

# 特征模态函数缺失和等比例缩小 对系统非线性特征影响\*

黄巍<sup>1</sup> 杨永锋<sup>2†</sup>

(1.中国航发商用航空发动机有限责任公司,上海 200241) (2.西北工业大学振动工程研究所,西安 710072)

**摘要** 针对经验模态分解得到的特征模态函数,研究了其缺失和等比例缩小时 Duffing 系统和 Lorenz 系统的最大 Lyapunov 指数.结果表明:低阶特征模态函数对吸引子破坏较小,最大 Lyapunov 指数较大;当缺失、比例缩小低阶特征模态函数时,系统的最大 Lyapunov 指数有较为明显的减小;特征模态函数缩小比例越大,最大 Lyapunov 指数和原信号相比减小越多.

**关键词** 经验模态分解, 非线性, 最大 Lyapunov 指数, 特征模态函数

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-50

## 引言

对一系列时间序列数据先进行经验模态分解 (Empirical Mode Decomposition, 简称 EMD), 然后对各个分量做希尔伯特变换获取瞬时频率的信号处理方法 (称为希尔伯特黄变换 Hilbert-Huang Transformation, 简称 HHT), 是由美国国家宇航局的 Norden E Huang 于 1998 年首次提出的, HHT 是近年来对以傅立叶变换为基础的线性和稳态谱分析的一个重大突破<sup>[1]</sup>. 目前, 非线性时间序列的长时预测和高精度预测是近年来研究的一个热点<sup>[2,3]</sup>. Poon 结合 EMD 与 Hilbert 变换, 证明非线性多自由度结构存在非线性模态振动, 并可通过特征模态函数 (Intrinsic Mode Function, 简称 IMF) 确定非线性结构物理动态属性<sup>[4]</sup>. Ghosh 的研究结果表明 EMD 方法适用于延迟 Duffing 系统的混沌同步研究, 并计算了其最大 Lyapunov 指数进行验证<sup>[5]</sup>. Zou 使用 EMD 方法比较了 Lorenz 系统  $x$  分量的非定常演变, 结果表明 IMF 组成的敏感性依赖于  $x$  分量的初始值, 为非线性长期预测的可能性提供科学依据<sup>[6]</sup>. 黄海用 IMF 的瞬时频率变化表示纸盆位移信号波内频率调制的非线性现象, 直接反映出与扬声器结构相关联的非线性特性<sup>[7]</sup>. 李鸿光利用经验模

态分解方法将混沌信号分离为不同的 IMF, 并在特定参数下从中分解出单一频率成分的谐波信号, 从而成功地将混沌信号和谐波分量分离<sup>[8]</sup>. 本文基于上述基础, 研究了 IMF 分量其中之一发生变化 (缺失或比例缩小) 对合成后信号的影响, 主要考察 IMF 分量的吸引子形状和最大 Lyapunov 指数, 其研究结果有助于探明 IMF 信号与原信号的最大 Lyapunov 指数之间的对应关系, 为使用 IMF 信号进行非线性长时预测提供基础<sup>[2]</sup>.

## 1 IMF 缺失对系统非线性特征影响

### 1.1 Duffing 系统

研究具有负线性刚度的 Duffing 方程<sup>[9]</sup>

$$\ddot{x} + c\dot{x} - x + x^3 = f \cos \omega t \quad (1)$$

选取参数  $c = 0.3$ ,  $\omega = 1.2$ ,  $f = 0.31$ , 采用 Newmark- $\beta$  法积分, 积分步长为 0.01, 积分初值为 0. 图 1 为 Duffing 系统响应及其 IMF 分量. 表 1 列计算 Duffing 系统最大 Lyapunov 指数  $\lambda_1$  的参数, 其中  $\tau$  为延迟时间、 $m$  为嵌入维数、 $P$  为平均周期. 根据表 1 参数, 利用小数据量法计算得到 Duffing 系统的最大 Lyapunov 指数为 0.6753, 经过 EMD 后其主要分量 IMF1、IMF2 和 IMF3 的最大 Lyapunov 指数分别为 0.3213、0.1136 和 -0.0298, 当其原始数据分别缺失

2017-01-09 收到第 1 稿, 2017-02-24 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金 (11272257)、西北工业大学“翱翔新星”资助

† 通讯作者 E-mail: yyf@nwpu.edu.cn

IMF1、IMF2 和 IMF3 (即原始数据减去相关 IMF 分量) 的最大 Lyapunov 指数分别为 0.1626、0.4438 和 0.1893.

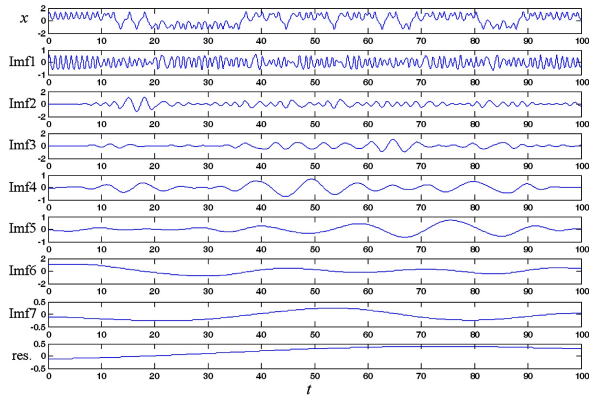


图 1 Duffing 系统响应的经验模态分解

Fig.1 EMD of the Duffing system response

表 1 Duffing 系统 IMF 缺失时最大 Lyapunov 指数

Table 1 Largest Lyapunov exponent of Duffing system with IMF lost

	$\tau$	$m$	$P$	Linear interval	$\lambda_1$
Duffing	25	9	213	[62 298]	0.6753
IMF1	27	6	113	[237 352]	0.3213
IMF2	52	5	295	[382 499]	0.1136
IMF3	55	4	369	[528 890]	-0.0298
Duffing-IMF1	48	9	391	[510 914]	0.1626
Duffing-IMF2	30	6	200	[181 299]	0.4438
Duffing-IMF3	35	6	210	[320 479]	0.1893

图 2 为 Duffing 系统 IMF 缺失时 Poincaré 映射,从中可以看出,数据分解对于吸引子形状破坏较为严重,仅 IMF1 的 Poincaré 映射点较为集中,剩余 IMF 分量 Poincaré 映射为无规律点集,当 IMF1 缺失时,系统的最大 Lyapunov 指数有较为明显的减小.因此 IMF 缺失时,系统的最大 Lyapunov 指数一般会减小,低阶 IMF (主要指一阶或二阶) 缺失对系统的最大 Lyapunov 指数影响较为明显,高阶 IMF (主要指二阶以上) 因信号主要为低频趋势成份,难以估计其对系统最大 Lyapunov 指数的影响.

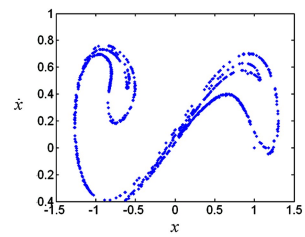
## 1.2 Lorenz 系统

无量纲 Lorenz 方程为<sup>[10]</sup>:

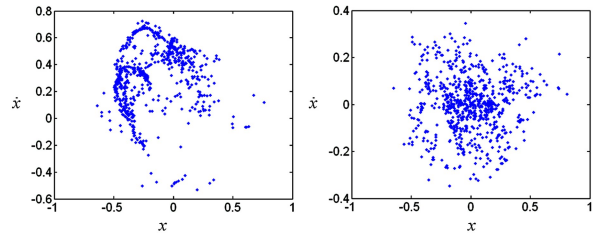
$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) \\ \dot{y} &= cx - xz - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (2)$$

选取参数  $a=16, b=4, c=46$ , 采用四阶 Runge-Kutta 算法积分,积分步长为 0.01,积分初值为  $[-1, 0, 1]$ .

图 3 为 Lorenz 系统  $x$  分量响应及其 IMF 分量.表 2 列计算 Lorenz 系统  $x$  分量最大 Lyapunov 指数  $\lambda_1$  的参数.根据表 2 参数利用小数据量法计算系统的最大 Lyapunov 指数为 1.5156,经过 EMD 后其主要分量 IMF1、IMF2 和 IMF3 的最大 Lyapunov 指数分别为 1.0847、0.9699 和 0.4362,均明显小于原信号.当其原始数据缺失 IMF1、IMF2 和 IMF3 时的最大 Lyapunov 指数分别为 0.1882、0.5083 和 0.3788.图 4 为 Lorenz 系统  $x$  分量 IMF 缺失时的轨迹图.从图 4 中可以得出如下结论:当 Lorenz 系统和 Duffing 系统缺失 IMF 时,非线性特性的表现形式类似.

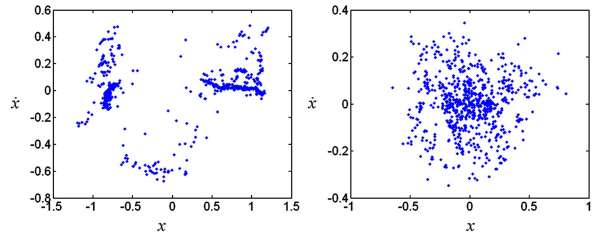


(a) 杜芬系统  
(a) Duffing



(b) IMF1

(c) IMF2



(d) IMF1 缺失  
(d) IMF1 lost

(e) IMF2 缺失  
(e) IMF2 lost

图 2 Duffing 系统 IMF 缺失时 Poincaré 映射

Fig.2 Poincaré maps of Duffing system with IMF lost

表 2 Lorenz 系统 IMF 缺失时最大 Lyapunov 指数

Table 2 Largest Lyapunov exponent of Lorenz system with IMF lost

	$\tau$	$m$	$P$	Linear interval	$\lambda_1$
$x$	39	6	235.5	[230 499]	1.5156
IMF1	40	7	147.4	[315 488]	1.0847
IMF2	41	6	358.5	[230 363]	0.9699
IMF3	60	4	461.0	[333 583]	0.4362
$x$ -IMF1	49	6	457.4	[725 847]	0.1882
$x$ -IMF2	35	5	300.3	[631 698]	0.5083
$x$ -IMF3	42	6	217.9	[342 469]	0.3788

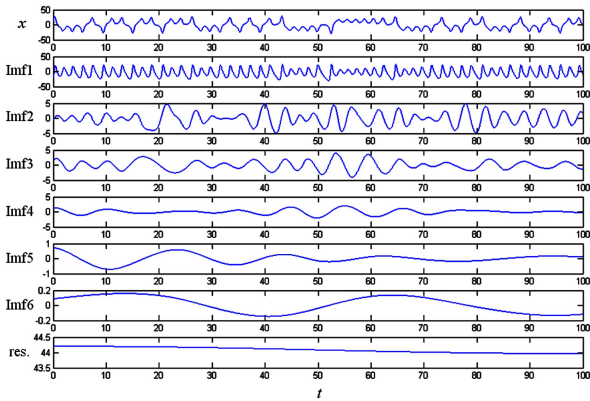
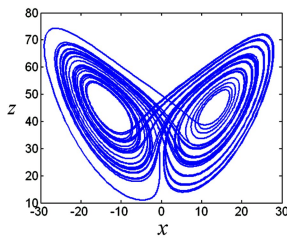
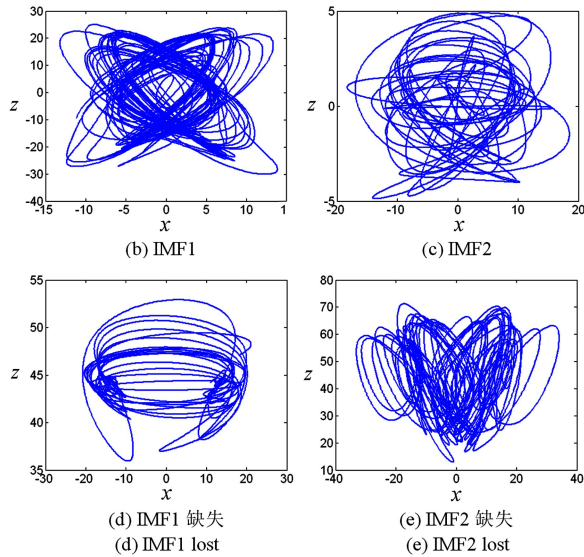
图3 Lorenz系统 $x$ 分量响应及其IMF分量Fig.3 EMD and  $x$  component response of the Lorenz system(a) Lorenz系统  
(a) Lorenz

图4 Lorenz系统IMF缺失时轨迹图

Fig.4 Trajectory of Lorenz system with IMF lost

## 2 IMF比例缩小对系统非线性特征影响

### 2.1 Duffing系统

选取和2.1节相同参数.表3列计算Duffing系统最大Lyapunov指数 $\lambda_1$ 的参数.当IMF1、IMF2和IMF3缩小50%时(即原信号减去对应IMF $\times 0.5$ ),根据表3参数计算出响应的最大Lyapunov指数分别为0.5561、0.5221和0.3714,当IMF1、IMF2和IMF3缩小30%时,响应的最大Lyapunov指数分别为

为0.5850、0.5439和0.4194.图5为Duffing系统IMF比例缩小时Poincaré映射,从中可以看出,高阶IMF等比例缩小时,响应的最大Lyapunov指数比低阶IMF小,其主要原因是高阶IMF较为明显地破坏了原信号的吸引子形状,并且低阶IMF相比原信号的最大Lyapunov指数减小幅度较小.因此,低阶IMF等比例缩小对于信号的吸引子形状破坏较小,高阶IMF等比例缩小会严重破坏信号的吸引子形状.从最大Lyapunov指数减小来看,低阶IMF,其缩小比例越大,最大Lyapunov指数和原信号相比减小越多.

表3 Duffing系统IMF比例缩小时最大Lyapunov指数

Table 3 Largest Lyapunov exponent of Duffing system with IMF cutdown

	$\tau$	$m$	$P$	Linear interval	$\lambda_1$
Duffing	25	9	213	[62 298]	0.6753
Duffing-IMF1 $\times 0.5$	33	7	305.4	[120 403]	0.5561
Duffing-IMF2 $\times 0.5$	28	7	229.0	[70 324]	0.5221
Duffing-IMF3 $\times 0.5$	33	6	230.7	[192 388]	0.3714
Duffing-IMF1 $\times 0.3$	29	4	275.4	[123 369]	0.5850
Duffing-IMF2 $\times 0.3$	27	5	230.9	[145 349]	0.5439
Duffing-IMF3 $\times 0.3$	29	5	231.6	[239 430]	0.4194

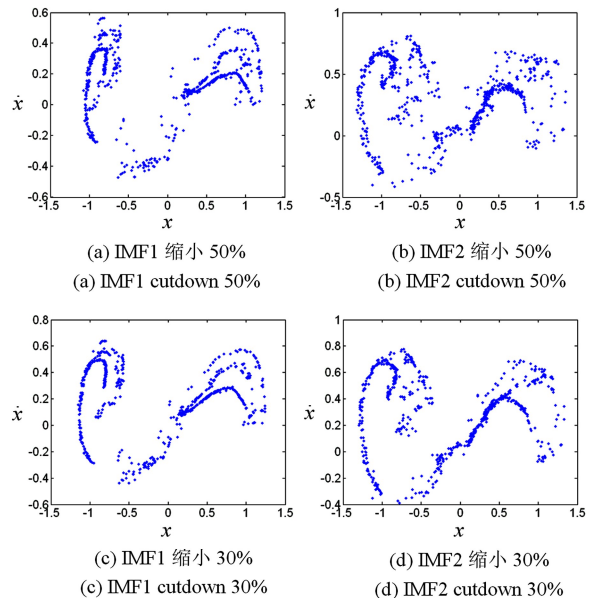


图5 Duffing系统IMF比例缩小时Poincaré映射

Fig.5 Poincaré maps of Duffing system with IMF cutdown

### 2.2 Lorenz系统

Lorenz系统所选取参数和2.2节相同.表4列计算Lorenz系统 $x$ 分量最大Lyapunov指数 $\lambda_1$ 的参数.当IMF1、IMF2和IMF3缩小50%时,根据表4参数计算得到响应的最大Lyapunov指数分别为

1.0968、0.7923 和 0.4214,当 IMF1、IMF2 和 IMF3 缩小 30% 时,响应的最大 Lyapunov 指数分别为 1.1658、1.41 和 0.8918.图 6 为 Lorenz 系统  $x$  分量 IMF 比例缩小时的轨迹图.从表 4 和图 6 并结合上小节可以看出,对于低阶 IMF,当缩小比例较小时,响应的最大 Lyapunov 指数较大,对吸引子形状的影响也较小,同样也可以得到前述结论.

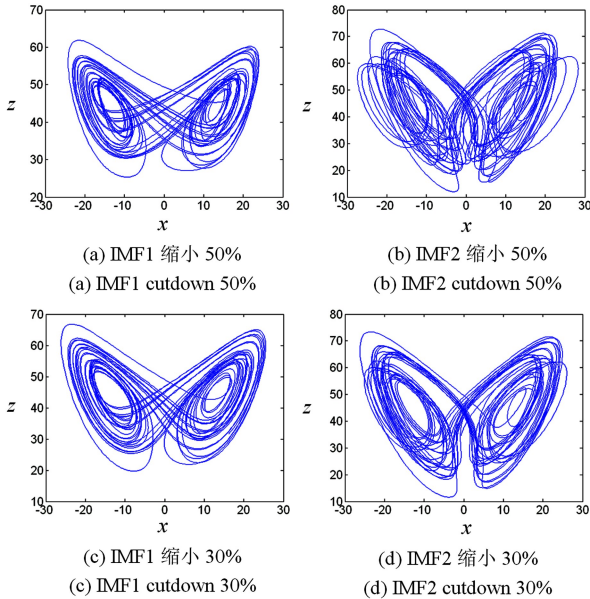


图 6 Lorenz 系统 IMF 比例缩小时轨迹图

Fig.6 Trajectory of Lorenz system with IMF 1 IMF cutdown

表 4 Lorenz 系统 IMF 比例缩小时最大 Lyapunov 指数

Table 4 Largest Lyapunov exponent of Lorenz system with IMF cutdown

	$\tau$	$m$	$P$	Linear interval	$\lambda_1$
$x$	39	6	235.5	[ 230 499 ]	1.5156
$x$ -IMF1 $\times$ 0.5	42	6	289.7	[ 551 684 ]	1.0968
$x$ -IMF2 $\times$ 0.5	41	5	281.7	[ 470 554 ]	0.7923
$x$ -IMF3 $\times$ 0.5	47	5	226.1	[ 444 482 ]	0.4214
$x$ -IMF1 $\times$ 0.3	31	6	323.1	[ 693 821 ]	1.1658
$x$ -IMF2 $\times$ 0.3	37	6	278.5	[ 423 490 ]	1.41
$x$ -IMF3 $\times$ 0.3	41	6	236.2	[ 414 489 ]	0.8918

### 3 结论

本文研究了 IMF 缺失和比例缩小时 Duffing 系统和 Lorenz 系统的最大 Lyapunov 指数和吸引子形状变化情况,结果表明:低阶 IMF 对吸引子破坏较小,最大 Lyapunov 指数较大,IMF 阶数较高时,响应的吸引子破坏较为严重,通常吸引子形状呈无规律点集,最大 Lyapunov 指数一般较小,甚至为负;当缺失低阶 IMF 时,系统的最大 Lyapunov 指数有

较为明显的减小,当缺失 IMF 阶数较高时,系统的最大 Lyapunov 指数一般会减小,但因高阶 IMF 主要为低频趋势成份,其减小幅度不一定比低阶 IMF 大;当 IMF 比例缩小时,只有低阶 IMF 等比例缩小对信号的吸引子形状破坏较小,高阶 IMF 等比例缩小会严重破坏信号的吸引子形状,从最大 Lyapunov 指数减小来看,IMF 缩小比例越大,最大 Lyapunov 指数和原信号相比减小越多.

### 参 考 文 献

- Huang N E, Shen Z, Long S R. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 1998, 454 (4) : 903 ~ 995
- 杨永锋,任兴民,秦卫阳等. 基于 EMD 方法的混沌时间序列预测. *物理学报*, 2008, 57 ( 10 ) : 6139 ~ 6144 ( Yang Y F, Ren X M, Qin W Y, et al. Prediction of chaotic time series based on EMD method. *ACTA Physica Sinica*, 2008, 57(10) : 6139~6144 ( in Chinese ) )
- 张学清,梁军. 风电功率时间序列混沌特性分析及预测模型研究. *物理学报*, 2012, 61( 19 ) : 190507 ( Zhang X Q, Liang J. Chaotic characteristics analysis and prediction model study on wind power time series. *ACTA Physica Sinica*, 2012, 61( 19 ) : 190507 ( in Chinese ) )
- Poon C W, Chang C C. Identification of nonlinear elastic structures using empirical mode decomposition and nonlinear normal modes. *Smart Structures and Systems*, 2007, 3(4) : 423 ~ 437
- Ghosh D, Chowdhury A R, Saha P. On the various kinds of synchronization in delayed Duffing-Van der Pol system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, 13(4) : 790~803
- Zou M W, Feng G L, Gao X Q. Sensitivity of intrinsic mode functions of Lorenz system to initial values based on EMD method. *Chinese Physics*, 2006, 15(6) : 1384~1390
- 黄海. 扬声器非线性特性的 Hilbert-Huang 变换分析. *浙江大学学报(工学版)*, 2005, 39( 3 ) : 385 ~ 391 ( Huang H. Analysis of nonlinear behaviour of loudspeakers using Hilbert-Huang transform. *Journal of Zhejiang University ( Engineering Science )*, 2005, 39( 3 ) : 385 ~ 391 ( in Chinese ) )
- 李鸿光,孟光. 基于经验模式分解的混沌干扰下谐波



信号的提取方法. 物理学报, 2004, 53(7):2069~2073  
(Li H G, Meng G. Harmonic signal extraction from chaotic interference based on empirical mode decomposition. *ACTA Physica Sinica*, 2004, 53(7):2069~2073 (in Chinese))

- 9 王晓东, 杨绍普, 赵志宏. 基于改进型 Duffing 振子的微弱信号检测研究. 动力学与控制学报, 2016, 14(3):283~288 (Wang X D, Yang S P, Zhao Z H. Research of weak signal detection based on the improved

Duffing oscillator. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(3):283~288 (in Chinese))

- 10 孙克辉, 傅元理. 简化 Lorenz 系统多翅膀混沌吸引子的设计与电路实现. 动力学与控制学报, 2016, 14(5):395~400 (Sun K H, Fu Y L. Design and circuit implementation of the simplified Lorenz multi wing chaotic attractor. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(5):395~400 (in Chinese))

## EFFECT OF INTRINSIC MODE FUNCTION LOST AND CUTDOWN ON NONLINEAR CHARACTERISTIC OF ORIGINAL SYSTEM\*

Huang Wei<sup>1</sup> Yang Yongfeng<sup>2†</sup>

(1. AECC Commercial Aircraft Engine Company Limited, Shanghai 710072, China)

(2. Institute of Vibration Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract** For the Intrinsic Mode Functions solved by the Empirical Mode Decomposition method, the largest Lyapunov exponents of Duffing and Lorenz systems with the Intrinsic Mode Functions lost and cutdown was studied in this paper. It is found that small attractor destruction occurred with the decreasing Intrinsic Mode Functions, but the largest Lyapunov exponent was big. With the low-level Intrinsic Mode Functions lost and cutdown, the largest Lyapunov exponent of the reponse decreased clearly. With the increase of cutdown ratio, the largest Lyapunov exponent decreased more when compared with the original signal.

**Key words** empirical mode decomposition, nonlinear, largest Lyapunov exponent, intrinsic mode functions