

# 多体系统动力学 Lie 群微分-代数方程约束稳定方法\*

李亚男<sup>1</sup> 李博文<sup>1</sup> 丁洁玉<sup>1,2†</sup> 潘振宽<sup>3</sup>

(1. 青岛大学数学与统计学院, 青岛 266071) (2. 青岛大学计算力学与工程仿真研究中心, 青岛 266071)

(3. 青岛大学计算机科学技术学院, 青岛 266071)

**摘要** 针对多体系统动力学微分-代数方程求解问题, 研究基于 Lie 群表达的约束稳定方法. 首先引入新的 Lagrange 乘子, 结合位移约束、速度级约束和加速度级约束方程, 构造了新的 Lie 群微分-代数方程. 然后使用向后差商隐式方法和 CG (Crouch-Grossman) 方法, 对微分-代数方程进行离散求解, 得到精确度较高的动力学仿真结果. 该方法在精确保持各级约束方程的同时, 保持旋转矩阵的正交性, 并且使系统总能量误差较小.

**关键词** 多体系统动力学, 微分-代数方程, Lie 群, 约束稳定

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-006

## 引言

多体系统动力学通常由微分-代数方程描述, 其数值积分方法的研究是计算多体系统动力学研究的重要内容. 该领域微分-代数方程求解的传统方法由常微分方程数值求解拓展而来, 研究的重点是通过约束稳定达到微分-代数方程求解的稳定<sup>[1,2]</sup>.

近年来逐渐发展起来的保结构几何数值积分方法<sup>[3]</sup>则通过保持连续系统尽量多的不变量以提高数值计算的稳定性, 如辛算法<sup>[4]</sup>、能量方法<sup>[5,6]</sup>, 及基于离散力学变分原理的能量、辛保持的变分数值积分方法<sup>[7,8]</sup>、Lie 群方法<sup>[9]</sup>等. 其中, Lie 群方法致力于保持物体姿态的特殊正交群特性, 而其他方法主要针对物体姿态的参数化表达, 如用经典的 Euler 角、Bryant 角等, 相应的算法不能保持物体姿态固有的 Lie 群特性.

直接用特殊正交群表达物体姿态可有效避免参数化表达导致的奇异性, 但由于群空间的非矢量特性, 传统的数值积分方法不能直接应用. Simo 等<sup>[10,11]</sup>较早提出在其矢量 Lie 代数上设计算法, 从而保持姿态矩阵的正交性, 以达到提高数值稳定性的目的. 相关基础论研究是指针对矩阵微分方程的 CG 方法<sup>[12]</sup>和 MKRK 方法<sup>[13]</sup>. 前者基于第二类正

则坐标, 即离散 Lie 代数矢量, 并已用于设计基于指标 3 的微分-代数方程的广义- $\alpha$  方法设计<sup>[14]</sup>. 后者基于第一类正则坐标, 即离散计算伪转动角度增量, 且被应用于指标 1 的微分-代数方程的 Runge-Kutta 方法设计<sup>[15]</sup>.

本文主要针对 Lie 群表达的多刚体系统动力学微分-代数方程指标 1、2 和 3 形式, 设计约束稳定方法, 使位移约束、速度级约束和加速度级约束同时精确保持, 从而提高仿真精度.

## 1 Lie 群表达的数学模型

设多体系统由  $n$  个刚体组成, 刚体的质心位置向量  $\mathbf{x}_i \in R^3$  和旋转矩阵  $\mathbf{R}_i \in R^{3 \times 3}$  构成广义坐标  $\mathbf{q}_i = (\mathbf{x}_i \ \mathbf{R}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 刚体运动速度可以表达为  $\mathbf{V}_i = (\mathbf{v}_i \ \boldsymbol{\Omega}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 其中  $\mathbf{v}_i \in R^3$  为平动速度,  $\boldsymbol{\Omega}_i \in R^3$  为角速度, 满足关系式  $\dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{R}_i \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i$ ,  $\mathbf{R}_i \in SO(3)$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i \in so(3)$  是  $\boldsymbol{\Omega}_i$  的反对称矩阵.

多体系统动力学方程可在 Lie 群空间表达为如下指标 3 微分-代数方程:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{v} \ \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}) \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{B}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{V}) \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{R}_1 \cdots \mathbf{R}_n)$ , 速度向量为列向量形式  $\mathbf{V}$

2017-9-20 收到第 1 稿, 2017-11-21 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金项目 (11472143, 11472144, 11772166)

† 通讯作者 E-mail: djy@qdu.edu.cn

$= [v^T \quad \Omega^T]^T, v = [v_1^T \cdots v_n^T]^T, \Omega = [\Omega_1^T \cdots \Omega_n^T]^T$ , 广义质量矩阵  $M = \text{diag}(m \quad J)$  为刚体质量和转动惯量构成的对角矩阵,  $m = \text{diag}(m_1 \cdots m_n), J = \text{diag}(J_1 \cdots J_n)$ , 广义力矢量为列向量形式  $Q(q, V) = [Q_1^T(q, V) \cdots Q_n^T(q, V)]^T$ , 其广义力分量  $Q_i(q, V) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{D}_i J_i \Omega_i \end{bmatrix} + Q_{ie}, i = 1, \cdots, n, Q_{ie}$  为广义外力矢量.

$\Phi(q) = [\Phi(q) \cdots \Phi(q)]^T = 0$  是完整约束方程,  $\lambda$  是 Lagrange 乘子,  $B(q)$  为约束方程的雅可比矩阵. 约束方程两边对时间求导可得:

$$\dot{\Phi}(q) = \Phi_x \dot{x} + \langle \Phi_R \quad \dot{R} \rangle \equiv B(q) V = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{\Phi}(q) \equiv B(q) \dot{V} + \dot{B}(q) V = 0 \quad (3)$$

利用方程(2)和方程(3), Lie 群表达的指标 2 和指标 1 微分-代数方程形式分别为:

$$\begin{cases} \dot{q} = (v \quad R \tilde{\Omega}) \\ M \dot{V} + B^T(q) \lambda = Q(q, V) \\ B(q) V = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{q} = (v \quad R \tilde{\Omega}) \\ M \dot{V} + B^T(q) \lambda = Q(q, V) \\ B(q) \dot{V} + \dot{B}(q) V = 0 \end{cases} \quad (5)$$

方程(1), (4)和(5)均只包含了约束方程、速度级约束方程或者加速度级约束方程, 使用不同的数值方法求解时只能精确保持一种约束方程. 为了在计算过程中同时保持三种约束方程使其不发生违约, 本文对上述微分-代数方程进行改进.

## 2 Lie 群微分-代数方程约束稳定方法

引入 Lagrange 乘子参数  $\mu, \omega$ , 构造新的 Lie 群表达微分-代数方程如下:

$$\begin{cases} \dot{q} = (v' \quad R \tilde{\Omega}') \\ V' = V - B^T(q) \mu \\ \dot{V}' = \dot{V} - B^T(q) \omega \\ M \dot{V}' + B^T(q) \lambda = Q(q, V') \\ \Phi(q) = 0 \\ B(q) V = 0 \\ B(q) \dot{V} + \dot{B}(q) V = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中  $V' = [v'^T \quad \Omega'^T]^T$ . 方程(6)同时包含了位移约束、速度级约束和加速度级约束方程, 求解过程中可以同时保持这三种约束稳定.

使用向后差商公式对  $q, \dot{V}'$  进行离散得:

$$v'^{k+1} = \frac{x^{k+1} - x^k}{h}, \dot{R}^{k+1} = \frac{R^{k+1} - R^k}{h} \quad (7)$$

$$\dot{v}'^{k+1} = \frac{v'^{k+1} - v'^k}{h}, \dot{\Omega}'^{k+1} = \frac{\Omega'^{k+1} - \Omega'^k}{h} \quad (8)$$

其中  $k = 1, 2, \cdots$  为迭代步数. 由于  $\dot{R}_i = R_i \tilde{\Omega}'_i, i = 1, \cdots, n$ , 由 CG 方法可得:

$$R^{k+1} = R^k \exp(h \dot{\Omega}'^{k+1}) \quad (9)$$

此时方程(6)离散为:

$$\begin{cases} V'^{k+1} - V'^k - B^T(q^{k+1}) \mu^{k+1} = 0 \\ \frac{1}{h} (V'^{k+1} - V'^k) - \dot{V}'^{k+1} - B^T(q^{k+1}) \omega^{k+1} = 0 \\ \frac{1}{h} M (V'^{k+1} - V'^k) + B^T(q^{k+1}) \lambda^{k+1} - Q(q^{k+1}, V'^{k+1}) = 0 \\ \Phi(q^{k+1}) = 0 \\ B(q^{k+1}) V'^{k+1} = 0 \\ B(q^{k+1}) \dot{V}'^{k+1} + \dot{B}(q^{k+1}) V'^{k+1} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中  $q^{k+1} = (x^{k+1} \quad R^{k+1}), V'^{k+1} = [(v'^{k+1})^T \quad (\Omega'^{k+1})^T]^T, \dot{V}'^{k+1} = [(\dot{v}'^{k+1})^T \quad (\dot{\Omega}'^{k+1})^T]^T, v'^{k+1}, \dot{v}'^{k+1}, \dot{\Omega}'^{k+1}, R^{k+1}$  由公式(7), (8), (9)得出.

由初始条件  $x^1, v^1, \Omega^1, R^1$  使用牛顿迭代方法迭代求解可以得到  $x^k, v^k, \Omega^k, k = 2, 3, \cdots$ , 从而由式(9)可得  $R^k, k = 2, 3, \cdots$ .

## 3 数值算例

图 1 为双连杆空间机械臂, 设杆 1 的质量为  $m_1 = 5\text{kg}$ , 质心坐标为  $(x_1, y_1, z_1)$ , 杆长为  $l_1 = 1\text{m}$ ; 杆 2 的质量为  $m_2 = 5\text{kg}$ , 质心坐标为  $(x_2, y_2, z_2)$ , 杆长为  $l_2 = 1\text{m}$ .

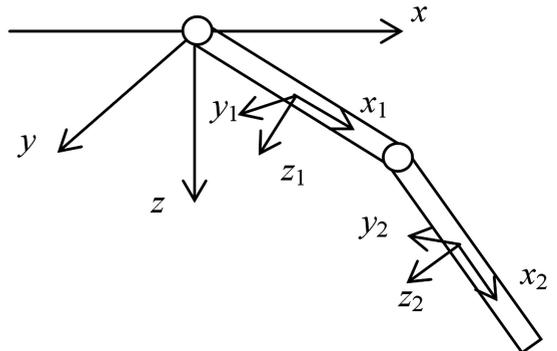


图 1 双连杆空间机械臂

Fig.1 Two-link space manipulator

取广义坐标为  $q_i = (x_i \quad R_i), x_i = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T, i$

$= 1, 2$ , 则广义质量矩阵为  $M_i = \text{diag}(m_i, J_i)$ ,  $m_i = \text{diag}(m_i, m_i, m_i)$ ,  $J_i = \text{diag}(J_{i1}, J_{i2}, J_{i3})$ ,  $i = 1, 2$ , 广义力矢量为  $Q_i(q, V) = [-m_i g - \tilde{\Omega}_i J_i \Omega_i]^T$ ,  $i = 1, 2$ ,  $g = [0 \ 0 \ 9.81]^T$ . 约束方程为:

$$\begin{aligned} \Phi_1(q) &= x_1 + R_1 X_{10} \\ \Phi_2(q) &= x_1 + R_1 X_{11} - x_2 - R_2 X_{21} \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $X_{10} = [-l_1/2 \ 0 \ 0]^T$ ,  $X_{11} = [l_1/2 \ 0 \ 0]^T$ ,  $X_{21} = [-l_2/2 \ 0 \ 0]^T$ .

给定初始值  $R_1(0) = E, R_2(0) = E, \Omega_1(0) = [10\pi \ 0 \ 0]^T, \Omega_2(0) = [10\pi \ 10\pi \ 20\pi]^T$ , 对双连杆空间机械臂动力学 Lie 群微分-代数方程使用约束稳定方法求解, 设仿真时间为 1s, 步长  $h = 0.00001$ , 仿真结果如图 2~7 所示.

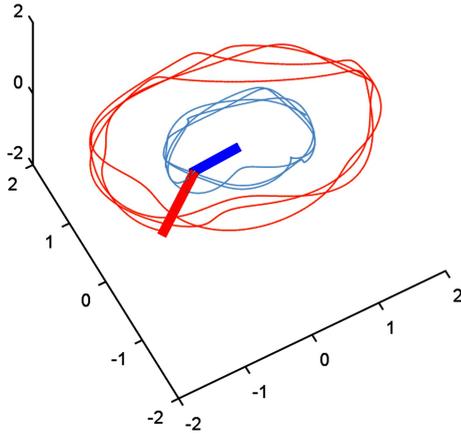


图 2 两连杆末端运动轨迹

Fig.2 Trajectories of the ends of the two links

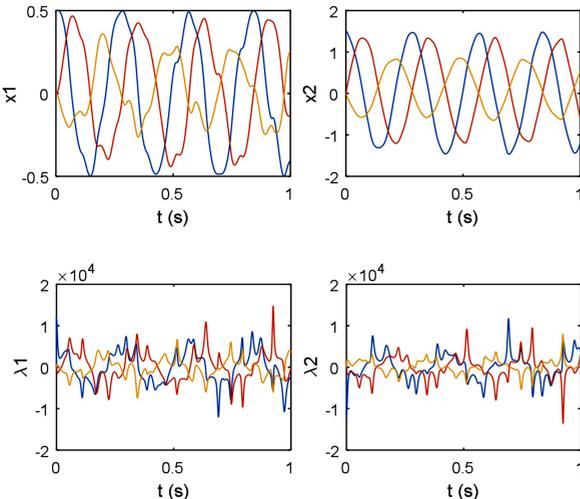


图 3 两连杆质心位置和 Lagrange 乘子

Fig.3 Displacements of the mass center of the two links and the Lagrange multipliers

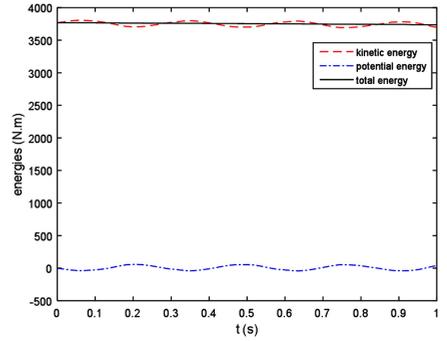


图 4 双连杆空间机械臂能量

Fig.4 Energies of the two-link space manipulator

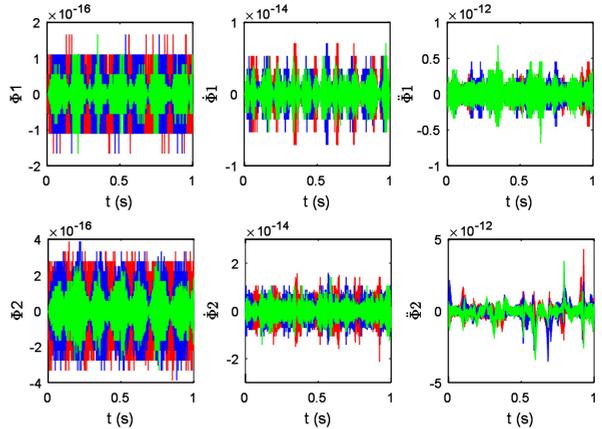


图 5 双连杆空间机械臂约束

Fig.5 Constraints of the two-link space manipulator

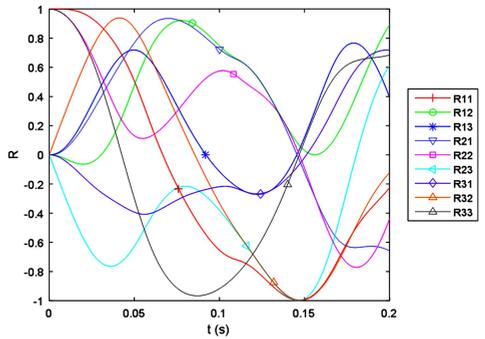


图 6 约束稳定方法得到的旋转矩阵各分量

Fig.6 Rotation matrix components obtained by using constraints stabilization method

图 2 给出了仿真过程中的连杆末端轨迹, 图 3 为连杆质心位置和 Lagrange 乘子  $\lambda$  的时间历程图. 从图中可以看到仿真过程稳定. 图 4 为双连杆空间机械臂系统动能、势能和总能量变化图, 可以看出系统总能量守恒. 图 5 为系统所受约束方程 (11) 及相应的速度级约束和加速度级约束时间历程图, 可以看出各级约束均精确保持, 且精度较高, 从而验证了约束稳定方法的作用. 图 6 和图 7 给出了约束

稳定方法得到的旋转矩阵  $R$  的各分量变化图及误差  $eR = R^T R - I$ , 进一步验证了约束稳定方法对旋转矩阵  $R$  的正交性的保持, 即 Lie 群结构的保持.

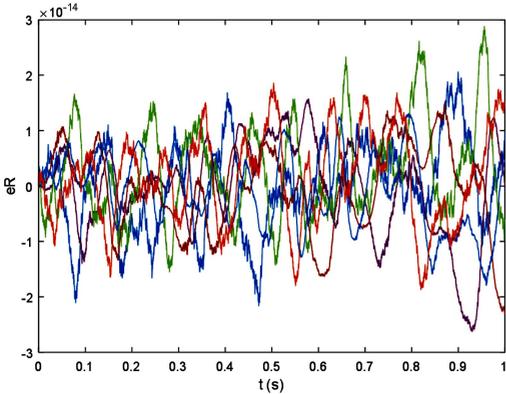


图7 约束稳定方法得到的旋转矩阵正交性误差

Fig.7 Errors of the orthogonality of the rotation matrix obtained by using constraints stabilization method

表1和表2将使用约束稳定方法得到的结果和使用同样的向后差商隐式方法求解指标1、2和3的Lie群微分-代数方程所得的结果进行了比较.其中DAE1、DAE2和DAE3分别表示指标1、2和3微分-代数方程求解, DAES表示约束稳定方法求解,  $H$ 为系统总能量,  $\delta(H) = \max_{0 \leq i \leq n} |H(t_i) - H(0)| / H(0)$ 为系统总能量最大相对误差,  $\varepsilon(\Phi)$ ,  $\varepsilon(\dot{\Phi})$ ,  $\varepsilon(\ddot{\Phi})$ 为系统约束函数、速度级约束和加速度级约束最大绝对误差.

表1 约束稳定方法与指标1、2、3DAEs结果比较 ( $h=0.00001$ )

Table 1 Comparison of the results obtained by constraints stabilization method and index 1,2,3 DAEs ( $h=0.00001$ )

	$\delta(H)$	$\varepsilon(\Phi)$	$\varepsilon(\dot{\Phi})$	$\varepsilon(\ddot{\Phi})$
DAE1	0.0106	0.0089	0.0183	$7.4473 \times 10^{-6}$
DAE2	0.0083	0.0029	$1.7764 \times 10^{-14}$	1.0551
DAE3	0.0156	$3.8858 \times 10^{-16}$	0.0127	2.1335
DAES	0.0086	$3.8858 \times 10^{-16}$	$2.1316 \times 10^{-14}$	$4.3201 \times 10^{-12}$

表2 约束稳定方法与指标1、2、3DAEs结果比较 ( $h=0.0001$ )

Table 2 Comparison of the results obtained by constraints stabilization method and index 1,2,3 DAEs ( $h=0.0001$ )

	$\delta(H)$	$\varepsilon(\Phi)$	$\varepsilon(\dot{\Phi})$	$\varepsilon(\ddot{\Phi})$
DAE1	0.1307	0.0902	0.1770	$3.1041 \times 10^{-4}$
DAE2	0.0728	0.0287	$1.4211 \times 10^{-14}$	10.5240
DAE3	0.0820	$5.6621 \times 10^{-15}$	0.1231	21.3930
DAES	0.0765	$1.7136 \times 10^{-13}$	$2.3146 \times 10^{-12}$	$1.7113 \times 10^{-8}$

从表1中可以看出,对指标1微分-代数方程使用隐式方法求解,可以精确保持加速度级约束,

但是位移约束和速度级约束误差较大;对指标2微分-代数方程使用隐式方法求解,可以精确保持速度级约束,而位移约束和加速度级约束产生违约;对指标3微分-代数方程求解,可以精确保持位移约束,而速度级约束和加速度级约束误差较大.但是使用约束稳定方法求解,可以同时精确保持位移约束、速度级约束和加速度级约束.另外,从系统总能量相对误差比较可以看出,约束稳定方法的能量误差与指标2方法误差接近,小于另外两种方法.这四种方法得到的系统总能量相对误差变化图如图8所示,可以看出约束稳定方法在保持各级约束稳定的同时,也减小了系统总能量误差.从表2可以看出,当步长增大时,上述分析仍然成立,与表1比较可以得出,步长增大时,各结果误差有不同程度的增加,其中加速度约束误差增加明显,说明该类方法中加速度约束对步长变化较为敏感.

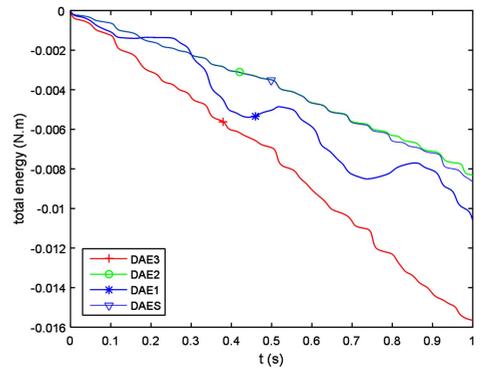


图8 使用不同方法得到的系统总能量

Fig.8 Total energies of the system obtained by using different methods

## 4 结论

本文针对Lie群表达的多体系统动力学微分-代数方程,设计了约束稳定的求解方法,使仿真过程中位移约束、速度级约束和加速度级约束能够同时得到保持.数值算例表明,相比较使用同样向后差商隐式方法求解的指标1、指标2和指标3微分-代数方程,约束稳定方法得到的结果更为精确,在保持各级约束方程的同时,也保持了旋转矩阵的正交性,是一种保Lie群结构的数值方法.在该方法的基础上可以很方便地设计高阶数值方法,进一步提高结果精度.

## 参考文献

- A differential algebraic approach. Berlin:Springer, 2013
- 2 Fon-Llagunes J M. Multibody dynamics-computational methods and applications. Switzerland:Springer, 2016
  - 3 Betsch P. Structure-preserving integrators in nonlinear structural dynamics and flexible multibody dynamics. Switzerland:Springer, 2016
  - 4 Jay L O. Symplectic partitioned Runge-Kutta methods for constrained Hamiltonian systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1996,33(1):368~387
  - 5 Lens E, Cardona A. An energy preserving/decaying scheme for nonlinearly constrained multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 2007,18(3):435~470
  - 6 Betsch P, Uhlar S. Energy-momentum conserving integration of multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2007,17(4):243~289
  - 7 Marsden J E, West M. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, 2003,10(1):357~514
  - 8 Ding J Y, Pan Z K. Higher order variational integrators for multibody system dynamics with constraints. *Advances in Mechanical Engineering*, 2014,6(1):383680-1-8
  - 9 Iserles A, Munthe-Kaas H Z, Nørsett S, et al. Lie-group methods. *Acta Numerica*, 2016,9(2):215~365
  - 10 Simo J C, Vu-Quoc L. On the dynamics in space of rods undergoing large motions—A geometrically exact approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988,66(2):125~161
  - 11 Lewis D, Simo J C. Conserving algorithms for the dynamics of Hamiltonian systems on Lie groups. *Journal of Nonlinear Science*, 1994,4(1):253~299
  - 12 Crouch P E, Grossman R. Numerical integration of ordinary differential equations on manifolds. *Journal of Nonlinear Science*, 1993,3(1):1~33
  - 13 Munthe-Kaas H. High order Runge-Kutta methods on manifolds. *Applied Numerical Mathematics*, 1999,29(1):115~127
  - 14 Arnold M, Brüls O, Cardona A. Error analysis of generalized- $\alpha$  Lie group time integration methods for constrained mechanical systems. *Numerische Mathematik*, 2015,129(1):149~179
  - 15 Terze Z, Müller A, Zlatar D. Lie-group integration method for constrained multibody systems in state space. *Multibody System Dynamics*, 2015,34(3):275~305

## CONSTRAINTS STABILIZATION METHOD FOR DAES ON LIE GROUP OF MULTIBODY SYSTEM DYNAMICS \*

Li Yanan<sup>1</sup> Li Bowen<sup>1</sup> Ding Jieyu<sup>1,2†</sup> Pan Zhenkuan<sup>3</sup>

(1.School of Mathematics and Statistics, Qingdao 266071, China)

(2.Center for Computational Mechanics and Engineering Simulation, Qingdao 266071, China)

(3.College of Computer Science & Technology, Qingdao 266071, China)

**Abstract** Constraints stabilization method on Lie group is studied for different-algebraic equations (DAEs) of multibody system dynamics. Considering the displacement constraints, the velocity constraints and the acceleration constraints equations, the new Lagrange multipliers are used to construct the new DAEs on Lie groups. Then, using the ward difference method and CG (Crouch-Grossman) method, high accuracy simulation results is obtained by solving the constraints stabilization DAEs. The constraints stabilization method can accurately maintain the constraint equation at all levels, and can maintain the orthogonality of rotation matrix. Meanwhile, the total energy error of the system is smaller.

**Key words** multibody system dynamics, different-algebraic equations(DAEs), Lie group, constraint stabilization