

# 基于噪声的非线性多智能体系统的均方一致性\*

邱丽 过榴晓<sup>†</sup> 刘佳

(江南大学理学院, 无锡 214122)

**摘要** 本文主要研究拓扑结构为有向强连接的非线性多智能体系统的均方一致性问题. 考虑到非线性系统中的个体在传递信息时受到噪声环境的干扰, 提出一种新的延迟控制方案, 提高了系统的控制性能. 基于 Lyapunov 稳定性和 Itô 积分方程理论, 得到多智能体系统渐近趋于均方一致的充分条件. 同时, 得到相同的耦合强度下容许的最大延迟间隔, 数值仿真结果进一步验证了理论分析的有效性.

**关键词** 均方一致性, 多智能体系统, 非线性动力学, 噪声环境, 延迟

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-55

## 引言

近年来多智能体网络系统的合作与协调控制已成为众多领域研究的热点, 在无人航天<sup>[1]</sup>, 传感器网络<sup>[2]</sup>, 卫星编队<sup>[3,4]</sup>, 数据融合, 多机械臂的协同装备, 以及鱼群或鸟群的行动方向<sup>[5,6]</sup>, 分布传感器的滤波值<sup>[7]</sup>等众多领域有着广泛的应用而引起的. 文献[8,9]对于多智能体网络的基本问题进行了综述. 另一方面, 多智能体网络系统往往受到环境不确定性导致通信延迟<sup>[10,11]</sup>, 使它很难及时准确的获得相邻节点的信息. 由于网络拓扑结构模型的建立与真实结构的差异<sup>[12,13]</sup>、环境的温度与湿度等外部条件的变化, 节点之间通信的各种不确定因素的影响, 复杂网络中的随机性因素是客观存在的, 而且随机性因素对系统造成的影响是不可忽略的, 因此造成的延迟通常是由有限的信号传输和记忆效应所引起的. 主体之间的信息通讯自然相应与时滞效应<sup>[14]</sup>. 具有延迟非线性的复杂多智能体网络系统的一致性引起越来越多的关注<sup>[15]</sup>. 在非线性系统的一致性控制控制研究中, 更多借鉴线性的分析时所用的代数图论<sup>[16]</sup>, 非负矩阵论<sup>[17]</sup>等工具来进行研究. 陈关荣<sup>[18]</sup>运用这些工具介绍了带有延迟方法采样信息非线性多智能体网络的控制问题. 最近的工作, Huang 和 Manton<sup>[19]</sup>研究在切换拓扑存在或不存在的条件下, 使用算法从随机

近似在离散时间情况下的随机一致性问题. Li 和 Zhang<sup>[20]</sup>将 Huang 和 Manton 的工作扩展到连续时间设置, 得到平衡网络和包含的一个生成树随机一致的充要条件. 因此, 建立与实际情况尽量接近的随机复杂动态网络模型, 并在根据具体问题变换模型的基础上, 研究采用不同的分析方法与控制策略是有必要的. 另一方面, 对于非线性动力学的多智能体系统, 每个代理节点的内在动力会作为耦合项在最终的一致状态时将会消失. 因此, 一致性协议必须是一个孤立的系统. 一致性协议可能是一个孤立的轨迹平衡点, 周期轨道, 或是一个混沌轨道<sup>[21-23]</sup>. 但是上述论文是基于一个共同的假设, 即每个节点与邻居节点之间信号传递没有时间延迟, 在许多情况下是不切实际的.

鉴于上述讨论, 本文在考虑建构多智能体网络模型的时候, 考虑了每个个体自身动力学行为, 即自身的非线性项, 并在该模型中加入了环境噪声. 每个个体的动力学节点信息是根据自身状态非线性项基于邻居节点之间的随机延迟取样信息的相对状态. 基于延迟输入方法, 采样的多智能体系统转化为一个非线性系统延迟反馈与随机取样信息反馈, 然后进行理论分析, 在考虑通信噪声的前提下, 对全部节点施加控制, 设计一种新的控制策略, 使复杂网络均方一致. 利用 Lyapunov 稳定性与 Itô 积分方程理论, 建立了控制器存在准则, 并通过数

2016-07-01 收到第 1 稿, 2016-09-11 收到修改稿.

\* 江苏省产学研资助项目(BY2016022-17)和江苏省自然科学基金资助项目(BK20161126)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: guoliuxiao@jiangnan.edu.cn

值仿真进行验证.

## 1 预备知识

### 1.1 基础图论知识<sup>[24,25]</sup>

令  $G(V, E, A)$  表示一个有向加权图, 其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  表示图  $G$  的顶点集合,  $E \subseteq V \times V$ ,  $V$  为图  $G$  的边集, 节点的下标集合为  $Q = \{1, 2, \dots, N\}$ . 定义节点  $v_i$  的邻居集合为  $N_i = \{v_j \in V | (v_i, v_j) \in E\}$ . 图  $G$  的邻接矩阵  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ , 其中矩阵元素  $a_{ij}$  为节点  $v_i$  与节点  $v_j$  的连接权重. 如果  $v_j \in N_i$ , 则  $a_{ij} > 0$ . 否则  $a_{ij} = 0$ . 假设图  $G$  中每个节点没有自连, 即对于  $\forall i \in Q, a_{ii} = 0$ .

一个有向图叫做强连接的当且仅当任意两个不同的顶点之间存在一个有向的路径. 此外, 一个有向图包含一个有向生成树, 如果存在一个顶点称为根, 即存在着从这个根到每一个其他的顶点的有向路径.

$G(A)$  的拉普拉斯算子矩阵  $L = (l_{ij})_{n \times n}$ , 其中  $l_{ii} = -\sum_{i \neq j} a_{ij}, l_{ij} = a_{ij}, i \neq j$ . 显然, 如果矩阵  $L$  对称, 则图为无向. 对于一个有向图、拉普拉斯算子矩阵  $L$  具有以下属性:

**引理 1**<sup>[24]</sup>: 假设一个有向图  $G(A)$  是强连接的, 且它的拉普拉斯矩阵  $L$  不可约, 且满足  $L\mathbf{1}_N = \mathbf{0}$ , 并且存在一个对应于零特征值的左特征向量  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T$  使得  $\xi^T L = \mathbf{0}, \xi^T \mathbf{1}_N = 1$ .

### 1.2 系统模型

设一阶连续多智能体  $\dot{x}_i(t) = u_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ , 其中:

$$u_i(t) = -\sum_{j=1}^N l_{ij} x_j(t)$$

这里  $x_i \in \mathbf{R}^n$  表示第  $i$  个节点的位置,  $L = (l_{ij})_{n \times n}$  是通信拓扑  $G(A)$  的拉普拉斯矩阵,  $u_i(t) \in \mathbf{R}^n$  为设计的控制输入. 然而, 每个个体的动力学行为一般不是一个常数, 是时变的. 许多学者开始研究非线性多智能体网络系统<sup>[18]</sup>:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), t) + u_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$f(x_i(t), t) \in \mathbf{R}^n$  描述了第  $i$  个代理状态的内在非线性动力学. 一般达到一致性的状态为  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, i, j = 1, 2, \dots, N$ . 随着研究的深入, 发现在实际应用中, 往往存在子系统的不确定或者环境的噪声. 考虑如下的多智能体网络动力学行为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_i(t), t) + u_i(t) + \sigma_i(t, x_i(t))n(t) \\ i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

这里  $\sigma_i(t, x_i(t)) \geq 0$  是噪声强度,  $n(t)$  是一个标量为零的高斯白噪声过程, 关于  $n(t)$  的导数  $w(t)$  是一维高斯白噪声过程, 且有  $dw(t) = n(t)dt$ . 通过设计分布式协议主要使得多智能体网络达到均方有界一致, 即存在一个随机向量  $x^*(t)$  使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(x_i(t) - x^*(t))^2 \leq C < \infty; \forall i \in I$  成立 ( $C$  是一个正常数), 多智能体网络达到均方有界一致.

**注 1:** 本文在系统中充分考虑了环境噪声对多智能体一致性的影响. 线性多智能体网络中处理噪声延迟已是很大挑战, 目前较多的是离散系统下的噪声延迟, 随机布朗运动的动力学对个体的动力学行为有很大影响. 本文的模型主要用来描述外部随机噪声, 且高斯白噪声过程满足  $dw(t) = n(t)dt$ , 因此本文处理在噪声环境下的非线性连续多智能体网络是一个很大的进步.

考虑非线性动力系统的多智能体网络的延迟控制, 那么给出如下的控制协议:

$$u_i(t) = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} [ (x_j(t - \tau(t)) - x_i(t - \tau(t))) ] \quad (2)$$

其中  $\tau(t)$  是在  $[0, \tau]$  ( $\tau > 0$ ) 的连续时间延迟.

为了证明定理, 给出如下引理:

**引理 2:** 假设  $x \in \mathbf{R}^n, \Gamma = \Gamma^T \in \mathbf{R}^{n \times n}, A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  并且有  $\text{Rank}(A) = l < n$ . 如果设  $A^+ T \Gamma A^+ < 0$ , 其中  $A^+$  是  $A$  的核,  $AA^+ = 0$ , 则当  $y \in \{y: E(Ay) = 0, E(y) \neq 0\}$ , 那么有  $E(y^T \Gamma y) \leq 0$ .

证明:  $\because E(Ay) = 0$ , 即  $A(E(y)) = 0$ .

令  $y' = E(y)$ , 即  $Ay' = 0$ .

由文献[26]引理 2, 有  $y'^T \Gamma y' < 0$ ,

又  $y'^T \Gamma y' = (E(y))^T \Gamma (E(y))$

$= (E(y))^T E(\Gamma y)$

$= E(y^T \Gamma y)$

$\therefore E(y^T \Gamma y) \leq 0$

**注 2:** 本文的分布式控制协议基于延迟控制方法, 考虑时变延迟采样信息, 不仅简化控制方法, 而且利用客观环境噪声下的动态延迟信息, 能够很好的解释和理解非线性复杂性引起的动力学行为.

综合(1)和(2), 非线性动力系统的多智能体网络一致性的随机延迟控制描述为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_i(t), t) + \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} [ (x_j(t - \tau(t)) - x_i(t - \tau(t))) ] + \sigma_i(t, x_i(t))n(t) \\ i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3)$$

### 1.3 动力学模型

将(3)写成随机延迟矩阵形式:

$$dx(t) = [f(x(t)) - Lx(t-\tau(t))] dt + \theta dw(t) \quad (4)$$

其中  $w(t)$  是一维高斯白噪声过程,  $dw(t) = n(t) dt$ ,  $L = (l_{ij})_{n \times n}$ , 是通信拓扑  $G(A)$  的拉普拉斯算子矩阵  $\theta = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $\theta = [\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \dots, \sigma_{ni}]$  是  $n$  维行向量.

得到主要结论前, 给出如下假设:

**假设 1**<sup>[27]</sup>: 对任意  $x, y \in \mathbf{R}^n$ , 存在常数  $\alpha > 0, \beta > 0$  使得非线性函数  $f(\cdot)$  满足:

$$\begin{aligned} (x-y)^T [f(x) - f(y) - a(x-y)] \\ \leq -\beta(x-y)^T(x-y) \end{aligned}$$

**假设 2**: 对于任意的  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n, t \geq 0$ , 存在一个非负常数  $\rho$ , 使得:

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq \rho \|x_1 - x_2\|$$

## 2 主要结论

**定理 1** 假设网络图  $G$  是连通的, 如果存在正数  $\lambda, \alpha, \beta$  且存在对称矩阵  $Q$ , 使得  $E^T Q E > 0$  并且矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * \\ 0 & \Phi_{22} & * & * \\ 0 & -E^T Q E & \Phi_{33} & * \\ -2\tau^2 E^T L^T Q E & -E^T L^T E & -E^T Q E & \Phi_{44} \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

其中:

$$\Phi_{11} = 2\tau^2 E^T Q E - E^T E$$

$$\Phi_{22} = E^T [\lambda I + 2(\alpha - \beta)(I - F) + \rho I] E - E^T Q E$$

$$\Phi_{33} = -2E^T Q E$$

$$\Phi_{44} = 2\tau^2 E^T L^T Q L E - E^T Q E$$

$$E = \begin{bmatrix} I_{N-1} \\ \bar{\xi}^T \\ \xi_N \end{bmatrix}, \quad \bar{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}]^T$$

则非线性多智能体系统(4)将均方有界一致.

证明: 误差系统:

$$\delta(t) = x(t) - \mathbf{1}\alpha(t) = (I - F)x(t)$$

这里  $\mathbf{1}$  表示元素均为 1 的  $N$  维列向量,  $I$  是单位矩阵,

$$\alpha(t) = \text{avg}(x(t)) = \frac{1}{n} \mathbf{1}^T x(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t),$$

$$F = \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T$$

易得  $\mathbf{1}^T \delta(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) - n\alpha(t) = 0, t \geq 0$ , 则:

$$\begin{aligned} d\delta(t) &= (I - F) dx(t) \\ &= (I - F) [f(x(t)) - Lx(t-\tau(t))] dt + \\ &\quad (I - F) \theta d\omega(t) \\ &\leq (I - F) [f(x(t)) - f(\bar{x}(t)) - \\ &\quad L\delta(t-\tau(t))] dt + (I - F) \theta dw(t) \quad (6) \end{aligned}$$

对系统(6)选取 Lyapunov-Krasovskii 函数:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t)$$

其中  $V_1(t) = e^{\lambda t} \delta^T(t) \delta(t)$ ,

$$V_2(t) = 2\tau \int_{-\tau}^t \int_{t+\theta}^s e^{\lambda \theta} \delta^T(s) Q \delta(s) ds d\theta$$

这里对于对称矩阵  $Q$ , 有  $E^T Q E > 0$ , 其中:

$$E = \begin{bmatrix} I_{N-1} \\ \bar{\xi}^T \\ \xi_N \end{bmatrix}, \quad \bar{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}]^T$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T$  是拉普拉斯矩阵  $L$  的零特征值的左特征向量, 有  $\xi^T \mathbf{1}_N = 1$ .

由 Itô 公式可得:

$$\begin{aligned} dV(\delta(t), t) &= 2e^{\lambda t} \delta^T(t) (I - F) \theta dw(t) + \\ &\quad (LV_1 + \frac{\partial V_2}{\partial t}) dt \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{这里 } LV_1 &\leq \lambda e^{\lambda t} \delta^T(t) \delta(t) + 2e^{\lambda t} \delta^T(t) [(I - F) \cdot \\ &\quad (f(x(t)) - f(\bar{x}(t)) - L\delta(t-\tau(t)))] + \\ &\quad e^{\lambda t} \text{trace} (I - F)^2 \theta^T \theta \\ &\leq \lambda e^{\lambda t} \delta^T(t) \delta(t) + 2e^{\lambda t} \delta^T(t) [(I - F) \cdot \\ &\quad (\alpha - \beta) \delta(t) - L\delta(t-\tau(t))] + \\ &\quad e^{\lambda t} \text{trace} (I - F)^2 \theta^T \theta \\ &\leq \lambda e^{\lambda t} \delta^T(t) \delta(t) + 2e^{\lambda t} \delta^T(t) [(I - F) \cdot \\ &\quad (\alpha - \beta) \delta(t) - L\delta(t-\tau(t))] + \\ &\quad e^{\lambda t} \text{trace} (I - F)^2 \theta^T \theta - \\ &\quad e^{\lambda t} f^T(x(t), t) f(x(t), t) + \\ &\quad e^{\lambda t} \rho \delta^T(t) \delta(t) \quad (8) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = 2\tau^2 e^{\lambda t} \delta^T(t) Q \delta(t) -$$

$$2\tau e^{\lambda t} \int_{t-\tau}^t \delta^T(s) Q \delta(s) ds$$

$$\leq 2\tau^2 e^{\lambda t} \delta^T(t) Q \delta(t) -$$

$$(\tau - \tau(t)) e^{\lambda t} \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \delta^T(s) Q \delta(s) ds -$$

$$\tau e^{\lambda t} \int_{t-\tau}^t \delta^T(s) Q \delta(s) ds -$$

$$\tau(t)e^{\lambda t} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\delta}^T(s) Q \dot{\delta}(s) ds \quad (9)$$

根据 Jensen 不等式:

$$\begin{aligned} & -\tau e^{\lambda t} \int_{t-\tau}^t \dot{\delta}^T(s) Q \dot{\delta}(s) ds \\ & \leq -e^{\lambda t} [\delta(t) - \delta(t-\tau)]^T Q [\delta(t) - \delta(t-\tau)], \\ & -(\tau - \tau(t))e^{\lambda t} \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \dot{\delta}^T(s) Q \dot{\delta}(s) ds \\ & \leq -e^{\lambda t} [\delta(t - \tau(t)) - \delta(t - \tau)]^T Q \\ & \quad [\delta(t - \tau(t)) - \delta(t - \tau)], \\ & -\tau(t)e^{\lambda t} \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\delta}^T(s) Q \dot{\delta}(s) ds \\ & \leq -e^{\lambda t} [\delta(t) - \delta(t - \tau(t))]^T Q \\ & \quad [\delta(t) - \delta(t - \tau(t))] \end{aligned}$$

令:

$$\delta(t) - \delta(t - \tau) = v_1(t)$$

$$\delta(t - \tau(t)) - \delta(t - \tau) = v_2(t)$$

$$\delta(t) - \delta(t - \tau(t)) = v_3(t)$$

则综上可得:

$$\begin{aligned} dV(\delta(t), t) & \leq 2e^{\lambda t} \delta^T(t) (I - F) \theta dw(t) + \\ & e^{\lambda t} \eta^T(t) \Gamma \eta(t) dt + \\ & e^{\lambda t} C_0 dt \end{aligned} \quad (10)$$

其中:

$$\eta(t) = [\delta^T(t), \delta^T(t), \delta^T(t - \tau(t)), f^T(x(t)), v_1^T(t), v_2^T(t), v_3^T(t)]^T$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2\tau^2 Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & -L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q \end{pmatrix}$$

其中,  $M = \lambda I + 2(\alpha - \beta)(I - F) + \rho I$

$$C_0 = \text{trace} (I - F)^2 \theta^T \theta$$

令  $A = \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}$ , 其中:

$$S = \begin{bmatrix} I & 0 & L & -(I - F) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -I & 0 & -I & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \mathbf{1}^T$$

容易验证  $E(A\eta(t)) = 0$ ,

由条件:

$$A^\perp{}^T \Gamma A^\perp < 0 \quad (11)$$

其中:

$$A^\perp = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & -LE & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix}$$

则由条件(11)和引理 2 得  $E(\eta^T(t) \Gamma \eta(t)) \leq 0$ .

不等式(11)可以写成:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * \\ 0 & \Phi_{22} & * & * & * \\ 0 & -E^T Q E & \Phi_{33} & * & * \\ N & -E^T L^T E & -E^T Q E & \Phi_{44} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E^T Q E \end{bmatrix} < 0$$

其中:

$$N = -2\tau^2 E^T L^T Q E$$

$$\Phi_{11} = 2\tau^2 E^T Q E - E^T E$$

$$\Phi_{22} = E^T [\lambda I + 2(\alpha - \beta)(I - F) + \rho I] E - E^T Q E$$

$$\Phi_{33} = -2E^T Q E$$

$$\Phi_{44} = 2\tau^2 E^T L^T Q L E - E^T Q E$$

它与(5)等价. 因为  $E^T Q E > 0$ , 因此对任意小的  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta^T(t) \Gamma \eta(t) < -\varepsilon \|\delta(t)\|^2$ .

所以(10)式可以转化为:

$$dV(\delta(t), t) \leq 2e^{\lambda t} \delta^T(t) (I - F) \theta dw(t) + e^{\lambda t} C_0 dt \quad (12)$$

由(12)式对不等式两边取期望可得:

$$E(V(\delta(t), t)) - E(V(\delta(0), 0)) = \int_0^t e^{\lambda s} C_0 ds$$

从而:

$$E \|\delta(t)\|^2 \leq e^{-\lambda t} E(V(\delta(0), 0)) + \lambda^{-1} C_0 \quad (13)$$

对式(13)两侧取极限:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(V(\delta(t), t)) = \lambda^{-1} C_0$$

根据定义以及李雅普诺夫分析方法, 误差系统是渐近稳定的, 则多智能体网络系统(4)可达到均方有界一致. 定理证毕.

**注 3:** 由于在现实应用程序的多智能体的结构中, 每个代理的速度通常不是一个常数而是一个时变变量, 且介于个体的通信拓扑结构可能动态改变, 因此导致连接的失败或成功, 结合这两个方面, 考虑切换拓扑的结构.

为了描述切换拓扑结构, 定义恒定切换信

号<sup>[24]</sup>  $\sigma(t) : [0, \infty) \rightarrow \Gamma = \{1, 2, \dots, N\}$ , 这里  $N$  表示可能的总的相互作用的拓扑结构总数. 所有可能的拓扑结构的集合  $\{\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_N\}$  是有限集合. 那么系统(4)则可以写成一个交换系统:

$$dx(t) = [f(x(t)) - L_p x(t - \tau(t))] dt + \theta dw(t)$$

这里  $P$  和切换信号对应.

类似可得以下结论:

设多智能体网络系统(4)是切换拓扑网络, 则如果存在正数  $\lambda, \alpha, \beta$  且存在对称矩阵  $Q$ , 使得  $E^T Q E > 0$  并且矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * \\ \mathbf{0} & \Phi_{22} & * & * \\ \mathbf{0} & -E^T Q E & \Phi_{33} & * \\ N_1 & -E^T L_p^T E & -E^T Q E & \Phi_{44} \end{bmatrix} < 0$$

其中:

$$\begin{aligned} N_1 &= -2\tau^2 E^T L_p^T Q E \\ \Phi_{11} &= 2\tau^2 E^T Q E - E^T E \\ \Phi_{22} &= E^T [\lambda I + 2(\alpha - \beta)(I - F) + \rho I] E - E^T Q E \\ \Phi_{33} &= -2E^T Q E \\ \Phi_{44} &= 2\tau^2 E^T L_p^T Q L E - E^T Q E \\ E &= \begin{bmatrix} I_{N-1} \\ \bar{\xi}^T \\ \xi_N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}]^T$$

那么在控制协议(3)下的多智能体非线性动力系统(5)实现均方有界一致.

### 3 仿真结果

该部分运用计算机数值仿真验证所得理论的正确性和有效性. 考虑多智能体网络系统(3), 网络节点  $f(x_i(t), t)$  取 2 维为例.

例:

取  $f(x_i(t), t) = [0.15 \sin(x_{i1}(t)), 0.15 \cos(x_{i2}(t))]^T \in \mathbf{R}^2, x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t))$ . 设有 5 个网络节点, 每个节点取 2 维系统, 网络通讯拓扑结构为强连接图, 如图 1 所示.

随机取初始值为:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= (1.25, 0.05)^T, \\ x_2(0) &= (-0.5, 0.175)^T, \\ x_3(0) &= (0, 0)^T, \\ x_4(0) &= (1.5, -0.75)^T, \\ x_5(0) &= (3.0, -0.65)^T. \end{aligned}$$

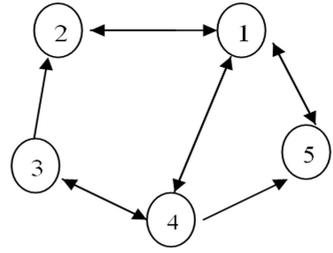


图 1 5 个节点的强连接拓扑图

Fig. 1 Strong connection topology of five nodes

动态延迟  $\tau(t) = (|\sin \pi t|, |\cos t|)$ , 随机噪声:

$$\sigma_i(x_i, t) = \begin{bmatrix} \sqrt{0.1} \sin(t) x_{i1}(t) \\ \sqrt{0.3} \sin(t) x_{i2}(t) \end{bmatrix}$$

在随机噪声环境下非线性多智能体网络的两分量的状态图可以达到一致, 见图 2 和图 3. 数值仿真得到延迟间隔  $\tau \leq 0.7$ . 图 4 为多智能体误差系统的状态. 多智能体的一致性整体误差见图 5, 为:

$$e = \sum_{i=1}^N e_i^2(t)$$

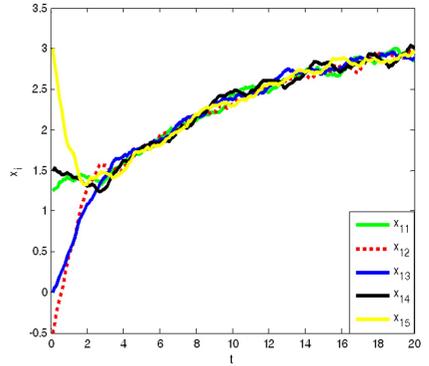


图 2 加入控制后每个个体第一个分量的状态图

Fig. 2 State diagram of the first component of each individual under the control protocol

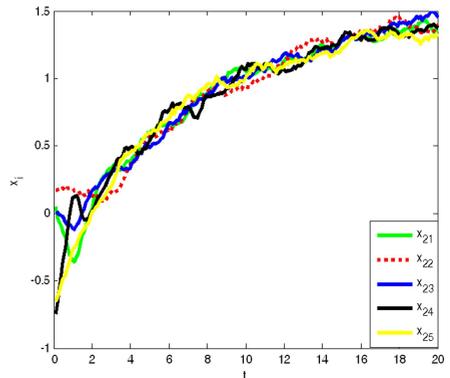


图 3 加入控制后每个个体第二个分量的状态图

Fig. 3 State diagram of the second component of each individual under the control protocol

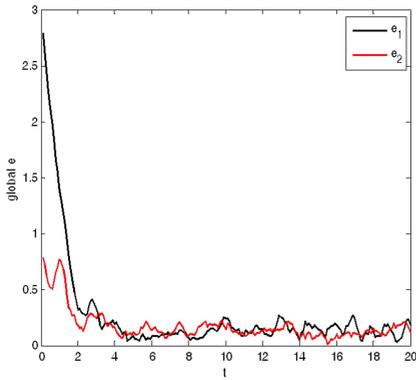


图4 系统(1)主体的两分量误差状态图

Fig. 4 Error state diagram of two components of the system (1)

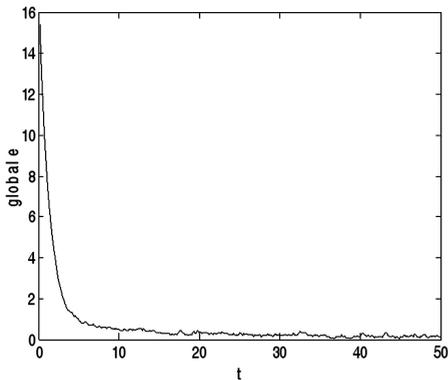


图5 系统(1)主体的一致性整体误差图

Fig. 5 Graph of the consensus global error of the system (1)

## 4 结论

本文研究了拓扑结构为有向强连通图的多智能体系统的均方一致性问题.基于 Lyapunov 稳定性理论和 Ito 求导公式,给出多智能体系统渐近趋于均方一致的充分条件,通过仿真实验验证了理论分析的正确性.由于非线性系统中的个体在传递信息时受到噪声环境的干扰,在此基础上提出的新的控制方案基于动态延迟控制和采样点技术,从而提高了系统的控制性能.

## 参 考 文 献

- Paletta N, Dmytriv A, Belardo M. Landing gear concept and dynamic landing loads of the unmannedspace reentry vehicle USV3. *Procedia Engineering*, 2015,114:38~45
- Wang X F, Li J H. Control and flocking of networked systems via pinning. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2010,10(3):83~91
- Beard R W, Lawton J, Hadaegh F Y. A coordination architecture for spacecraft formation control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001,9(6):777~790
- 余本嵩,文浩,金栋平. 绳系卫星编队动力学及控制研究进展. *动力学与控制学报*, 2015,5:321~328 (Yu B S, Wen H, Jin D P. Research Progress on dynamics and control of tethered satellite formation. *Journal of Dynamics and Control*, 2015,13(5):321~328 (in Chinese))
- Cao Y, Ren W, Egerstedt M. Distributed containment control with multiple stationary or dynamic leaders in fixed and switching directed networks. *Automatica*, 2012, 48(8):1586~1597
- Zhou J, Wu X, Yu W. Flocking of multi-agent dynamical systems based on pseudo-leader mechanism. *Systems and Control Letters*, 2012,61(1):195~202
- Shen B, Wang Z, Liu X. A stochastic sampled-data approach to distributed filtering in sensor networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2011,58(9):2237~2246
- 闵海波,刘源,王仕成等. 多个体协调控制问题综述. *自动化学报*, 2012,38(10):1557~1570 (Min H B, Liu Y, Wang S C, et al. Review on the problem of multi individual coordination control. *Journal of Automation*, 2012, 38(10):1557~1570 (in Chinese))
- 刘成林,田玉平. 具有不同通信时延的多个体系统的一致性. *东南大学学报*, 2008,38(1):170~174 (Liu C L, Tian Y P. Consistency of multiple individual systems with different communication delays. *Journal of Southeast University*, 2008,38(1):170~174 (in Chinese))
- Wang X, Saberi A, Stoorvogel A A. Consensus in the network with uniform constant communication delay. *Automatica*, 2013,49(8):2461~2467
- Wu Q, Zhou J, Xiang L. Impulsive consensus seeking in directed networks of multi-agent systems with communication time delays. *International Journal of Systems Science*, 2012,43(8):1479~1491
- Cheng L, Wang Y, Hou Z G. Sampled-data based average consensus of second-order integral multi-agent systems: switching topologies and communication noises. *Automatica*, 2013,49(5):1458~1464
- Xie D, Wang S. Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with fixed topology. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012,387(1):8~16
- Wen G, Duan Z, Yu W. Consensus in multi-agent systems with communication constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012,22(2):170~182
- Li Z, Ren W, Liu X. Consensus of multi-agent systems with general linear and Lipschitz nonlinear dynamics using

- distributed adaptive protocols. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(7):1786~1791
- 16 Liu Z W, Guan Z H, Shen X. Consensus of multi-agent networks with aperiodic sampled communication via impulsive algorithms using position-only measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(10):2639~2643
- 17 Li S, Du H, Lin X. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics. *Automatica*, 2011, 47(8):1706~1712
- 18 Yu W, Zheng W X, Chen G. Second-order consensus in multi-agent dynamical systems with sampled position data. *Automatica*, 2011, 47(7):1496~1503
- 19 Huang M, Manton J H. Coordination and consensus of networked agents with noisy measurements: stochastic algorithms and asymptotic behavior. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 48: 134~161
- 20 Li T, Zhang, J F. Mean square average-consensus under measurement noises and fixed topologies: necessary and sufficient conditions. *Automatica*, 2009, 45:1929~1939
- 21 Wu Z, Duan J, Fu X. Complex projective synchronization in coupled chaotic complex dynamical system. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(3):771~779
- 22 Yu W, Ren W, Zheng W X. Distributed control gains design for consensus in multi-agent systems with second-order nonlinear dynamics. *Automatica*, 2013, 49(7):2107~2115
- 23 Wu Z, Duan J, Fu X. Complex projective synchronization in coupled chaotic complex dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(3):771~779
- 24 Yu W, Chen G, Cao M. Consensus in directed networks of agents with nonlinear dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(6):1436~1441
- 25 Amelina N, Fradkov A, Amelin K. Approximate consensus in multi-agent stochastic systems with switched topology and noise. *IEEE International Conference on Control Applications*, 2012:445~450
- 26 Wen G, Duan Z, Yu W. Consensus of multi-agent systems with nonlinear dynamics and sampled-data information: a delayed-input approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 23(6):602~619
- 27 Liu X, Chen T. Synchronization analysis for nonlinearly-coupled complex networks with an asymmetrical coupling matrix. *Physica A*, 2008, 387:4429~4439

## MEAN SQUARE AVERAGE-CONSENSUS FOR NONLINEAR MULTI-AGENT SYSTEMS IN NOISE ENVIRONMENT\*

Qiu Li Guo Liuxiao<sup>†</sup> Liu Jia

(School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract** We investigate the mean square average consensus problem of multi-agent systems with directed topology being strongly connected. It is considered that the nonlinear multi-agent individuals are interfered by noise environment in the process of transmitting information, and a new control scheme is proposed to improve the control performance. Based on Lyapunov stability and Ito integral equation theory, the sufficient conditions for the mean square average consensus of the multi-agent systems are achieved. The allowable maximum delay interval with the same coupling strength is simultaneously obtained. Numerical simulations are also provided to demonstrate the effectiveness of theoretical analysis.

**Key words** mean square average consensus, multi-agent system, nonlinear dynamics, noise environment, delay

Received 1 July 2016, revised 11 September 2016.

\* The project supported by the Prospective Research Project of Jiangsu Province (BY2016022-17) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20161126).

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: guoliuxiao@jiangnan.edu.cn