16.6175
RK4	3.1563	30.1090	1.0209	0.0199	1.1369×10^{-13}

表 2 Hermite 插值离散变分方法和 Runge-Kutta 方法结果比较, $h=0.005$

Table 2 Comparison of the results from Hermite interpolation discrete variational method and Runge-Kutta method when $h=0.005$

Method	t_{CPU}	$\varepsilon(H)$	$\varepsilon(\Phi)$	$\varepsilon(\dot{\Phi})$	$\varepsilon(\ddot{\Phi})$
H23G2	14.8906	0.3552	6.2728×10^{-15}	0.4447	17.8491
H33G2	14.9375	0.2615	6.4670×10^{-15}	0.4473	8.1398
RK4	6.3281	1.6790	0.0569	0.0012	1.7053×10^{-13}

从表 1 和表 2 中可以看出, 基于两点三次和三点三次 Hermite 插值的仿真结果相差不大, 三点三次 Hermite 插值的结果精度稍高一些, 在加速度级约束误差中表现比较明显. 在相同步长情况下, Runge-Kutta 方法系统总能量误差较大, 在较大步长情况下尤为明显, 这是因为 Runge-Kutta 方法对步长有限制要求, 适用于较小步长情况. 对不同步长情况结果进行比较, $h=0.005$ 时, Runge-Kutta 方法的能量误差和运行时间与 $h=0.01$ 时基于 Hermite 插值的离散变分方法结果相当. 但是, 从时间历程图上可以进一步看出, Runge-Kutta 方法的能量误差随时间增加逐渐增大, 而离散变分方法能量误差能够保持在固定范围之内, 不随时间增加而增大, 如图 9 和图 10 所示.

4 结论

本文基于 Hermite 插值, 建立了含已知导数信息和含未知导数信息的多体系统动力学离散变分方程, 求解进行多体系统动力学仿真. 数值算例表明, 利用导数信息可以得到精确度较高的仿真结果. 在步长较大情况下, 其能量误差和约束误差均

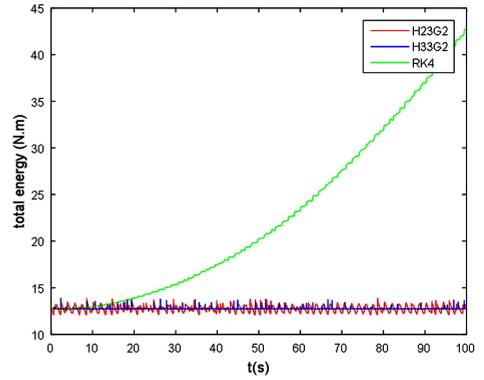


图 9 不同方法系统总能量, $h=0.01$

Fig.9 Total energies of the system using different methods when $h=0.01$

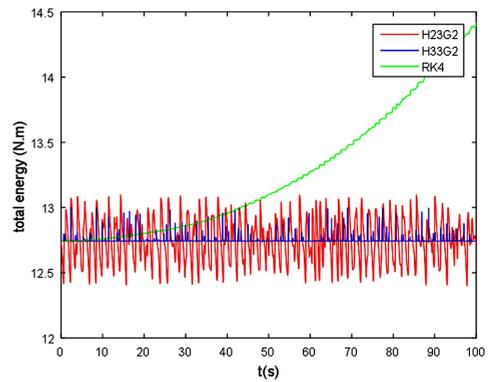


图 10 不同方法系统总能量, $h=0.005$

Fig.10 Total energies of the system using different methods when $h=0.005$

优于同步长的 Runge-Kutta 方法. 在长时间仿真情况下, 基于 Hermite 插值的离散变分方法可以保持系统总能量在一定范围内有界变化, 不会产生误差累积. 由于该方法模型中只含有约束方程, 因此结果对约束方程精确保持, 在速度级约束和加速度级约束中产生违约误差, 可以通过约束投影方法进行修正.

参考文献

- 1 Wendlandt J M, Marsden J E. Mechanical integrators derived from a discrete variational principle. *Physica D*, 1997, 106(3-4): 223~246
- 2 McLachlan R I, Perlmutter M. Integrators for non-holonomic mechanical systems. *Journal of Nonlinear Sciences*, 2006, 16(4): 283~328
- 3 Leyendecker S, Marsden J E, Ortiz M. Variational integrators for constrained dynamical systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, 88(9): 677~708
- 4 Bou-Rabee N, Owhadi H. Stochastic variational integrators. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2009, 29(2):

- 421~443
- 5 Ober-Blöbaum S, Saake N. Construction and analysis of higher order Galerkin variational integrators. *Advances in Computational Mathematics*, 2015, 41(6):955~986
 - 6 丁洁玉,潘振宽. 非完整约束多体系统时间离散变分积分法. *动力学与控制学报*, 2011, 9(4):289~292 (Ding J Y, Pan Z K. Time-discrete variational integrator for multibody dynamic systems with nonholonomic constraints. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(4):289~292 (in Chinese))
 - 7 Ding J Y, Pan Z K. Higher order variational integrators of multibody system dynamics with constraints. *Advances in Mechanical Engineering*, 2014:383680-1-8
 - 8 高强,钟万勰. 非完整约束动力系统的离散积分方法. *动力学与控制学报*, 2012, 10(3):193~198 (Gao Q, Zhong W X. Numerical algorithms of dynamic system with nonholonomic constraints. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, 10(3):193~198 (in Chinese))
 - 9 白龙,戈新生. 基于球摆模型的离散变分积分分子算法研究. *动力学与控制学报*, 2013, 11(4):295~300 (Bai L, Ge X S. The Discrete variational integrators method of the spherical pendulum. *Journal of Dynamics and Control*, 2013, 11(4):295~300 (in Chinese))
 - 10 夏丽莉,国忠金,张伟. 基于离散 Legendre 变换的 Hamilton 系统的变分算法和辛结构. *华中师范大学学报(自然科学版)*, 2017, 51(4):449~454 (Xia L L, Guo Z J, Zhang W. Variational calculation and symplectic structure of Hamiltonian systems based the discrete Legendre transformation. *Journal of Central China Normal University (Nature Science Edition)*, 2017, 51(4):449~454 (in Chinese))
 - 11 Hall J. Convergence of Galerkin variational integrators for vector spaces and Lie groups[Ph.D Thesis]. San Diego: Department of Mathematics University of California, 2013
 - 12 Muehlebach M, Heimsch T, Glocker C. Variational integrators—A continuous time approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, 109:1549~1581
 - 13 潘坤,丁洁玉,董贺威等. 基于重心插值的多体系统动力学离散变分方法. *青岛大学学报(自然科学版)*, 2017, 30(2):77~82 (Pan K, Ding J Y, Dong H W, et al. Discrete variational method of multi-body system dynamics based on center of gravity interpolation. *Journal of Qingdao University (Nature Science Edition)*, 2017, 30(2):77~82 (in Chinese))

DISCRETE VARIATIONAL METHOD OF MULTIBODY SYSTEM DYNAMICS BASED ON HERMITE INTERPOLATION*

Zhang Bingbing¹ Wang Gang¹ Ding Jieyu^{2,3†}

(1. College of Computer Science & Technology, Qingdao 266071, China)

(2. School of Mathematics and Statistics, Qingdao 266071, China)

(3. Center for Computational Mechanics and Engineering Simulation, Qingdao 266071, China)

Abstract The discrete variational method based on Hermite interpolation is studied for the simulation problem of multibody system dynamics. Hermite interpolation is carried out to interpolate the generalized coordinate and the generalized velocity, firstly. Then, using the Gauss numerical integral method, the Hamilton principle and discrete variational principles of mechanics, the discrete variational mathematical model based on the Hermite interpolation containing known and unknown derivative information is established. High accuracy simulation results is obtained by solving the presented discrete variational equations. This method can accurately maintain the constraint equations on the larger time step, and keep the total energy of the system in a certain range of bounded variation. Therefore, it can be applied for the long time simulation.

Key words multibody system dynamics, discrete variational method, Hermite interpolation, Gauss integration

Received 25 September 2017, revised 21 November 2017.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11472143,11772166).

† Corresponding author E-mail: djy@qdu.edu.cn