

时滞切换不确定神经网络系统的指数稳定性*

薛焕斌^{1,2†} 张继业²

(1. 韩山师范学院数学与统计学院, 潮州 521041) (2. 西南交通大学牵引动力国家重点实验室, 成都 610031)

摘要 本文研究了具有无穷时滞切换不确定细胞神经网络(UCNNs)系统任意切换下的指数稳定性. 利用同胚映射和 M -矩阵理论, 得到 UCNNs 系统平衡点存在性, 唯一性和指数稳定性的充分条件; 利用 Lyapunov 泛函方法, 研究了时滞切换 UCNNs 系统任意切换下的鲁棒指数稳定性, 并得到确保系统全局指数稳定的充分条件.

关键词 神经网络系统, 鲁棒指数稳定性, 时间滞后, 切换系统, Lyapunov 泛函

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-47

引言

细胞神经网络是由 Chua 和 Yang 在 1988 年提出的^[1,2]. 此后的 20 多年里, 细胞神经网络得到了广泛的研究, 并成功应用于信号处理、模式识别、移动图像重构和解非线性代数方程等^[2-5]. 这些应用依赖于神经网络平衡点的存在性和稳定性^[6-8]. 不管是生物还是人工神经网络, 神经元之间的相互作用一般是不同步的, 特别在网络的硬件实现中, 由于信号传输速度的有限性, 使网络系统中的时间滞后不可避免. 另一方面, 在神经网络中引入时间滞后参量后, 有利于移动目标的图像处理, 移动物体速度的确定和模式分类^[9]. 但时间滞后量的引入, 可能使网络产生振荡和不稳定性. 而且在大多数情况下, 时间滞后量是难以精确测量的, 并且随着时间的改变不断变化, 事实上是无界的. 也就是说, 过去的所有时刻影响着现在的状态^[10]. 再者, 由于外界扰动, 测量和建模误差等的存在, 神经网络模型一定含有影响其动力学行为的不确定性因素. 为了分析神经网络模型的鲁棒性, 一种合理的方法是假定参数属于已知的区间^[11]. 因此, 对时滞区间神经网络模型的鲁棒稳定性研究具有理论和现实的重要性.

切换系统是一种混杂系统, 它由一系列的子系统和一个控制子系统之间切换规律的控制率组

成. 最近, 切换系统受到越来越多的关注. 因为实际中很多系统(如生物系统, 计算机控制系统, 工程系统等)都可以表述成切换系统. 另外, 从控制方面看, 多控制器的切换控制往往可以对复杂系统的控制起到满意的控制效果. 切换时滞系统作为一种新的复杂系统, 具有重要的理论研究意义. 由于连续和离散的动力学特征, 以及时间滞后之间的相互作用, 使得切换时滞系统的行为比一般的切换或时滞系统行为都要复杂得多. 切换时滞神经网络系统作为一种特殊的切换时滞系统也受到了越来越多的重视. 文献[12,13]运用线性矩阵不等式研究了时滞切换 Hopfield 神经网络的稳定性. Wu 等利用平均驻留时间方法和自由权矩阵方法分析了时滞切换神经网络的指数稳定性^[14]. Arunkumar 等利用平均驻留时间方法和多 Lyapunov 函数法研究了一类离散切换神经网络的鲁棒稳定性^[15].

正如前面提到的, 切换神经网络每个子系统平衡点的存在性, 唯一性和稳定性是非常重要的. 然而, 在现有的结论中, 很少结论跟子系统平衡点的存在性, 唯一性和稳定性直接相关. 而且大部分结论都是运用线性矩阵不等式方法, 但这种方法在实际工程应用上存在着诸多困难. 因为应用线性矩阵不等式方法必须人为的决定很多不确定参数和矩阵.

2016-12-19 收到第 1 稿, 2017-02-27 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11572264), 广东省普通高校创新人才资助项目(2016KQNCX103)和韩山师范学院青年科学基金(LQ201301)

† 通讯作者 E-mail: huanbinxue@163.com

基于以上分析,本文的主要目的是建立时滞切换 UCNNs 系统鲁棒指数稳定性的新条件. 运用 Lyapunov 泛函方法,得到了时滞切换 UCNNs 系统鲁棒指数稳定性的充分条件. 和前面的结论相比较,本文的主要优点有:(a)系统的稳定性对参数摄动和切换信号扰动都具有鲁棒性;(b)得到的结论是显式结构,有利于实际工程应用.

符号说明: $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 表示 n 维列向量(符号 $(\cdot)^T$ 表示转置), R^n 表示 n 维实数空间, $|x|$ 表示 $|x|=(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)^T$, $\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 范数;对于矩阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$, $|A|$ 表示 $|A|=(|a_{ij}|)_{n \times n}$; $C((-\infty, 0]; R^n)$ 表示从 $(-\infty, 0]$ 映射到 R^n 上的连续函数集.

1 预备知识

具有无穷时滞的 UCNNs 系统可以由以下时滞微分方程描述:

$$\begin{cases} \frac{du_i(t)}{dt} = -e_i u_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(u_j(t)) + \\ \sum_{j=1}^n b_{ij} \int_{-\infty}^t k_{ij}(t-s) g_j(u_j(s)) ds + I_i \\ E \in E_i, A \in A_i, B \in B_i, i=1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

其中 u_i 为第 i 个神经元的状态, $i=1, 2, \dots, n$, n 为神经元的数量; $E=\text{diag}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ 为一个 $n \times n$ 对角矩阵, $e_i > 0$; $g(u)=(g_1(u_1), g_2(u_2), \dots, g_n(u_n))^T$ 为神经元的激活函数; $A=(a_{ij})_{n \times n}$, $B=(b_{ij})_{n \times n}$ 为关联矩阵; $I=(I_1, I_2, \dots, I_n)^T$ 为常输入向量;核函数 $k_{ij}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的分段连续函数并且满足 $\int_0^{+\infty} e^{\alpha s} k_{ij}(s) ds = p_{ij}(\alpha)$,其中 $p_{ij}(\alpha)$ 为 $[0, \delta)$ ($\delta > 0$)上的连续函数且 $p_{ij}(0)=1$.

$$E_i = \{E = \text{diag}(e_i)_{n \times n} : \underline{E} \leq E \leq \bar{E}, i.e., \underline{e}_i \leq e_i \leq \bar{e}_i\},$$

$$A_i = \{A = (a_{ij})_{n \times n} : \underline{A} \leq A \leq \bar{A}, i.e., \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}\},$$

$$B_i = \{B = (b_{ij})_{n \times n} : \underline{B} \leq B \leq \bar{B}, i.e., \underline{b}_{ij} \leq b_{ij} \leq \bar{b}_{ij}\}$$

系统(1)的初始条件假设为 $u_i(s) = \varphi_i(s)$, $s \in (-\infty, 0]$,其中 $\varphi_i \in C((-\infty, 0], R)$, $i=1, 2, \dots, n$.

我们假设 UCNNs 系统(1)的激活函数满足如下条件:

假设 1 对于任意给定的 $u_i, v_i \in R$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,存在常数 $L_i > 0$,使得:

$$|g_i(u_i) - g_i(v_i)| \leq L_i |u_i - v_i|$$

即 $g_i: R \rightarrow R$ 是全局 Lipschitz.

在这种情况下,我们称 $g(u)$ 属于 G 类函数,记为 $g(u) \in G$. 并且记 $L = \text{diag}\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$.

时滞切换 UCNNs 系统是由一系列的时滞 UCNNs 系统和切换率组成的. 每个时滞 UCNNs 系统视为子系统,切换率决定了各个子系统之间的切换. 根据系统(1),时滞切换 UCNNs 系统可以表示成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{du_i(t)}{dt} = -e_i^{\sigma(t)} u_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}^{\sigma(t)} g_j^{\sigma(t)}(u_j(t)) + \\ \sum_{j=1}^n b_{ij}^{\sigma(t)} \int_{-\infty}^t k_{ij}^{\sigma(t)}(t-s) g_j^{\sigma(t)}(u_j(s)) ds + J_i^{\sigma(t)} \\ E_k \in E_k, A_k \in A_k, B_k \in B_k, k \in \{1, 2, \dots, N\} \end{cases} \quad (2)$$

其中切换信号 $\sigma(t): [0, +\infty) \rightarrow \Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$ 为分段常函数; $E_k = \text{diag}(e_1^k, e_2^k, \dots, e_n^k)$, $e_i^k > 0$; $g_k(u(t)) = (g_1^k(u_1(t)), g_2^k(u_2(t)), \dots, g_n^k(u_n(t)))^T$ 为第 k 个子系统的神经元激活函数; $A_k = (a_{ij}^k)_{n \times n}$, $B_k = (b_{ij}^k)_{n \times n}$ 是第 k 个子系统的关联矩阵,第 k 个子系统的区间矩阵 E_{kl}, A_{kl}, B_{kl} 和核函数 k_{ij}^k 的定义如同系统(1)所示, $J_k = (J_1^k, J_2^k, \dots, J_n^k)^T$ 为第 k 个子系统的输入向量.

系统(2)的初始条件假设为 $u^{\sigma(t_0)}(s) = \varphi^{\sigma(t_0)}(s)$, $s \in (-\infty, 0]$,其中 $\varphi_i^{\sigma(t_0)} \in C((-\infty, 0], R)$, $i=1, 2, \dots, n$. 子系统的激活函数 $g_k \in G$,并记 $L_k = \text{diag}\{L_1^k, L_2^k, \dots, L_n^k\}$, $k \in \Sigma$.

在本文中假定切换率 $\sigma(t)$ 事先未知. 对应切换信号 $\sigma(t)$,我们可以得到一个切换序列 $\{(t_0, i_0), \dots, (t_k, i_k), \dots | i_k \in \Sigma, k=0, 1, \dots\}$,这表示当时 $t \in [t_k, t_{k+1})$,第 i_k 个子系统被激活.

定义指示函数:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_N(t))^T$$

其中:

$$\gamma_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{当第 } k \text{ 个子系统被激活} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$k=1, 2, \dots, N$. 因此,时滞切换 UCNNs 系统(2)亦可表达成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) \left[-e_i^k u_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}^k g_j^k(u_j(t)) + \right. \\ \left. \sum_{j=1}^n b_{ij}^k \int_{-\infty}^t k_{ij}^k(t-s) g_j^k(u_j(s)) ds J_i^k \right] \\ E_k \in E_k, A_k \in A_k, B_k \in B_k, k \in \{1, 2, \dots, N\} \end{cases} \quad (3)$$

定义 1 如果对每个 $E_k \in E_{kl}, A_k \in A_{kl}, B_k \in B_{kl}$ 和输入 J_k , 存在常数 $\lambda > 0$ 和 $\eta > 0$, 使得对所有的 $t \geq t_0$ 都有:

$$\|u(t) - u^*\| \leq \eta \|\varphi^{\sigma(t_0)} - u^*\| e^{-\lambda(t-t_0)}$$

则称时滞切换 UCNNs 系统(3)的平衡点 u^* 是鲁棒指数稳定的.

其中:

$$\begin{aligned} & \|\varphi^{\sigma(t_0)} - u^*\| \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sup_{s \in (-\infty, t_0]} (\varphi_i^{\sigma(t_0)}(s) - u_i^*)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

2 时滞 UCNNs 系统平衡点的定性分析

本节我们将研究系统(1)平衡点的存在性, 唯一性和稳定性.

定义 2 对于实矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 如果 $a_{ij} \leq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$, 且 A 的所有顺序主子式为正, 则称矩阵 A 为 M -矩阵.

引理 1^[16,17] 对于实矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 如果 $a_{ij} \leq 0, i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$, 则以下陈述等价:

- (i) 矩阵 A 为 M -矩阵;
- (ii) 存在向量 $\xi > 0$, 使得 $\xi^T A > 0$.

定义 3 映射 $H: R^n \rightarrow R^n$ 为 R^n 上的同胚映射, 如果 $H \in C^0$ 是 R^n 上的单射和满射, 且 $H^{-1} \in C^0$.

引理 2^[16] 如果 $H(u) \in C^0$ 满足以下条件:

- (i) $H(u)$ 是 R^n 上的单射;
- (ii) $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \|H(u)\| \rightarrow \infty$.

则 $H(u)$ 是 R^n 上的同胚映射.

定理 1 如果系统(1)满足假设 1, 且 $\pi = E^* - (A^* + B^*)L$ 为 M -矩阵, 那么对所有的 $E \in E_l, A \in A_l, B \in B_l$ 和每个输入 I , 系统(1)存在唯一指数稳定的平衡点 u^* . 其中, $E^* = \text{diag}(e_1, e_2, \dots, e_n), A^* = (a_{ij}^*)_{n \times n}, a_{ij}^* = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{ |a_{ij}|, |\bar{a}_{ij}| \}, B^* = (b_{ij}^*)_{n \times n}, b_{ij}^* = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{ |b_{ij}|, |\bar{b}_{ij}| \}$.

证明: 定义如下与系统(1)相关的非线性映射:

$$H(u) = -Eu + (A+B)g(u) + I$$

如果 $H(u)$ 为 R^n 上的同胚映射, 那么系统(1)存在唯一的平衡点 u^* ^[18]. 类似文献[8]定理 1 的证明, 容易得知 $H(u)$ 满足引理 2 的两个条件. 因此, 对任意输入 I , 映射 $H(u)$ 为 R^n 上的同胚映射. 所以系统(1)存在唯一的平衡点 u^* . 记 $\lambda = E -$

$(|A| + |B|)L$, 因为 π 是 M -矩阵, 由引理 1 知道, 存在 $\xi_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 使得:

$$-e_i \xi_i + \sum_{j=1}^n \xi_j L_j (a_{ji}^* + b_{ji}^*) < 0 (i = 1, 2, \dots, n)$$

所以:

$$-e_i \xi_i + \sum_{j=1}^n \xi_j L_j (|a_{ji}| + |b_{ji}|) < 0 (i = 1, 2, \dots, n)$$

由引理条件(ii)可得, 矩阵 λ 是 M -矩阵. 类似文献[6]定理 4 的证明, 容易证明 u^* 是指数稳定的. 证毕.

3 时滞切换 UCNNs 系统的全局指数稳定性

本节将利用 Lyapunov 泛函方法, 研究时滞切换 UCNNs 系统(3)的全局指数稳定性.

定理 2 如果对任意的 $k \in \Sigma, g_k \in G$, 并存在一个 n 维正向量 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 使得:

$$-e_i^k \xi_i + \sum_{j=1}^n \xi_j L_j^k (|a_{ji}^{*k}| + |b_{ji}^{*k}|) < 0 \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{*k} &= \max_{1 \leq i, j \leq n} \{ |a_{ij}^k|, |\bar{a}_{ij}^k| \} \\ b_{ij}^{*k} &= \max_{1 \leq i, j \leq n} \{ |b_{ij}^k|, |\bar{b}_{ij}^k| \} \end{aligned}$$

那么对所有的 $E_k \in E_{kl}, A_k \in A_{kl}, B_k \in B_{kl}$ 和每个输入 J_k , 系统(3)在任意切换信号下是鲁棒指数稳定.

证明: 由不等式(4)和引理 1 知道, $\pi_k = E_k^* - (A_k^* + B_k^*)L_k, k \in \Sigma$ 为 M -矩阵. 由定理 1 知道, 系统(3)的所有子系统均存在唯一指数稳定的平衡点. 不失一般性, 我们假设系统(3)的所有子系统有共同的平衡点 u^* . 设 $x(t) = u(t) - u^*$, 将系统(3)的平衡点平移到原点, 此时系统(3)表示为:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) [-e_i^k x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}^k f_j^k(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}^k \int_{-\infty}^t k_{ij}^k(t-s) f_j^k(x_j(s)) ds] \\ E_k \in E_{lk}, A_k \in A_{lk}, B_k \in B_{lk}, k \in \{1, 2, \dots, N\} \end{cases} \quad (5)$$

其中:

$$f_k(x(t)) = (f_1^k(x_1(t)), f_2^k(x_2(t)), \dots, f_n^k(x_n(t)))^T,$$

$$f_j^k(x_j) = g_j^k(x_j + u_j^*) - g_j^k(u_j^*) (j = 1, 2, \dots, n; k \in \Sigma)$$

考虑 Lyapunov 泛函:

$$V(x, t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \left\{ e^{\varepsilon t} |x_i| + \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) \sum_{j=1}^n L_j^k |b_{ij}^k| \times \int_0^{+\infty} k_{ij}^k(s) \left(\int_{t-s}^t e^{\varepsilon(\tau+s)} |x_j(\tau)| d\tau \right) ds \right\} \quad (6)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 待定. 计算 V 沿系统(5)的右上导数 V^+ 可得:

$$\begin{aligned} D^+ V(x, t) &= \sum_{i=1}^n \xi_i \left\{ e^{\varepsilon t} \operatorname{sgn} x_i \frac{dx_i}{dt} + \varepsilon e^{\varepsilon t} |x_i| + \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) \sum_{j=1}^n L_j^k |b_{ij}^k| \times \int_0^{+\infty} k_{ij}^k(s) (e^{\varepsilon(t+s)} |x_j(t)| - e^{\varepsilon t} |x_j(t-s)|) ds \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i \left\{ e^{\varepsilon t} \operatorname{sgn} x_i \left\{ \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) \left[-e_i^k x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}^k f_j^k(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}^k \int_{-\infty}^t k_{ij}^k(t-s) f_j^k(x_j(s)) ds \right] \right\} + \varepsilon e^{\varepsilon t} |x_i| + \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) \sum_{j=1}^n L_j^k |b_{ij}^k| \times \int_0^{+\infty} k_{ij}^k(s) (e^{\varepsilon(t+s)} |x_j(t)| - e^{\varepsilon t} |x_j(t-s)|) ds \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \xi_i \left\{ e^{\varepsilon t} \left\{ \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) \left[-e_i^k |x_i(t)| + \sum_{j=1}^n |a_{ij}^k| |f_j^k(x_j(t))| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}^k| \int_{-\infty}^t k_{ij}^k(t-s) |f_j^k(x_j(s))| ds \right] \right\} + \varepsilon e^{\varepsilon t} |x_i| + \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) \sum_{j=1}^n L_j^k |b_{ij}^k| \times \int_0^{+\infty} k_{ij}^k(s) (e^{\varepsilon(t+s)} |x_j(t)| - e^{\varepsilon t} |x_j(t-s)|) ds \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \xi_i \left\{ e^{\varepsilon t} \left\{ \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) \left[-e_i^k |x_i(t)| + \sum_{j=1}^n |a_{ij}^k| L_j^k |x_j(t)| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}^k| L_j^k \int_0^{+\infty} k_{ij}^k(s) |x_j(t-s)| ds \right] \right\} + \varepsilon e^{\varepsilon t} |x_i| + \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) \sum_{j=1}^n L_j^k |b_{ij}^k| \times \int_0^{+\infty} k_{ij}^k(s) (e^{\varepsilon(t+s)} |x_j(t)| - e^{\varepsilon t} |x_j(t-s)|) ds \right\} \\ &\leq e^{\varepsilon t} \sum_{i=1}^n \xi_i \left\{ \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) \left[(-e_i^k + \varepsilon) |x_i(t)| + \sum_{j=1}^n (|a_{ij}^k| + |b_{ij}^k| p_{ij}^k(\varepsilon)) L_j^k |x_j(t)| \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\leq e^{\varepsilon t} \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) \sum_{i=1}^n \left[(-e_i^k + \varepsilon) \xi_i + \sum_{j=1}^n \xi_j L_j^k (|a_{ji}^k| + |b_{ji}^k| p_{ji}^k(\varepsilon)) \right] |x_i(t)| \quad (7)$$

定义函数:

$$h_i^k(\varepsilon) = (-e_i^k + \varepsilon) \xi_i +$$

$$\sum_{j=1}^n \xi_j L_j^k (|a_{ji}^k| + |b_{ji}^k| p_{ji}^k(\varepsilon))$$

由不等式(4)知道:

$$-e_i^k \xi_i + \sum_{j=1}^n \xi_j L_j^k (|a_{ji}^k| + |b_{ji}^k|) = \delta_i^k < 0$$

显然 $h_i^k(0) = \delta_i^k < 0$. 因为 $h_i^k(\varepsilon)$ 是连续函数, 所以存在 $\varepsilon_i^k > 0$, 使得 $h_i^k(\varepsilon_i^k) < 0$. 令 $\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq N, 1 \leq i \leq n} \varepsilon_i^k$, 有 $h_i^k(\varepsilon) < 0 (i=1, 2, \dots, n; k \in \Sigma)$. 结合不等式(7)可得:

$$D^+ V(x, t) \leq e^{\varepsilon t} \sum_{k=1}^N \gamma_k(t) \sum_{i=1}^n h_i^k(\varepsilon) |x_i(t)| \leq 0$$

所以:

$$V(x, t) \leq V(x, t_0) \quad (8)$$

又因为当 $t=t_0$ 时, 第 i_0 个子系统被激活, 所以:

$$\begin{aligned} V(x, t_0) &= \sum_{i=1}^n \xi_i \left\{ e^{\varepsilon t_0} |x_i(t_0)| + \sum_{k=1}^N \gamma_k(t_0) \sum_{j=1}^n L_j^k |b_{ij}^k| \times \int_0^{+\infty} k_{ij}^k(s) \left(\int_{t_0-s}^{t_0} e^{\varepsilon(\tau+s)} |x_j(\tau)| d\tau \right) ds \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i \left\{ e^{\varepsilon t_0} |u_i^{\sigma(t_0)}(t_0) - u_i^*| + \sum_{j=1}^n L_j^k |b_{ij}^k| \int_0^{+\infty} k_{ij}^k(s) \left(\int_{t_0-s}^{t_0} e^{\varepsilon(\tau+s)} |u_j^{\sigma(t_0)}(\tau) - u_j^*| d\tau \right) ds \right\} \\ &\text{由积分中值定理知道, 存在 } \rho > 0 \text{ 使得:} \\ V(x, t_0) &= \sum_{i=1}^n \xi_i \left\{ e^{\varepsilon t_0} |u_i^{\sigma(t_0)}(t_0) - u_i^*| + \sum_{j=1}^n L_j^k |b_{ij}^k| \times \left(\int_{t_0-\rho}^{t_0} e^{\varepsilon\tau} |u_j^{\sigma(t_0)}(\tau) - u_j^*| d\tau \right) \int_0^{+\infty} k_{ij}^k(s) e^{\varepsilon s} ds \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \xi_i \left\{ e^{\varepsilon t_0} \sup_{s \leq t_0} |u_i^{\sigma(t_0)}(s) - u_i^*| + \sum_{j=1}^n L_j^k |b_{ij}^k| \rho e^{\varepsilon t_0} \times \sup_{s \leq t_0} |u_j^{\sigma(t_0)}(\tau) - u_j^*| p_{ij}^k(\varepsilon) \right\} \\ &\leq e^{\varepsilon t_0} \sum_{i=1}^n \xi_i \sup_{s \leq t_0} |u_i^{\sigma(t_0)}(s) - u_i^*| + \rho e^{\varepsilon t_0} \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \sum_{j=1}^n L_j^k |b_{ij}^k| \times p_{ij}^k(\varepsilon) \sup_{s \leq t_0} |u_j^{\sigma(t_0)}(\tau) - u_j^*| \\ &\leq e^{\varepsilon t_0} \sum_{i=1}^n \xi_i \sup_{s \leq t_0} |u_i^{\sigma(t_0)}(s) - u_i^*| + \rho e^{\varepsilon t_0} \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=1}^n \xi_j L_i^k |b_{ji}^k| \times p_{ji}^{t_0}(\varepsilon) \sup_{s \leq t_0} |u_i^{\sigma(t_0)}(\tau) - u_i^*| \right) \\
 & \leq e^{\varepsilon t_0} \sum_{i=1}^n (\xi_i + \rho \sum_{j=1}^n \xi_j L_i^k |b_{ji}^k| p_{ji}^{t_0}(\varepsilon)) \sup_{s \leq t_0} |u_i^{\sigma(t_0)}(s) - u_i^*| \\
 & \leq e^{\varepsilon t_0} M \left(\sum_{i=1}^n \sup_{s \leq t_0} (u_i^{\sigma(t_0)}(s) - u_i^*)^2 \right)^{1/2} \\
 & = M \| \varphi^{\sigma(t_0)} - u_i^* \| e^{\varepsilon t_0} \tag{9}
 \end{aligned}$$

其中:

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{n} (\xi_i + \rho \sum_{j=1}^n \xi_j L_i^k |b_{ji}^k| p_{ji}^{t_0}(\varepsilon))$$

结合(6)~(9)式可得:

$$e^{\varepsilon t} \sum_{i=1}^n \xi_i |u_i - u_i^*| \leq M \| \varphi^{t_0} - u^* \| e^{\varepsilon t_0}$$

令 $\xi = \min_{1 \leq i \leq n} \xi_i$ 可得:

$$\left(\sum_{i=1}^n (u_i - u_i^*)^2 \right)^{1/2} \leq \frac{M}{\xi} \| \varphi^{t_0} - u^* \| e^{-\varepsilon(t-t_0)}$$

由定义 1 知道,系统(3)的平衡点 u^* 是鲁棒指数稳定的. 证毕.

注 1 从定理 2 的证明中可以看到,系统(3)的指数收敛率为 $\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq N} \min_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i^k$, 其值依赖于向量 ξ . 因此, 为了得到最大收敛率 ε , 我们可以解限制条件为 $h_i^k(\varepsilon) < 0 (i=1, 2, \dots, n; k \in \Sigma)$ 的优化问题.

注 2 我们知道, 在任意切换的条件下得到的稳定条件可能具有较强的保守性. 但是这样的条件能确保系统的稳定性对切换信号具有鲁棒性. 由于网络系统相互依赖的动力学特征, 使得切换信号往往是无法确定的. 因此, 系统的稳定性对切换信号的鲁棒性显得十分必要.

4 算例

下面给出一个数值仿真算例. 考虑如下二阶时滞切换 UCNNs 系统:

$$\begin{cases} \frac{du_i(t)}{dt} = -e_i^{\sigma(t)} u_i(t) + \sum_{j=1}^2 a_{ij}^{\sigma(t)} g_j^{\sigma(t)}(u_j(t)) + \\ \sum_{j=1}^2 b_{ij}^{\sigma(t)} \int_{-\infty}^t k_{ij}^{\sigma(t)}(t-s) g_j^{\sigma(t)}(u_j(s)) ds \\ E_k \in E_{lk}, A_k \in A_{lk}, B_k \in B_{lk} \\ k \in \{1, 2\}, i = 1, 2 \end{cases} \tag{10}$$

其中:

$$\sigma(t) : [0, +\infty) \rightarrow \Sigma = \{1, 2\}$$

$$k_{ij}^k(s) = e^{-s}, (i, j, k=1, 2)$$

$$g^1(u) = g^2(u)$$

$$= (0.5u_1 + 0.5\sin u_1, 0.5u_2 + 0.5\sin u_2)^T$$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} [4.500, 4.516] & 0 \\ 0 & [4.500, 4.520] \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} [-0.235, 1.208] & [-1.236, 2.410] \\ [-0.060, 0.040] & [-0.012, 0.040] \end{pmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} [-0.110, 0.031] & [-0.211, 0.320] \\ [-0.112, 0.130] & [0.126, 0.540] \end{pmatrix}$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} [4.000, 4.112] & 0 \\ 0 & [4.000, 4.121] \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} [-0.951, 1.010] & [-0.036, 0.100] \\ [1.356, 2.280] & [-0.148, 0.802] \end{pmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{pmatrix} [0.015, 0.350] & [-0.056, 0.100] \\ [-0.200, 0.159] & [-0.128, 0.113] \end{pmatrix}$$

显然, g^1, g^2 满足假设 1, 且 $L_1 = L_2 = I_2$ (其中 I_2 为 2 阶单位矩阵),

$$E_1^* = \begin{pmatrix} 4.5 & 0 \\ 0 & 4.5 \end{pmatrix}, E_2^* = \begin{pmatrix} 4.0 & 0 \\ 0 & 4.0 \end{pmatrix}$$

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 1.208 & 2.410 \\ 0.060 & 0.040 \end{pmatrix}, B_1^* = \begin{pmatrix} 0.110 & 0.320 \\ 0.130 & 0.540 \end{pmatrix}$$

$$A_2^* = \begin{pmatrix} 1.010 & 0.100 \\ 2.280 & 0.802 \end{pmatrix}, B_2^* = \begin{pmatrix} 0.350 & 0.100 \\ 0.200 & 0.128 \end{pmatrix}$$

取 $\xi = (1, 1)$, 经简单计算可知:

$$-e_i^k \xi_i + \sum_{j=1}^n \xi_j L_j^k (|a_{ji}^{*k}| + |b_{ji}^{*k}|) < 0$$

$$(i, j, k = 1, 2)$$

满足定理 2 的所有条件, 因此系统(10)在任意切换信号下是鲁棒指数稳定的.

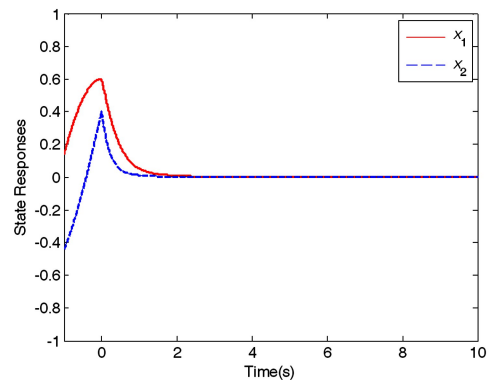


图 1 切换系统(10)中子系统 1 的状态曲线

Fig.1 State responses of the subsystem 1 in the switched system (10)

为了数值模拟, 令 $E_{lk} = E_k^*, A_{lk} = A_k^*, B_{lk} = B_k^*, k=1, 2$. 初值条件为 $u_1(s) = \cos 2s - 0.4, u_2(s) = \sin 2s + 0.4, s \leq 0$. 数值仿真结果见图 1~图 3. 可以看到, 系统(10)的轨线收敛到平衡点 0, 这与定理 2 的结论是一致的. 该数值算例结果不仅说明了定

理 2 中的条件如何应用,同时也验证了定理 2 条件的正确性.

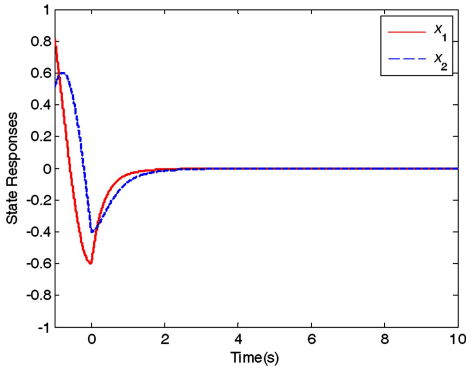


图 2 切换系统(10)中子系统 2 的状态曲线

Fig.2 State responses of the subsystem 2 in the switched system (10)

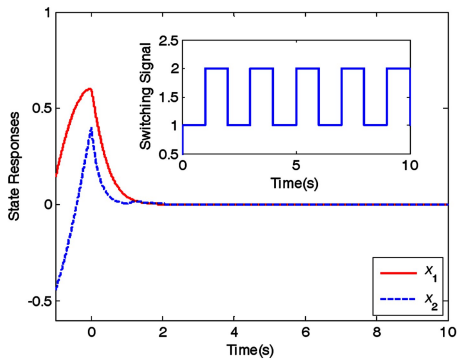


图 3 切换系统(10)的状态曲线

Fig.3 State responses of the switched system (10)

5 结论

本文研究了具有无穷时滞切换不确定细胞神经网络系统在任意切换下的鲁棒指数稳定性. 利用同胚映射和 M -矩阵理论研究了子系统平衡点的存在性, 唯一性和稳定性; 利用 Lyapunov 泛函方法研究时滞切换不确定细胞神经网络的鲁棒指数稳定性. 有别于现有的线性矩阵不等式相关结论, 本文得到的稳定性条件是代数显式结构, 有利于实际工程应用. 最后通过数值算例说明如何应用定理的条件, 同时也验证了结论的正确性.

参 考 文 献

- Chua L O, Yang L. Cellular neural networks; theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1988, 35 (10):1257~1272
- Chua L O, Yang L. Cellular neural networks; applications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1988, 35 (10):1273~1290
- Chua L O. CNN: A paradigm for complexity. Singapore: World Scientific, 1998
- Gupta M, Jin L, Homma N. Static and dynamic neural networks; from fundamentals to advanced theory. New York: Wiley, 2003
- Park J H, Kwon O M, Lee S M. LMI optimization approach on stability for delayed neural networks of neutral-type. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 196 (1):236~244
- Zhang J. Absolutely exponential stability in delayed cellular neural networks. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2002, 30(4):395~409
- Zhang J, Suda Y, Iwasa T. Absolutely exponential stability of a class of neural networks with unbounded delay. *Neural Networks*, 2004, 17(3):391~397
- Zhang J. Global exponential stability of interval neural networks with variable delays. *Applied Mathematics Letters*, 2006, 19(11):1222~1227
- Roska T, Chai W W, Balsa M, et al. Stability and dynamics of delay-type general and cellular neural networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1992, 39(6):487~490
- 刘铭, 徐晓峰, 张春蕊. 中立型时滞反馈扭转控制系统的稳定性分析. *动力学与控制学报*, 2015, 13(6):449~453 (Liu M, Xu X F, Zhang C R. Stability analysis of delayed torsional vibration system of neutral type. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, 13(6):449~453 (in Chinese))
- Li N, Cao J. Switched exponential state estimation and robust stability for interval neural networks with the average dwell time. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2015, 32(2):257~276
- Ahn C K. An H_∞ approach to stability analysis of switched Hopfield neural networks with time-delay. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 60(4):703~711
- Lian J, Zhang K, Feng Z. Stability analysis for switched Hopfield neural networks with time delay. *Optimal Control Applications and Methods*, 2012, 33(4):433~444
- Wu L, Feng Z, Zheng W X. Exponential stability analysis for delayed neural networks with switching parameters: average dwell time approach. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(9):1396~1407
- Arunkumar A, Sakthivel R, Mathiyalagan K, et al. Ro-

- bust stability criteria for discrete-time switched neural networks with various activation functions. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218(22):10803~10816
- 16 舒仲周,张继业,曹登庆. 运动稳定性. 北京:中国铁道出版社, 2001 (Shu Z Z, Zhang J Y, Chao D Q. Stability of Motion. Beijing: China Railway Publishing House, 2001 (in Chinese))
- 17 Siljak, D D. Large-scale dynamic systems: stability and structure. New York: North Holland, 1978
- 18 Forti M, Tesi A. New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1995, 42(7):354~366

EXPONENTIAL STABILITY OF TIME-DELAYED SWITCHED UNCERTAIN NEURAL NETWORKS SYSTEMS *

Xue Huanbin^{1,2†} Zhang Jiye²

(1. College of Mathematics and Statistics, Hanshan Normal University, Chaozhou 521041, China)

(2. State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract In this paper, a class of switched uncertain cellular neural networks (UCNNs) systems with unbounded delay under arbitrary switching were investigated. By using the homeomorphic mapping theorem and M-matrix theory, the sufficient conditions for the existence, uniqueness and exponential stability of the equilibrium point of UCNNs systems with unbounded delay were obtained. By Lyapunov functional approach, we studied the robust exponential stability of arbitrary switching delay UCNNs systems. Sufficient conditions to guarantee the global exponential stability of switched delay UCNNs systems were also derived, and the stability was robust to both parameter perturbations and switching perturbations.

Key words neural networks, robust exponential stability, time delay, switched system, Lyapunov functional