

微尺度悬臂管颤振的研究*

郭勇 谢建华[†]

(西南交通大学力学与工程学院, 成都 610031)

摘要 本文基于修正的偶应力理论并考虑 Lagrange 应变张量所给出的几何非线性, 运用 Hamilton 原理建立了微悬臂管的平面振动微分方程. 通过对线性方程的特征值分析, 得到了微管的前四阶复频率及临界流速—质量比曲线(临界流速曲线)对材料长度尺寸参数的依赖关系; 并且发现宏观管和微尺度管(或者具有不同材料长度尺寸参数的微管)的临界流速曲线可能会相交. 运用基于中心流形—范式理论的投影法, 计算了临界流速处系统的第一李雅普诺夫系数和退化特征值关于流速的变化率, 以此为基础论证了分岔的超临界性质; 并对临界流速曲线上的滞后部分及不同尺度管的该曲线的交点处的动力学性质作了探讨, 发现了不同的分岔方向.

关键词 微尺度悬臂管, 偶应力理论, 临界流速-质量比曲线(临界流速曲线), 无穷维, 投影法

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-61

引言

输液管道是一种重要的工程结构, 其动力学行为已经得到广泛、深入的研究^[1-9]. 随着科学技术的发展, 管道的特征尺寸可被设计得越来越小, 在文献[10]中, 圆型微管的内径已达 $1 \sim 100 \mu\text{m}$ 的数量级. 微尺度管道广泛应用于微机电力学系统以及微流体的传输, 例如微流管已应用于谐振器的设计及药物的注射^[11,12], 微流管喷头已应用于微小平面的书写及打印等等^[13,14]. 为给实际应用提供理论基础, 有必要对微尺度流管的动力特性及稳定性进行深入的研究. Fleck 等^[15]、Lam 等^[16]及 McFarland 等^[17]的工作表明, 微结构具有尺度依赖行为. 因此, 不能直接对微尺度管应用宏观管理论, 需要借助非经典的连续介质力学理论对其加以描述. 实验观测表明, 对于微结构的扭转、弯曲等, 由 Yang 等^[18]所修正的偶应力理论能够成功地估计其尺度效应. Park 等^[19]运用修正的偶应力理论预测的环氧聚合材料梁的弯曲刚度和实验结果相符合. 基于修正的偶应力理论, 微梁的自由振动^[20]、强迫振动^[21]、屈曲^[22]、参数振动^[23]等相继得到研究. 文献[24]建立了微型 Mindlin 板的非线性动力学方程.

在微尺度流管方面, Wang^[25]、Xia 等^[26]分别在输液管的欧拉梁模型和 Timoshenko 梁模型假设下, 考察了不同微尺度情形流速对管道固有频率的影响. 文献[27]不仅考虑了管材料的微尺度效应, 还引入了管内流体的微尺度因素. Yang 等^[28]考虑轴向拉伸所导致的几何非线性, 基于修正的偶应力理论研究了微管的自由振动. Hosseini 等^[29]考虑悬臂微管的稳定性问题, 研究了微尺度效应对系统频率、临界流速的影响, 发现相同条件下, 微管较之于宏观管具有更大的频率及更高的临界流速. Bahaadini 等^[30]进一步研究了耗散等因素对粘弹性碳纳米悬臂管稳定性的影响.

从已有文献来看, 在微尺度输液管的动力学建模方面, 或者采用两端支撑管的非线性振动方程, 或者采用仅适用于分析悬臂管复频率、临界流速的线性振动方程, 对于微悬臂管的大振幅非线性振动问题, 目前似还没有相应的文献可以参考, 因此在非线性建模方面的工作还有待于进一步完善, 相应的非线性问题有待于研究.

本文首先建立了微悬臂输液管平面大振幅振动的微分方程. 从无穷维动力系统的角度对其进行了研究, 这与通常的基于 Galerkin 方法研究弹性体

2017-01-06 收到第 1 稿, 2017-02-22 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(11572263, 11732014)资助

[†] 通讯作者 E-mail: jhxie2000@126.com

的振动有本质区别,包括:通过对线性部分特征值的分析研究了材料长度尺寸参数对管道的前几阶复频率及临界流速对的影响;特别地,运用投影法计算了临界流速处系统的第一李雅普诺夫系数和退化特征值关于流速的变化率;以此为基础论证了分岔的超临界特性,并发现了不同的分岔方向。

1 力学模型与运动微分方程

如图1所示,长为 L 的微悬臂输液管,横截面积为 A_p ,抗弯刚度为 EI ,单位长度的质量为 m ,其输送的流体单位长度的质量为 M ,流速 V 相对管横截面的形心的连线(管形心线)为常数.管的横截面是对称的,如矩形或圆等。

在管道未变形时,以管形心线所在直线为 X 轴,管内流体速度方向为 X 轴正向,悬臂端面为 YZ 平面,管形心线与 YZ 平面的交点为原点 O ,建立参考系 $O-XYZ$ (Lagrange坐标系),用以给定管道上物质点未变形时的位形,管道的振动平行于 XZ 平面;在管道发生变形后,取另一个坐标系 $o-xyz$ (Euler坐标系),其与 $O-XYZ$ 重合,用以刻画管道上物质点的瞬时位形.一个点的变形通过同一质点在非变形和变形状态下坐标的关系来描述^[31],令 (X, Y, Z) 表示某一质点的起始位置, (x, y, z) 表示同一质点变形后(设为 t 时刻)的位置,则该质点的位移可描述为:

$$\begin{aligned} u_1(X, Y, Z, t) &= x - X \\ u_2(X, Y, Z, t) &= y - Y \\ u_3(X, Y, Z, t) &= z - Z \end{aligned} \quad (1)$$

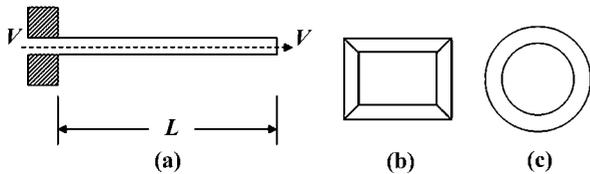


图1 (a)微尺度悬臂输液管; (b)矩形截面; (c)圆截面

Fig.1 (a) Micro-scale cantilever conveying fluid pipe;

(b) Rectangular section; (c) Circular section

对于细长管的振动,可以采用欧拉-贝努利梁模型,又因管道的振动平行于 XZ 平面,则(1)式可以写成:

$$\begin{aligned} u_1(X, Y, Z, t) &= u_1(X, 0, 0, t) - Z\psi \\ u_2(X, Y, Z, t) &= 0 \\ u_3(X, Y, Z, t) &= u_3(X, 0, 0, t) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 ψ 是管道横截面的转角,它仅是 X 的函数.将(2)式简写成:

$$u_1 = u - Z\psi, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w \quad (3)$$

可见 u, w 分别表示点 $(X, 0, 0)$ (其位于管形心线上)在 t 时刻沿轴向和横向的位移.记未变形时管形心线上一点 $(X, 0, 0)$ 距坐标原点的弧长为 s ,显然 s 与 X 相等,为凸显物理意义,在下面的推导中均以 s 代替 X .对于悬臂管,可以认为管形心线在运动过程中是没有伸缩的^[5],即:

$$[1 + (\partial u / \partial s)]^2 + (\partial w / \partial s)^2 = 1 \quad (4)$$

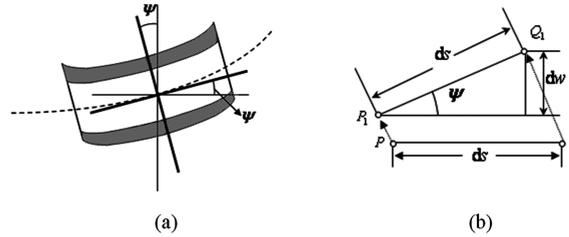


图2 (a)变形后的微元体; (b)几何关系

Fig.2 (a) An element of the deformed pipe; (b) Geometrical relation

欧拉-贝努利梁理论假设管道横截面在变形后仍然保持为平面且垂直于管形心线(图2(a)),结合不可伸缩条件(4)可以得到(图2(b): PQ 运动到 P_1Q_1):

$$\sin\psi = \partial w / \partial s \quad (5)$$

对于微结构的扭转、弯曲等,偶应力理论能够成功地估计其尺度效应^[31],其中微元体的应变能密度表达式和通常弹性力学中给出的不同,其不仅是应变张量的函数,而且还包括曲率张量对能量的贡献项.假设制作管的材料的本构关系满足Yang的修正偶应力理论^[18],则曲率张量对能量的贡献部分可由含有一个材料长度尺寸参数的项加以刻画.根据文献[18]中的结论,均匀、各向同性线性弹性材料区域 Ω 内的应变能 U 可以写成:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} : \boldsymbol{\chi}) dv \quad (6)$$

其中 $dv = dsdYdz$ (下文中如没有其它说明,均是如此), $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 分别是应力张量和应变张量, $\mathbf{m}, \boldsymbol{\chi}$ 分别为偶应力张量的偏部分和对称曲率张量,其相互间的关系如下:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\delta} + 2G\boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (1/2) [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + (1/2) \nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (8)$$

$$m = 2l^2GX \tag{9}$$

$$\chi = (1/2) [\nabla\theta + (\nabla\theta)^T] \tag{10}$$

λ, G 为 Lamé 常数, 其中 G 也就是通常的剪切模量; δ 是单位张量; (8) 式为 Lagrange 应变张量, ∇ 是拉氏梯度算子; l 是表征微尺度效应的材料长度尺寸参数, 取决于材料性质^[25]; u 为位移矢量, 其分量见(3)式; θ 可通过 u 的旋度表示如下:

$$\theta = (1/2) \text{curl}(u) \tag{11}$$

由(3)、(11)可计算出(7)~(10), 从而得管道的应变能(6)式:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial s} - Z \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right]^2 (\lambda + 2G) + G \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} - \psi \right)^2 + \frac{1}{4} l^2 G \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 \right\} dv \tag{12}$$

横向振动相对于管的长度来说是小量, 不妨设其为 $O(\varepsilon)$ 阶的. 几何大变形意味着方程中的非线性项会影响系统的定性动力学性质, 且在平衡态附近, 低阶的非线性项才起决定性的作用, 因此本文中仅保留了三次非线性项. 对于一对纯虚根失稳情形(悬臂管为此种失稳方式), 非线性项对系统振动状态的影响可通过第一李雅普诺夫系数的正负来刻画^[4,34], 本文 2.2 节分别对宏观管和微尺度管计算了该系数: 若为负, 则系统发生超临界的 Hopf 分岔; 若为正, 则系统发生亚临界的 Hopf 分岔. 运用哈密顿原理推导振动方程时, 求变分的过程会让作用量泛函的次数降低一次, 因此在下面的处理中, (12) 式将保留到四次项, 下文关于动能的推导中亦是如此.

由(4)解出:

$$u' + \frac{1}{2} (w')^2 = O(|w'|^4) \tag{13}$$

其中 $(\)' = \partial(\)/\partial s$.

由(5)式解出:

$$w' = \sin(\psi) = \psi - \frac{1}{3!} \psi^3 + O(|\psi|^5)$$

从而:

$$w' - \psi = O(|\psi|^3) \tag{14}$$

$$\psi = w' + \frac{1}{3!} (w')^3 + O(|w'|^5) \tag{15}$$

(15) 式两边关于 s 求导, 得:

$$\psi' = w'' + \frac{1}{2} (w')^2 w'' + O(|w''||w'|^4) \tag{16}$$

将(13)、(14)及(16)代入(12)式, 整理可得:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ Z^2 (w'')^2 [1 + (w')^2] (\lambda + 2G) + \frac{1}{4} l^2 G (w'')^2 [4 + 2(w')^2] \right\} dv + \dots \\ = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I (w'')^2 [1 + (w')^2] (\lambda + 2G) + \frac{1}{4} A_p l^2 G (w'')^2 [4 + 2(w')^2] \right\} ds + \dots \tag{17}$$

其中 I 为管道横截面关于 Y 轴的惯性矩.

忽略泊松比, 以 EI 代替 $(\lambda + 2G)I$, 势能(17)中与宏观部分对应的项与文献[5]中利用公式:

$$U = (E/2) \int_0^L I k^2 ds$$

计算出的结果一致. 上式中的 k 为管形心线的曲率.

系统的总动能^[5]为:

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] ds + \frac{1}{2} M \int_0^L \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t} + V \left(\frac{\partial u}{\partial s} + 1 \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right\} ds \tag{18}$$

将势能(17)式及动能(18)式代入描述管道振动的哈密顿方程^[1]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_p + T_f - U) dt - \int_{t_1}^{t_2} MV(\dot{\mathbf{r}}_L + V\mathbf{r}'_L) \cdot \delta \mathbf{r}_L dt = 0 \tag{19}$$

上式中 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t) = (s + u, 0, w)$ 表示管形心线上一点 $(s, 0, 0)$ 在 t 时刻的位置矢量. 下标 L 表示相应的量在管道自由端 $s = L$ 处的值, 点和撇分别代表 $\partial(\)/\partial t$ 和 $\partial(\)/\partial s$. 由(19)式最终可得系统的振动方程:

$$(m + M) \ddot{w} + 2MV \dot{w}' (1 + w'^2) + w'' MV^2 (1 + w'^2) - w'' \left[\int_s^L \int_0^s (m + M) (\dot{w}'^2 + w' \ddot{w}') ds ds \right] + \int_s^L (2MV w' \dot{w}' + MV^2 w' w'') ds + w' \int_0^s (m + M) (\dot{w}'^2 + w' \ddot{w}') ds + EI (w^{(4)} + 4w' w'' w''' + w''^3 + w^{(4)} w'^2) + A_p l^2 G (w^{(4)} + 2w' w'' w''' + \frac{1}{2} w''^3 +$$

$$\frac{1}{2}w^{(4)}w'^2 = 0 \quad (20a)$$

及边界条件:

$$w(0,t) = w'(0,t) = w''(L,t) = w'''(L,t) = 0 \quad (20b)$$

引入如下无量纲量:

$$\eta = \frac{w}{L}, \quad \xi = \frac{s}{L}, \quad \tau = \left[\frac{EI}{(m+M)L^4} \right] \frac{1}{2}t,$$

$$\nu = \left(\frac{M}{EI} \right) \frac{1}{2}VL, \quad \beta = \frac{M}{M+m}$$

将方程(20a)写成无量纲的形式:

$$\ddot{\eta} + 2\nu\sqrt{\beta}\dot{\eta}'(1 + \eta'^2) + \nu^2\eta''(1 + \eta'^2) - \eta'' \left[\int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} (\dot{\eta}'^2 + \eta'\ddot{\eta}') d\xi d\xi + \int_{\xi}^1 (2\nu\sqrt{\beta}\eta'\dot{\eta}' + \nu^2\eta'\eta'') d\xi \right] + \eta' \int_0^{\xi} (\dot{\eta}'^2 + \eta'\ddot{\eta}') d\xi + (\eta^{(4)} + 4\eta'\eta''\eta''' + \eta'^3 + \eta^{(4)}\eta'^2) + \frac{A_p l^2 G}{EI} (\eta^{(4)} + 2\eta'\eta''\eta''' + \frac{1}{2}\eta'^3 + \frac{1}{2}\eta^{(4)}\eta'^2) = 0 \quad (21a)$$

相应地边界条件(20b)为:

$$\eta(0,\tau) = \eta'(0,\tau) = \eta''(1,\tau) = \eta'''(1,\tau) = 0 \quad (21b)$$

式(21a)的第三行,即含有材料长度尺寸参数 l 的项,体现了微尺度效应对振动方程的影响,当 $l=0$ 时(即宏观管),其可转化为文献[6]及文献[31]中的方程.设 $l_0 = (1/2)(A_p l^2 G/EI)$, 其为无量纲化的材料长度尺寸参数,用以刻画管道的微尺度效应,其不仅出现在方程的线性项中,可能影响诸如频率等线性特征(具体情况见下文关于特征值问题的分析);也出现在方程的非线性项中,可能影响系统的分岔性质(具体情况见下文关于第一李雅普诺夫系数的计算).此外,(21a)中具有两个非线性的惯性项,类似的情况还可以参见文献[5]等.非线性惯性项的出现使得我们不能直接使用动力系统的相关理论方法,需将其消去.应用摄动法思想^[5],整理并略去高阶项后,可计算出:

$$\int_0^{\xi} \eta'\dot{\eta}' d\xi = - \int_0^{\xi} 2\nu\sqrt{\beta}\eta''' d\xi - \int_0^{\xi} \nu^2\eta'\eta''' d\xi - (1 + 2l_0)\eta'\eta^{(4)} +$$

$$\int_0^{\xi} (1 + 2l_0)\eta''\eta^{(4)} d\xi \quad (22)$$

代入(21a),整理后有:

$$\ddot{\eta} + \nu^2\eta'' + 2\sqrt{\beta}\nu\dot{\eta}' + (2l_0 + 1)\eta^{(4)} + \frac{3}{2}[\eta'^3 + 2\eta'\eta''\eta'''] - \eta'' \int_s^1 \int_0^s [\dot{\eta}'^2 + 2\sqrt{\beta}\nu\dot{\eta}'\eta'' + \nu^2\eta'^2 + \eta''\eta^{(4)}] ds ds + \eta' \int_0^s [\dot{\eta}'^2 + 2\sqrt{\beta}\nu\dot{\eta}'\eta'' + \nu^2\eta'^2 + \eta''\eta^{(4)}] ds + l_0[-\eta'^2\eta^{(4)} + 2\eta'\eta''\eta''' + 2\eta'^3 + 2\eta' \int_0^s \eta''\eta^{(4)} ds - 2\eta'' \int_s^1 \int_0^s \eta''\eta^{(4)} ds ds] = 0 \quad (23)$$

2 运动微分方程的研究

当研究非线性系统的一个特定解的稳定性时,首先要考察特定解处的线性化系统(或变分方程),以此确定该解的稳定性及失稳条件.若线性化系统的特征值实部都小于零(或变分方程的特征乘子模小于1),则该解是稳定的;若存在实部大于零的特征值(或模大于1的特征乘子),则该解是不稳定的.在这两种情况下,参数的充分小扰动不会改变相应解的稳定性.若线性化系统具有实部等于零的特征值(或变分方程具有模为1特征乘子),那么当系统的参数发生微小的扰动时,相应解的稳定性就可能发生变化,出现分岔的现象.

我们考察方程(23)在解 $\eta=0$ (平衡点)处的线性化算子的性质,以确定该解的稳定性和分岔条件.

2.1 线性化方程的研究

作变量代换^[4]:

$$\eta = \eta_2, \quad \eta_1 = \frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} + 2\nu\sqrt{\beta}\eta_2' \quad (24)$$

将方程(23)写成一阶微分方程组的形式:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = L\eta + N(\eta) \quad (25)$$

其中 $\eta = (\eta_1, \eta_2)$,

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -\nu^2(\cdot)'' - (1+2l_0)(\cdot)^{(4)} \\ 1 & -2\nu\sqrt{\beta}(\cdot)' \end{bmatrix} \quad (26a)$$

$$N(\eta) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}[\eta_2''' + 2\eta_2'\eta_2''\eta_2'''] + \eta_2'' \int_0^\xi (\eta_1'^2 + \nu^2\eta_2'^2 + \eta_2''\eta_2^{(4)} - 2\sqrt{\beta}\nu\eta_1'\eta_2'') d\xi d\xi \\ -\eta_2' \int_0^\xi (\eta_1'^2 + \nu^2\eta_2'^2 + \eta_2''\eta_2^{(4)} - 2\sqrt{\beta}\nu\eta_1'\eta_2'') d\xi \\ -l_0(-\eta_2'^2\eta_2^{(4)} + 2\eta_2'\eta_2''\eta_2''' + 2\eta_2''^3 + 2\eta_2' \int_0^\xi \eta_2''\eta_2^{(4)} d\xi - 2\eta_2'' \int_0^\xi \eta_2''\eta_2^{(4)} d\xi d\xi) \\ 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{21} \end{bmatrix} \quad (26b)$$

L 为 (25) 在解 $\eta = 0$ ($\eta_1 = 0, \eta_2 = 0$) 处的线性化算子。

考察 (25) 的线性部分:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = L\eta \quad (27)$$

根据边界条件 (21b) 及坐标变换 (24) 知:

$$\eta_2(0, t) = \eta_2'(0, t) = \eta_2''(1, t) = \eta_2'''(1, t) = 0 \quad (28)$$

应用分离变量法, $\eta = w(\xi)e^{\lambda\tau}$ ($w(\xi) = [w_1(\xi), w_2(\xi)]$), 代入 (27) 式, 得特征方程:

$$Lw = \lambda w \quad (29)$$

由 (28), 得边界条件:

$$w_2(0) = w_2'(0) = w_2''(1) = w_2'''(1) = 0 \quad (30)$$

若 w 不恒为零, 称 λ 为算子 L 的特征值 (边界值问题 (29)、(30))。

我们知道, 对宏观管 ($l_0 = 0$), λ 依赖于流速, 且这种依赖关系在质量比 β 不同时有所区别, 参见图 3。对微尺度管, λ 还依赖于材料长度尺寸参数 l_0 , 两种不同尺度微管的前四阶复频率随流速的变化关系如图 4、图 5 所示。在图 3~图 5 中, 当无量纲流速 $v = 0$ 时, 复频率均位于横轴上, 和悬臂梁情形一致; 当流速增加时, 复频率离开横轴, 图中的标记“○”、“△”、“□”和“☆”表示相应的复频率在无量纲流速递增地取正整数时的值。之所以分别取 l_0 的值为 0、0.1 和 0.2, 原因在于 l_0 为无量纲量, 且 $l_0 \geq 0$, 取 0 值即表示通常的宏观管, 取值 0.1 和 0.2 表示微观程度不同的微尺度管, 以此探讨不同尺度管的动力学性质的差异。

观察图 3~图 5 可知, 不管是哪种质量比, 材料长度尺寸参数越大, 各阶复频率的虚部在相同的流速值处越大, 即管道的固有频率越高, 由此可知微尺度效应使结构刚度提高, Park 等^[19]对微梁, Wang^[25]对两端支撑微管, Hosseini 等^[29]对微悬臂管的研究也得到了类似的结论; 不论宏观管或微观管, 当流速较小时, λ 的实部均小于零, 即此时零解

是稳定的。当流速增加到某个临界值时, λ 包含一对纯虚数特征值, 称其为退化特征值, 而此时其它的特征值的实部均小于零, 因此, 当流速在临界值处变化时, 系统可能发生颤振。临界值由管的某阶复频率穿越横轴 (即实部为零) 时对应的流速所确定, 对宏观管及 $l_0 = 0.1$ 和 $l_0 = 0.2$ 的微尺度管, 临界流速与质量比的关系如图 6 所示。

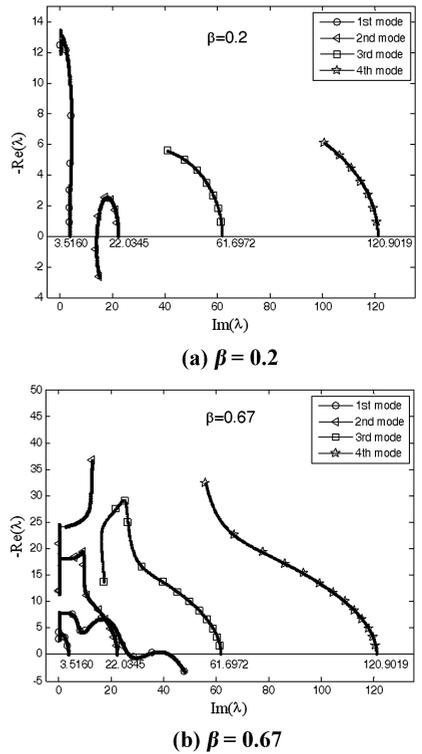


图 3 宏观管的前四阶复频率随流速的变化
Fig.3 Complex frequency of the four lowest modes of the macro-pipe as a function of the flow velocity

结合对图 3~图 5 的观察, 我们可以得出如下几点性质: 首先, 临界流速依赖于质量比, 当 $\beta = 0.2$ 时, 如图 3(a)、图 4(a) 所示, 第二阶复频率最先穿越横轴, 且没有接续的再次穿越, 从而该质量比对应的临界流速仅有一个 (参见图 6); 当 $\beta = 0.67$ 时, 如图 3(b)、图 5(a) 所示, 第一阶复频率穿越横轴

后,在流速变化不大的区间内,又先后两次穿越横轴,从而该质量比对应的临界流速有三个,导致临界流速曲线出现“滞后”现象(参见图6(b)的圆圈处),这里使用“滞后”一词,主要是因为其几何形状与分岔理论中“滞后分岔”的分岔图^[34]相似.其次,临界流速依赖于材料长度尺寸参数,这种依赖关系如图6(a)所示:给定质量比,无量纲材料长度尺寸参数 l_0 越大,临界流速越大.最后,由于滞后现象的存在,不同尺度管的临界流速曲线可能会相交(图6(a)).

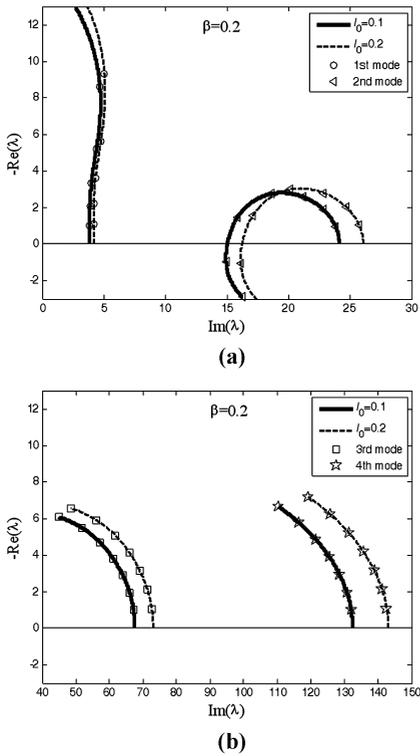


图4 $\beta=0.2$ 时微尺度管的前四阶复频率随流速的变化

(a) 第一、二阶复频率;(b) 第三、四阶复频率

Fig.4 Complex frequency of the four lowest modes of the micro-pipe as a function of the flow velocity for $\beta=0.2$

(a) Complex frequency of the first and second modes;
(b) Complex frequency of the third and fourth modes

还需要指出的是,在临界流速处,穿越横轴的频率为临界频率,临界频率—质量比曲线也依赖于材料长度尺寸参数 l_0 ,如图7所示,对于宏观管($l_0=0$)还可参考文献[2].观察易见:给定质量比,无量纲材料长度尺寸参数 l_0 越大,临界频率越大,此与图3(a)、图4(a)以及图3(b)、图5(a)所显示的一致,这也从另一个角度说明了微尺度效应使结构刚度提高.

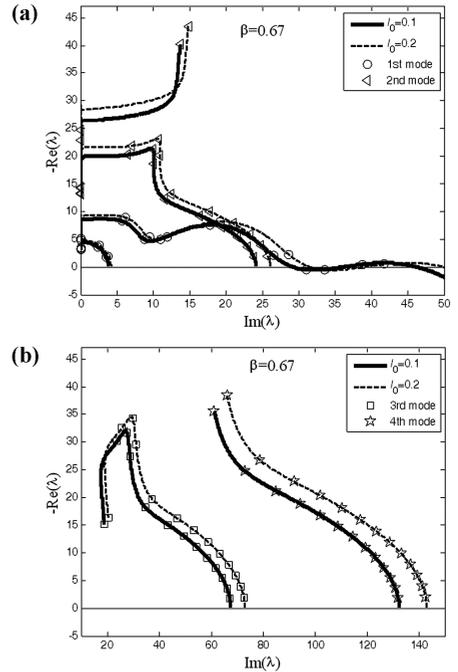


图5 $\beta=0.67$ 时微尺度管的前四阶复频率随流速的变化

(a) 第一、二阶复频率;(b) 第三、四阶复频率

Fig.5 Complex frequency of the four lowest modes of the micro-pipe as a function of the flow velocity for $\beta=0.67$

(a) Complex frequency of the first and second modes;
(b) Complex frequency of the third and fourth modes

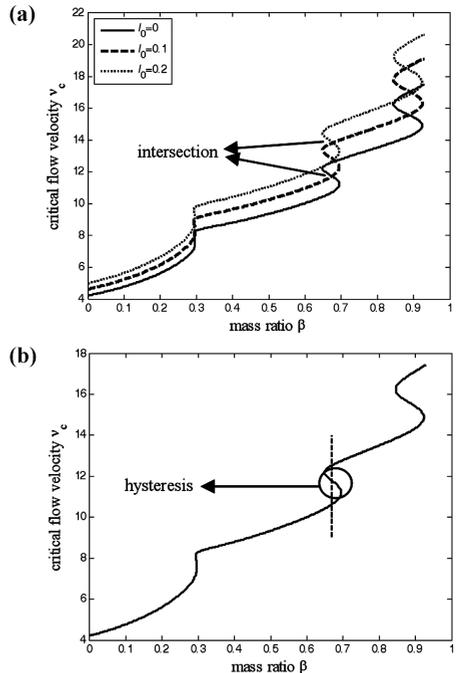


图6 (a) 材料长度尺寸参数不同的管的临界流速曲线;
(b) 临界流速曲线上的滞后现象

Fig.6 (a) Curves of critical flow velocity for the pipes with different material length scale parameters;

(b) Hysteresis on the curve of critical flow velocity

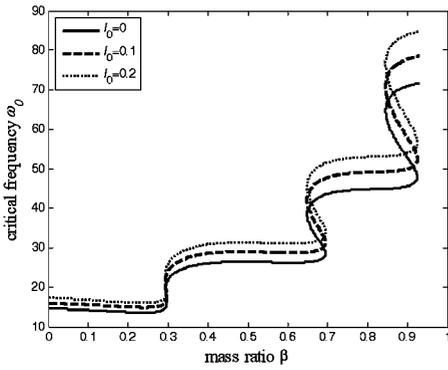


图 7 不同尺度管的临界频率—质量比曲线

Fig.7 Curves of critical frequency versus mass ratio for the pipe with different material length scale parameters

2.2 分岔类型的确定

在临界流速处,平衡点处的线性化算子具有一对纯虚根特征值,其所对应的特征函数称为“临界模态”,该函数张成的线性空间称为“中心子空间”;除此之外的特征值均具有负实部,相应的特征函数及其张成的线性空间分别称为“稳定模态”和“稳定子空间”.根据中心流形理论^[32],存在中心子空间到稳定子空间的一个映射,其图像与中心子空间相切且是一个局部不变流形;平衡点领域内的轨线随时间增大指数地趋于该流形,因此系统的长时性态由系统限制在该流形上的降阶方程决定.当参数变化时,严格来说需要考虑带有参数的中心流形,但是就简单退化而言,仅需在临界点处计算降阶方程的第一李雅普诺夫系数及退化特征值随参数(流速)的变化率,以此获得降阶方程.计算降阶方程时需将原方程向中心子空间(L 的退化特征值所对应的不变子空间)上投影^[33],一般而言,该空间上的线性无关组构成的基不是标准正交的,因此投影不是简单的作点积,而是要先计算对偶基,然后再与对偶基作点积,这就涉及到共轭算子及其特征函数的计算问题.

记算子 L^* 为 L 的共轭算子,通过下面的等式给出:

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle \quad (31)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是由下式定义的内积:

$$\langle x(\xi), y(\xi) \rangle = \int_0^1 x^T \bar{y} d\xi \quad (32)$$

按照共轭算子的定义式(31),我们来计算 L 的共轭算子 L^* .通过分部积分法,并利用边界条件(30),得:

$$L^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2(\cdot)'' - (1+2l_0)(\cdot)^{(4)} & 2\nu\sqrt{\beta}(\cdot)' \end{bmatrix} \quad (33)$$

L^* 作用的函数空间的元素 q 需满足边界条件:

$$q_1(0) = q'_1(0) = q''_1(1) + \nu^2 q_1(1) = q'''_1(1) + \nu^2 q'_1(1) - 2\nu\sqrt{\beta}\lambda q_1(1) = 0 \quad (34)$$

线性算子的特征值集与其共轭算子的相同,但特征函数却需要另加讨论.按照文献[3]中的方法,可通过算子 L 的特征函数给出 L^* 的特征函数的计算公式.对(29)中的 λ ,设相应的 w 的第二个分量为:

$$w_2(\xi) = A_1 e^{a_1 \xi} + A_2 e^{a_2 \xi} + A_3 e^{a_3 \xi} + A_4 e^{a_4 \xi}$$

设 q 满足:

$$L^* q = \bar{\lambda} q$$

以及边界条件(34),则计算 q 的第一个分量的公式为:

$$q_1(\xi) = \bar{A}_1 \bar{a}_1^2 e^{\bar{a}_1(1-\xi)} + \bar{A}_2 \bar{a}_2^2 e^{\bar{a}_2(1-\xi)} + \bar{A}_3 \bar{a}_3^2 e^{\bar{a}_3(1-\xi)} + \bar{A}_4 \bar{a}_4^2 e^{\bar{a}_4(1-\xi)} \quad (35)$$

下面我们用投影法计算系统的第一李雅普诺夫系数.

在临界流速 v_c 处,将方程(25)写成:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right|_{v=v_c} = L_0 \eta + N_0(\eta) = L_0 \eta + \frac{1}{2} B(\eta, \eta) + \frac{1}{6} C(\eta, \eta, \eta) \quad (36)$$

其中 $L_0 = L(v_c)$, $N_0(\cdot)$ 表示 L 和 $N(\cdot)$ 在临界流速 v_c 处的具体形式,而 $B(\eta, \eta)$, $C(\eta, \eta, \eta)$ 分别为两重对称线性型和三重对称线性型,分别表示非线性算子 $N_0(\cdot)$ 在零解处的二阶导数和三阶导数,具体计算见下文.

在临界流速处,系统通过一对纯虚根失稳,记为 $\pm i\omega_0$.设算子 L_0, L_0^* 相应于该特征值的特征函数如下:

$$L_0 w_0 = i\omega_0 w_0, L_0 \bar{w}_0 = -i\omega_0 \bar{w}_0 \\ L_0^* q_0 = -i\omega_0 q_0, L_0^* \bar{q}_0 = i\omega_0 \bar{q}_0 \quad (37a)$$

由算子 $L(L^*)$ 的具体形式(26a),(33),我们可以将特征函数设成:

$$w_0 = \begin{bmatrix} w_{01}(\xi) \\ w_{02}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\omega_0 w_{02} + 2\nu\sqrt{\beta} w'_{02} \\ w_{02} \end{bmatrix} \\ q_0 = \begin{bmatrix} q_{01}(\xi) \\ q_{02}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{01} \\ i\omega_0 q_{01} \end{bmatrix}$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} \bar{w}_{01}(\xi) \\ \bar{w}_{02}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\omega_0 \bar{w}_{02} + 2\nu\sqrt{\beta}\bar{w}'_{02} \\ \bar{w}_{02} \end{bmatrix}$$

$$\bar{q}_0 = \begin{bmatrix} \bar{q}_{01}(\xi) \\ \bar{q}_{02}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{01} \\ i\omega_0 \bar{q}_{01} \end{bmatrix} \quad (37b)$$

由共轭算子的定义容易验证:

$$\langle \bar{w}_0, q_0 \rangle = \langle w_0, \bar{q}_0 \rangle = 0$$

又因为 $\pm i\omega_0$ 是简单的(代数重数为1),可以证明 $\langle w_0, q_0 \rangle \neq 0$,从而能够选择适当的 w_0, q_0 ,使得:

$$\langle w_0, q_0 \rangle = 1 \quad (38)$$

q_0, \bar{q}_0 也称为 w_0, \bar{w}_0 的对偶基或逆变基.算子 L_0 的其它特征值对应的不变子空间为:

$$T^s = \{u \mid \langle u, q_0 \rangle = 0\}$$

据以上分析,可以将 L 作用的空间作分解:

$$\eta = zw_0 + \bar{z}\bar{w}_0 + u \quad (39)$$

其中:

$$\begin{cases} z = \langle \eta, q_0 \rangle \\ u = \eta - \langle \eta, q_0 \rangle w_0 - \langle \eta, \bar{q}_0 \rangle \bar{w}_0 \end{cases} \quad (40)$$

代入方程(25)可得:

$$\begin{cases} \dot{z} = i\omega_0 z + \langle N_0(zw_0 + \bar{z}\bar{w}_0 + u), q_0 \rangle \\ \dot{u} = L_0 u + N_0(zw_0 + \bar{z}\bar{w}_0 + u) - \langle N_0(zw_0 + \bar{z}\bar{w}_0 + u), q_0 \rangle w_0 - \langle N_0(zw_0 + \bar{z}\bar{w}_0 + u), \bar{q}_0 \rangle \bar{w}_0 \end{cases} \quad (41)$$

L_0 在稳定子空间 u 上的限制使得(41)第二个方程的特征值均具有负实部,从而存在形如:

$$u = h_{20}z^2 + h_{11}z\bar{z} + \bar{h}_{20}\bar{z}^2 + O(|z|^3) \quad (42)$$

的中心流形.利用中心流形的不变性,可以计算出(42)中的系数,然后代入(41)的第一式,得有限维的降阶方程.实际上,振动方程(25)仅仅有三次非线性项,故 $B(\eta, \eta) \equiv 0$.将中心流形表达式(42)代入 $N_0(zw_0 + \bar{z}\bar{w}_0 + u)$ 之中仅会影响高于三次的非线性项,从而降阶方程中的所有三次非线性项为:

$$(1/6)C(zw_0 + \bar{z}\bar{w}_0, zw_0 + \bar{z}\bar{w}_0, zw_0 + \bar{z}\bar{w}_0) \quad (43)$$

由PB范式理论^[34],可以通过可逆的坐标变换消去三次项中的非共振项,最终保留下共振项 $z^2\bar{z}$,其系数在标准化(将线性部分的 $i\omega_0$ 化为 i)以后即为第一李雅普诺夫系数,记为 l_1 .最后可以计算出:

$$l_1 = \frac{1}{\omega_0} \text{Re} \langle \frac{1}{2} C(w_0, w_0, \bar{w}_0), q_0 \rangle \quad (44)$$

为了具体地计算(44)式,我们在此介绍多重线性型的定义.

设 X 和 Y 是Banach空间, $\Phi: X \rightarrow Y$ 是一个可微映射,其在点 $x_0 \in X$ 处的 k 阶导数是一个 k 重对

称线性映射:

$$d^k: \underbrace{X \times \dots \times X}_{k \text{ 个}} \rightarrow Y$$

d^k 具体形式由下式给出:

$$(d^k \Phi)_{x_0}(x_1, \dots, x_k) = \left. \frac{\partial}{\partial t^1} \dots \frac{\partial}{\partial t^k} \Phi(x_0 + \sum_{i=1}^k t^i x_i) \right|_{t=0} \quad (45)$$

$N(\eta)$ 的每一行可视为向量函数空间 X 到函数空间 Y 的可微映射,其中 X, Y 分别为:

$$X = C_{[0,1]}^1 \times C_{[0,1]}^4, Y = C_{[0,1]}^0 \quad (46a)$$

下面按照式(45)计算 $N(\eta)$ 在点 $x_0 = [\eta_1, \eta_2] = [0, 0]$ 处的三阶导数.在 X 的切空间中取定三个向量:

$$\begin{aligned} x_1 &= [x_{11} \quad x_{21}]^T \\ x_2 &= [x_{12} \quad x_{22}]^T \\ x_3 &= [x_{13} \quad x_{23}]^T \end{aligned} \quad (46b)$$

(26b)中的第二行 N_{21} 已经为零,其三阶导算子记为 $C_{21}(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$;将(46b)代入(26b)的第一行:

$$\begin{aligned} & N_{11}(t^1 x_1 + t^2 x_2 + t^3 x_3) \\ &= -\frac{3}{2} [({}^T i x''_{2i}) 3 + 2(t^i x'_{2i})(t^i x''_{2i})(t^i x'''_{2i})] + \\ & (t^i x''_{2i}) \int_{\xi}^{\xi} \int_0^{\xi} [(t^i x'_{1i})^2 + \nu^2 (t^i x'_{2i})^2 + \\ & (t^i x''_{2i})(t^i x_{2i}^{(4)}) - 2\sqrt{\beta}\nu(t^i x'_{1i})(t^i x''_{2i})] d\xi d\xi - \\ & (t^i x'_{2i}) \int_0^{\xi} [(t^i x'_{1i})^2 + \nu^2 (t^i x'_{2i})^2 + \\ & (t^i x''_{2i})(t^i x_{2i}^{(4)}) - 2\sqrt{\beta}\nu(t^i x'_{1i})(t^i x''_{2i})] d\xi - \\ & l_0 [- ({}^T i x'_{2i}) 2(t^i x_{2i}^{(4)}) + \\ & 2(t^i x'_{2i})(t^i x''_{2i})(t^i x'''_{2i}) + 2({}^T i x''_{2i}) 3 + \\ & 2(t^i x'_{2i}) \int_0^{\xi} (t^i x''_{2i})(t^i x_{2i}^{(4)}) d\xi - \\ & 2(t^i x''_{2i}) \int_{\xi}^{\xi} \int_0^{\xi} (t^i x''_{2i})(t^i x_{2i}^{(4)}) d\xi d\xi] \quad (47) \end{aligned}$$

上式中的指标 i 遵循求和约定,例如 $t^i x''_{2i} = t^1 x''_{21} + t^2 x''_{22} + t^3 x''_{23}$;有小括号“()”,就先对小括号里面的进行求和.将(47)式代入(45)式作计算,并将结果记为:

$$\begin{aligned} & C_{11}(x_1, x_2, x_3) \\ &= -\frac{3}{2} (x''_{2i} x''_{2j} x''_{2k} + 2x'_{2i} x''_{2j} x'''_{2k}) + \\ & x''_{2i} \int_{\xi}^{\xi} \int_0^{\xi} (x'_{1j} x'_{1k} + \nu^2 x'_{2j} x'_{2k} + x''_{2j} x_{2k}^{(4)}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2\sqrt{\beta}\nu x'_{1j}x''_{2k})d\xi d\xi - \\
 & x'_{2i}\int_0^\xi(x'_{1j}x'_{1k} + \nu^2x'_{2j}x'_{2k} + x''_{2j}x_{2k}^{(4)} - \\
 & 2\sqrt{\beta}\nu x'_{1j}x''_{2k})d\xi - l_0(-x'_{2i}x'_{2j}x_{2k}^{(4)} + \\
 & 2x'_{2i}x''_{2j}x_{2k}''' + 2x''_{2i}x''_{2j}x''_{2k} + \\
 & 2x'_{2i}\int_0^\xi x''_{2j}x_{2k}^{(4)} ds - 2x''_{2i}\int_\xi^1\int_0^\xi x''_{2j}x_{2k}^{(4)} d\xi d\xi)
 \end{aligned} \tag{48}$$

其中 i, j, k 取遍 1 到 3, 但是 i, j, k 两两不相等。记:

$$C(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} C_{11}(x_1, x_2, x_3) \\ C_{21}(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \tag{49}$$

令 $x_1 = x_2 = x_3 = \eta$, 就可以得到 (36) 式中的 $C(\eta, \eta, \eta)$ 。由式 (37b) 和 (49) 可得:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}C(w_0, w_0, \bar{w}_0) \\
 & = -\frac{3}{2}[3w''_{02}{}^2\bar{w}''_{02} + 2(w'_{02}w''_{02}\bar{w}''_{02} + \\
 & w'_{02}\bar{w}''_{02}w''_{02}) + \bar{w}'_{02}w''_{02}w''_{02}] + \\
 & w''_{02}\int_\xi^l\int_0^\xi[2w_0^2w'_{02}\bar{w}'_{02} - 4\nu\beta\omega_0\text{Im}(w'_{02}\bar{w}''_{02}) + \\
 & 2\nu^2w''_{02}\bar{w}''_{02} + 2\text{Re}(w''_{02}\bar{w}_0^{(4)})]d\xi d\xi + \\
 & \bar{w}''_{02}\int_\xi^l\int_0^\xi[-\omega_0^2w'_{02}{}^2 + \nu^2w''_{02}{}^2 + w''_{02}w_0^{(4)} + \\
 & 2\nu\beta\omega_0iw'_{02}w''_{02}]d\xi d\xi - \\
 & w'_{02}\int_0^\xi[2\omega_0^2w'_{02}\bar{w}'_{02} - 4\nu\beta\omega_0\text{Im}(w'_{02}\bar{w}''_{02}) + \\
 & 2\nu^2w''_{02}\bar{w}''_{02} + 2\text{Re}(w''_{02}\bar{w}_0^{(4)})]d\xi - \\
 & \bar{w}'_{02}\int_0^\xi[-\omega_0^2w'_{02}{}^2 + \nu^2w''_{02}{}^2 + w''_{02}w_0^{(4)} + \\
 & 2\nu\beta\omega_0iw'_{02}w''_{02}]d\xi d\xi + \\
 & l_0[-(2w'_{02}\bar{w}'_{02}w_0^{(4)} + w'_{02}{}^2\bar{w}_0^{(4)}) + \\
 & 2(w'_{02}w''_{02}\bar{w}''_{02} + w'_{02}\bar{w}''_{02}w''_{02} + \\
 & \bar{w}'_{02}w''_{02}w''_{02}) + 6w''_{02}{}^2\bar{w}''_{02} + \\
 & 4w'_{02}\int_0^\xi\text{Re}(w''_{02}\bar{w}_0^{(4)})ds + 2\bar{w}'_{02}\int_0^\xi(w''_{02}w_0^{(4)}d\xi - \\
 & 4w''_{02}\int_\xi^l\int_0^\xi\text{Re}(w''_{02}\bar{w}_0^{(4)})d\xi d\xi - \\
 & 2\bar{w}'_{02}\int_\xi^l\int_0^\xi(w''_{02}w_0^{(4)})d\xi d\xi]
 \end{aligned} \tag{50}$$

将其代入式 (44) 可具体算出 $l_1 = \frac{1}{\omega_0} \text{Re} \langle \frac{1}{2} C$

$(w_0, w_0, \bar{w}_0), q_0 \rangle$ 。从形式上看, 材料长度尺寸参数 l_0 对振动方程 (21a) (或 (23)) 非线性部分的本质影响, 即其对第一李雅普诺夫系数的影响体现在式

(50) 中第一个元素的最后三行, 但是前面关于特征值问题的分析中已经提到, 微尺度效应使得系统的临界流速、临界频率提高, 从而其对式 (37) 中的 w_0, q_0 有影响, 进而影响到 l_1 ((44) 式), 因此 l_0 对非线性部分的本质影响只有通过具体的计算结果来呈现 (见图 8), 而不能仅考虑 l_1 中显含 l_0 的项。

为了确定流速在临界值处变化时退化特征值是否穿越虚轴, 将式 (29) 写成:

$$L(v_c + \varepsilon)w(v_c + \varepsilon) = \lambda(v_c + \varepsilon)w(v_c + \varepsilon) \tag{51}$$

其中的量与式 (37a) 中相关记号的对应关系为:

$$w_0 = w(v_c), \quad i\omega_0 = \lambda(v_c)$$

对 (51) 式两边关于 ε 求导, 并令 $\varepsilon = 0$, 得:

$$L'_\varepsilon(v_c)w_0 + L_0w'_\varepsilon(v_c) = \lambda'_\varepsilon(v_c)w_0 + i\omega_0w'_\varepsilon(v_c)$$

用 q_0 点乘上式两边:

$$\lambda'_\varepsilon(v_c) = \langle L'_\varepsilon(v_c)w_0, q_0 \rangle \tag{52}$$

具体计算后得:

$$L'_\varepsilon(v_c) = \begin{bmatrix} 0 & -2\nu_c(\cdot)'' \\ 0 & -2\sqrt{\beta}(\cdot)' \end{bmatrix}$$

$$\lambda'_\varepsilon(v_c) = -2\int_0^l[\nu_cw''_{02} + i\omega_0\sqrt{\beta}w'_{02}]q_{01}ds \triangleq \lambda'_\varepsilon \tag{53}$$

系统在中心流形上的简化方程为:

$$z = iz + \varepsilon(\lambda'_\varepsilon/\omega_0)z + l_1z^2\bar{z} + \dots \tag{54}$$

其中 l_1 和 λ'_ε 分别由 (44) 和 (53) 两式给出。实际上在式 (38) 中, 可以增大 w_0 的倍数 (或缩小 w_0 的倍数), 相应地缩小 q_0 的倍数 (或增大 q_0 的倍数), 而相应的内积仍然为 1, 这样做并不会影响 (53) 式的计算, 且对 (44) 式的正负没有影响, 因此不影响系统的分岔性质。

第一李雅普诺夫系数 l_1 ((44) 式) 及退化特征值关于流速的变化率 ((53) 式) 的实部 (记为 $\text{Re}(\lambda'_\varepsilon)$) 随质量比的变化曲线分别如图 8、图 9 所示。

由图 8 可以看出, l_0 虽然影响 l_1 在给定值处的具体数值, 但是并不改变 l_1 的正负性质, 即 l_1 始终小于零, 因此颤振的性质总是超临界的。图 9 则显示, 除了个别点以外, $\text{Re}(\lambda'_\varepsilon)$ 都是非零的, 因此, 流速在临界值处变化时, 退化特征值穿越虚轴。在 $\text{Re}(\lambda'_\varepsilon)$ 大于零的部分, 结果可见于相关文献 (如 [4]) 中, 即流速减小, 管道稳定; 流速增加, 管道发生颤振 (图 10(a))。在 $\text{Re}(\lambda'_\varepsilon)$ 小于零的部分, 结合观察临界流速曲线 (图 6) 可知, 其对应于该曲线的滞后部分, 上面会发生什么样的动力学现象, 在以

往的文献中并没有提及过. 本文的计算结果(图 8、图 9)表明, 在该滞后部分, 系统仍然发生超临界 Hopf 分岔, 只是分岔的方向与非滞后部分相反: 即当流速增加时管道是稳定的, 而当流速减少时, 管道发生颤振(图 10(b)). 综合起来可以得到流速沿着图 6(b) 的虚线增加时管道的分岔示意图(图 10(c)). 不管是宏观管还是微尺度管, 临界流速曲线上均存在滞后部分, 因此此处的分析适用于两者.

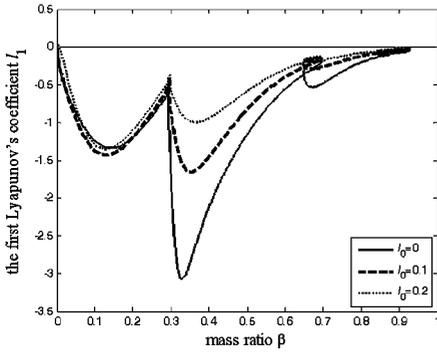


图 8 第一李雅普诺夫系数

Fig.8 First Lyapunov's coefficient

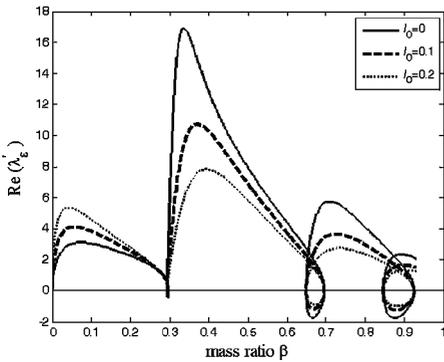


图 9 退化特征值实部关于流速的变化率

Fig.9 Real part of the derivation for the degenerate eigenvalue with respect to flow velocity

另一方面, 因为临界流速曲线滞后现象的存在, 对应不同 l_0 值的曲线可能相交(图 6(a)), 交点处两者的流速和质量比的无量纲值分别相同. 通过观察可知交点定属于其中一条曲线的滞后部分, 且属于另外一条曲线的非滞后部分(图 11). 由上文的分析可知, 当流速变化时, 其中一个管道失稳产生颤振(或具有稳定的平凡解), 而另一个管道具有稳定的平凡解(或失稳产生颤振). 例如, 对于具有相同质量比的宏观管($l_0=0$)与微尺度管(如 $l_0=0.1$), 当流速在两者共同的临界值处变化时(图 11 中的虚线段): 若流速增加, 则宏观管初始构形稳定, 微尺度管发生颤振; 若流速减少, 宏观管发生

颤振, 微尺度管初始构形稳定, 即两者的稳定性变化相反. 因此, 在实际问题中需要考虑微尺度效应的影响, 以便合理地控制流速, 避免管道发生颤振.

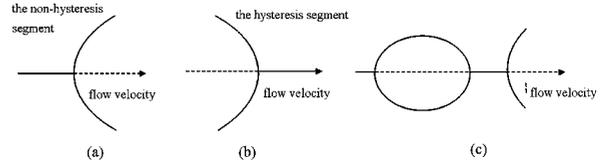


图 10 (a) 非滞后部分流管的分岔示意图;

(b) 滞后部分流管的分岔示意图; (c) 流速沿图 6(b)

中的虚线增加时管道的分岔示意图

Fig.10 (a) Bifurcation sketch at the non-hysteresis points;

(b) Bifurcation sketch at the hysteresis points;

(c) Bifurcation sketch as flow velocity increasing along the dotted line in Fig.6(b)

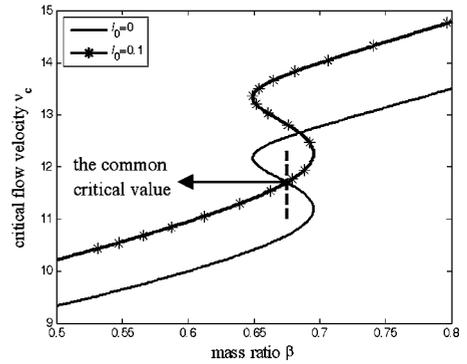


图 11 流速在共同的临界值处的变化

Fig.11 Variation of flow velocity near the common critical value

3 结论

本文首次建立了微悬臂输液管平面大振幅振动的微分方程, 并从“无穷维”动力系统的角度对其进行了研究, 得到如下结论:

(1) 对振动方程的研究表明, 材料长度尺寸参数不仅影响方程的线性振动特征, 如提高管道的固有频率、临界流速及临界频率, 也影响系统的第一李雅普诺夫系数的具体数值.

(2) 不同尺度的管其分岔均为超临界的; 不管是宏观管还是微尺度管, 在其临界流速曲线的滞后部分, 流速减少时管道发生颤振, 流速增加时管道是稳定的, 在非滞后部分, 情况刚好相反; 在两种不同尺度管的临界流速曲线的交点处, 流速变化时两种管的分岔方向相反, 因此, 在实际问题中需要考虑材料长度尺寸参数的影响, 以便对具体的管道合理地控制其内流速, 避免发生颤振.

参 考 文 献

- 1 Benjamin T B. Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid: I. Theory. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. *Mathematical and Physical Sciences*, 1961, 261(1307):457~486
- 2 Gregory R W, Païdoussis M P. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid: I. Theory. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. *Mathematical and Physical Sciences*, 1966, 293(1435):512~527
- 3 Lundgren, Sethna P R, Bajaj A K. Stability boundaries for flow induced motions of tubes with an inclined terminal nozzle. *Journal of Sound and Vibration*, 1979, 64(4):553~571
- 4 Bajaj A K, Sethna P R, Lundgren. Hopf bifurcation phenomena in tubes carrying a fluid. Society for Industrial and Applied Mathematics. *Journal on Applied Mathematics*, 1980, 39(2):213~230
- 5 Semler C, Li G X, Païdoussis M P. The non-linear equations of motion of pipes conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 169(5):577~599
- 6 徐鉴, 杨前彪. 流体诱发水平悬臂输液管的内共振和模态转换(I)(II). *应用数学和力学*, 2006, 27(7):819~832 (Xu J, Yang Q B. Flow-induced internal resonances and mode exchange in horizontal cantilevered pipe conveying fluid(I)(II). *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, 27(7):819~832 (in Chinese))
- 7 Chen L Q, Zhang Y L, Zhang G C, et al. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, 58(1):11~21
- 8 李云东, 杨翊仁. 横流向中细长圆柱的热弹性颤振. *动力学与控制学报*, 2015, 13(2):106~111 (Li Y D, Yang Y R. Thermoelastic flutter of slender cylindrical in cross flow. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, 13(2):106~111 (in Chinese))
- 9 Gan C B, Jing S, Yang S X, et al. Effects of supported angle on stability and dynamical bifurcations of cantilevered pipe conveying fluid. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2015, 36(6):729~746
- 10 Rinaldi S, Prabhakar S, Vengallatore S, et al. Dynamics of microscale pipes containing internal fluid flow: Damping, frequency shift, and stability. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329(8):1081~1088
- 11 Najmzadeh M, Haasl S, Enoksson P. A silicon straight tube fluid density sensor. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2007, 17(8):1657~1663
- 12 Bhirde A A, Patel V, Gavard J, et al. Targeted killing of cancer cells in vivo and in vitro with EGT-directed carbon nanotube-based drug delivery. *ACS Nano*, 2009, 3(2):307~316
- 13 Deladi S, Berenschot J W, Tas N R, et al. Fabrication of micromachined fountain pen with in situ characterization possibility of nanoscale surface modification. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2005, 15(3):528~534
- 14 Kim K H, Moldovan N, Espinosa H D. A nano fountain probe with sub-100nm molecular writing resolution. *Small*, 2005, 1(6):632~635
- 15 Fleck N A, Muller G M, Ashby M F, et al. Strain gradient plasticity: Theory and experiment. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1994, 42(2):475~487
- 16 Lam D C C, Yang F, Chong A C M, et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, 51(8):1477~1508
- 17 McFarland A W, Colton J S. Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2005, 15(5):1060~1067
- 18 Yang F, Chong A C M, Lam D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39(10):2731~2743
- 19 Park S K, Gao X L. Bernoulli - Euler beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2006, 16(11):2355~2359
- 20 Wang Y G, Lin W H, Liu N. Nonlinear free vibration of a microscale beam based on modified couple stress theory. *Physica E*, 2013, 47(1S):80~85
- 21 Dai H L, Wang Y K, Wang L. Nonlinear dynamics of cantilevered microbeams based on modified couple stress theory. *International Journal of Engineering Science*, 2015, 94:103~112
- 22 Mohammad-Abadi M, Daneshmehr A R. Size dependent buckling analysis of microbeams based on modified couple stress theory with high order theories and general boundary conditions. *International Journal of Engineering Science*, 2014, 74:1~14
- 23 Ghayesh M H, Farokhi H, Alici G. Subcritical parametric dynamics of microbeams. *International Journal of Engineering Science*, 2015, 95:36~48
- 24 赵猛, 陈丽华, 张伟. 微型 Mindlin 板非线性动力学模型的建立. *动力学与控制学报*, 2016, 14(3):205~210 (Zhao M, Chen L H, Zhang W. Nonlinear dynamics mod-

- el of the micro-Mindlin plate based on the strain gradient theory. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(3): 205~210 (in Chinese))
- 25 Wang L. Size-dependent vibration characteristics of fluid-conveying microtubes. *Journal of Fluids and Structures*, 2010, 26(4): 675~684
- 26 Xia W, Wang L. Microfluid-induced vibration and stability of structures modeled as microscale pipes conveying fluid based on non-classical Timoshenko beam theory. *Microfluidics and Nanofluidics*, 2010, 9(4): 955~962
- 27 Wang L, Liu H T, Ni Q, et al. Flexural vibrations of microscale pipes conveying fluid by considering the size effects of micro-flow and micro-structure. *International Journal of Engineering Science*, 2013, 71: 92~101
- 28 Yang T Z, Ji S D, Yang X D, et al. Microfluid-induced nonlinear free vibration of microtubes. *International Journal of Engineering Science*, 2014, 76: 47~55
- 29 Hosseini M, Bahaadini R. Size dependent stability analysis of cantilever micro-pipes conveying fluid based on modified strain gradient theory. *International Journal of Engineering Science*, 2016, 101: 1~13
- 30 Bahaadini R, Hosseini M. Effects of nonlocal elasticity and slip condition on vibration and stability analysis of viscoelastic cantilever carbon nanotubes conveying fluid. *Computational Materials Science*, 2016, 114: 151~159
- 31 徐鉴, 王琳. 输液管动力学分析和控制. 北京: 科学出版社, 2015 (Xu J, Wang L. Dynamics and Control of Fluid-Conveying Pipe Systems. Beijing: Science Press, 2015 (in Chinese))
- 32 Carr J. Applications of Centre Manifold Theory. New York: Springer-Verlag, 1981
- 33 Iooss G, Joseph DD. Elementary Stability and Bifurcation Theory (Second Edition). New York: Springer-Verlag, 1990
- 34 尤里·阿·库兹涅佐夫(著). 金成桴(译). 应用分支理论基础. 北京: 科学出版社, 2010 (Yuri A. Kuznetsov (author), Jin C F (translator). Elements of applied bifurcation theory. Beijing: Science Press, 2010 (in Chinese))

RESEARCH ON FLUTTER OF MICRO-SCALE CANTILEVER PIPE^{*}

Guo Yong Xie Jianhua[†]

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract Based on a modified couple stress theory, the governing equation for the motion of the micro-scale cantilever pipe is derived by using Hamilton's principle, where the geometric nonlinearity arising from the Lagrange strain tensors is taken into account. An eigenvalue analysis for linear equation is performed to examine the effect of internal material length scale parameter on the graph of critical flow velocity versus mass ratio and the complex frequencies of the four lowest modes of the micro-pipe. It is found that these curves of critical flow velocity versus mass ratio for the micro-scale pipes with different material length scale parameters may intersect each other. At each critical velocity, the first Lyapunov's coefficient and the derivation of the degenerate eigenvalue with respect to flow velocity are calculated by employing the projection methods based on the center manifold theory and normal form method, which demonstrates that the bifurcation is supercritical. The dynamics at the hysteresis and intersection points of the curve of critical flow velocity versus mass ratio are also investigated, and the bifurcation diagrams inwards different directions are then detected.

Key words micro-scale cantilever pipe, couple stress theory, curve of critical flow velocity versus mass ratio (curve of critical flow velocity), infinite dimension, method of projection