

# 带边角裂纹悬臂 Mindlin 板的振动特性研究\*

陈丽华<sup>†</sup> 薛坚 张伟

(北京工业大学, 北京 100124)

**摘要** 本文基于 Mindlin 板理论,应用 Ritz 法研究带边角裂纹 Mindlin 板的振动特性,分析了不同裂纹参数如裂纹位置,裂纹长度,裂纹角度对悬臂 Mindlin 板的固有频率和模态的影响.利用 Ritz 法求解固有频率和模态函数,本文构造了一个特殊的模态函数,其模态函数由两部分构成,一部分是用梁函数组合法得到的无裂纹理想完整矩形板的振型,另一部分是利用裂纹尖端奇异性理论,构造描述裂纹附近位移和转角不连续的角函数.通过高精度的数值计算软件 Maple 得出结果,并与有限元软件 ANSYS 分析的结果进行对比,验证本文计算结果的准确性.

**关键词** Mindlin 板, 边角裂纹, 模态, 固有频率, Ritz 法

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-63

## 引言

裂纹广泛存在于工程结构中,如果出现裂纹,结构的阻尼和刚度将会发生改变,从而导致结构的振动特性发生变化.梁、板元件是工业中应用最广泛的结构,特别是在航天、航空领域,由于板出现裂纹经常导致重大安全事故的发生.因此,研究裂纹对板振动特性的影响有重要的理论意义和广泛的工程应用前景.

对于含边角穿透裂纹的振动特性研究, Yuan, Dickinson<sup>[1]</sup>应用区域分解法,并在内边界人为地附加虚拟弹簧,研究了带边角裂纹的四边简支矩形板的弯曲振动问题. Yuan 和 Young<sup>[2]</sup>也用了区域分解法研究了完全自由的带边角和内部裂纹环形板的振动问题. Liew<sup>[3]</sup>等人用同样的方法得到了各种边界条件下裂纹矩形薄板的固有频率.他们将裂纹板假设成可以用适当方程表达的子区域的组合体,并得到了裂纹薄板振动问题的特征值方程. Leissa, Huang<sup>[4,5]</sup>假设裂纹板的模态函数由两部分构成,一个是代数多项式,一个是附加的转角函数,并结合 Ritz 法研究了带 V 型裂纹或边角裂纹矩形的自由振动. Huang<sup>[6,7]</sup>用同样的方法研究了四边简支或悬臂的矩形 Mindlin 板和功能材料 Reddy 板. 本课题

组陈丽华、孙悦<sup>[8,9]</sup>等人研究了带边角裂纹悬臂矩形薄板的振动特性.在此基础上本文考虑剪切变形的影响对带边角裂纹悬臂矩形 Mindlin 板的振动特性进行研究.

本文用梁函数组合法得到理想完整板的模态函数,这样由完整板的模态函数和角函数组成的特殊模态函数能更好的描述板的振动特性并且有了更好的物理意义.最后,本文研究了裂纹长度、裂纹高度、裂纹角度对 Mindlin 悬臂板振动特性的影响,并利用 Ansys 有限元软件进行验证.

## 1 控制方程

基于一阶剪切变形理论, Mindlin 板自由振动的动力学方程为:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \rho J \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = \rho J \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (3)$$

矩形悬臂板的边界条件为:

$$\text{固定端: } y=0; w=0, \varphi_x=0, \varphi_y=0 \quad (4a)$$

$$\text{自由端: } y=b; M_x=0, M_{xy}, Q_x=0 \quad (4b)$$

2015-06-09 收到第 1 稿, 2015-06-26 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金(11172011)资助

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: chenlihua@biut.edu.cn

$$x=0, a: M_y=0, M_{xy}, Q_y=0 \quad (4c)$$

式中,  $w$  表示板的法向位移;  $J=h^3/12$ ;  $h$  为板的厚度;  $\rho$  为板的质量密度;  $w$  表示中性面上的横向位移;  $\varphi_x$  和  $\varphi_y$  是中性面法线转过去的角度. 这里:

$$M_{xx}=D\left(\mu\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\right) \quad (5a)$$

$$M_{yy}=D\left(v\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right) \quad (5b)$$

$$M_{xy}=\frac{D(1-\mu)}{2}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}\right) \quad (5c)$$

$$Q_x=\frac{Gh}{\kappa_\tau}\left(\varphi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right), Q_y=\frac{Gh}{\kappa_\tau}\left(\varphi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (5d)$$

式中,  $D$  为板的抗弯刚度,  $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ ;  $G$  为剪切模量,  $G=E/(2(1-\nu))$ ;  $\kappa_\tau=\pi^2/12$  为剪切修正系数;  $E, \nu$  分别为材料的弹性模量和 Poisson 比.

## 2 位移函数

裂纹板自由振动解的形式可设为:

$$w(x, y, t) = W(x, y)\varphi(t) \quad (6a)$$

$$\varphi_x(x, y, t) = \Phi_x(x, y)\varphi(t) \quad (6b)$$

$$\varphi_y(x, y, t) = \Phi_y(x, y)\varphi(t) \quad (6c)$$

$W(x, y), \Phi_x(x, y)$  和  $\Phi_y(x, y)$  为裂纹板的振型函数.

本文采用双向梁函数组合的级数形式来逼近完整板振动的真实振型. 对于完整矩形 Mindlin 板的振型可以设为:

$$W(x, y) = \sum_i \sum_j A_{ij} X_i(x) Y_j(y) \quad (7a)$$

$$\Phi_x(x, y) = \sum_i \sum_j B_{ij} \Phi_i(x) Y_j(y) \quad (7b)$$

$$\Phi_y(x, y) = \sum_i \sum_j C_{ij} X_i(x) \Phi_j(y) \quad (7c)$$

其中  $X_i(x), Y_i(y)$  分别为板  $x, y$  方向与边界条件相对应的梁位移函数,  $\Phi_i(x), \Phi_j(y)$  分别为与板  $x, y$  边界条件相应之梁转角函数,  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$  为待定的振型系数.

下面根据梁函数组合法来求完整板的模态函数.

如图 1,  $x$  方向(自由-自由)的各阶梁函数为:

$$X_1=1 \quad (8a)$$

$$X_2=\sqrt{3}(1-2x/a) \quad (8b)$$

$$X_i=ch\frac{k_i x}{l}+\cos\frac{k_i x}{l}-\alpha_i\left(sh\frac{k_i x}{l}+\sin\frac{k_i x}{l}\right) \quad (8c)$$

$(i=3, 4, 5, \dots)$

式中,  $k_i$  是与梁频率有关的系数,  $k_i^4=\omega^2\frac{\rho A}{EJ}$ ,  $\alpha_i$  为

梁函数系数, 此处  $\alpha_i=\frac{chk_i a-\cos k_i a}{shk_i a-\sin k_i a}$  ( $i=3, 4, 5, \dots$ ).

在  $y$  方向(固定-自由)的各阶梁函数为:

$$Y_j=ch\frac{k_j y}{l}-\cos\frac{k_j y}{l}-\beta_j\left(sh\frac{k_j y}{l}-\sin\frac{k_j y}{l}\right) \quad (9)$$

此处  $\beta_j=\frac{chk_j l+\cos k_j l}{shk_j l+\sin k_j l}$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ ).

由文献 [10] 可以得出转角函数:

$$\Phi_i(x)=\frac{X_i'''+\left(\frac{k_i \rho}{G}\omega^2+\frac{Gh}{k_\tau D}\right)X_i'}{\frac{\rho J}{D}\omega^2-\frac{Gh}{k_\tau D}} \quad (10a)$$

$$\Phi_j(y)=\frac{Y_j'''+\left(\frac{k_j \rho}{G}\omega^2+\frac{Gh}{k_\tau D}\right)Y_j'}{\frac{\rho J}{D}\omega^2-\frac{Gh}{k_\tau D}} \quad (10b)$$

$X_i'''$  表示  $X_i(x)$  对  $x$  的三阶偏导,  $Y_j'''$  表示  $Y_j(y)$  对  $y$  的三阶偏导.

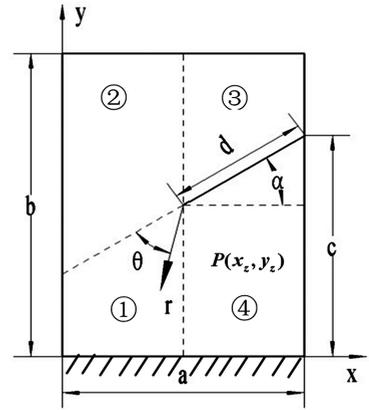


图 1 矩形板的尺寸以及  $(r, \theta)$  坐标

Fig. 1 Dimension and coordinate of a rectangular plate with a side-crack

将式 (8a ~ 8c) 和 (9) 分别代入式 (10a) 和 (10b) 中便可得到转角的  $\Phi_i(x), \Phi_j(y)$  的振型函数, 再代入到 (7a ~ 7c) 便可以得到完整矩形 Mindlin 板的振型函数.

考虑到带边角裂纹矩形板的振动, 只用式 (7a ~ 7c) 来描述其振型函数显然是不合理的, 因为不满足裂纹处位移和转角不连续的条件, 因此需要在完整板的基础上附加上一个角函数来描述裂纹附近的性质. 针对裂纹板, 其振型函数由两部分构成, 一部分是用梁函数组合法得到的理想完整板 Mind-

lin 板的振型,另一部分是利用裂纹的尖端奇异性理论来构造描述裂纹附近位移和转角的角函数,即运用半角三角函数的性质,在裂纹两边构造挠度和转角不连续性质的表达式.所以带裂纹矩形 Mindlin 板的振型函数可设为:

$$W = \sum_i \sum_j A_{ij} X_i(x) Y_j(y) + \psi_{1c}(r, \theta) \quad (11a)$$

$$\Phi_x = \sum_i \sum_j B_{ij} \Phi_i(x) Y_j(y) + \psi_{2c}(r, \theta) \quad (11b)$$

$$\Phi_y = \sum_i \sum_j C_{ij} X_i(x) \Phi_j(y) + \psi_{3c}(r, \theta) \quad (11c)$$

式中  $\psi_{kc}(r, \theta)$  ( $k=1, 2, 3$ ) 为描述裂纹的角函数.

附加描述裂纹性质的角函数可设为:

$$\psi_{kc}(r, \theta) = g_k(x, y) \left( \sum_{n=1}^N \sum_{l=0}^n D_{nl}^{(k)} r^{(2n-1)/2} \cos \left( \frac{2l+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^N \sum_{l=0}^n E_{nl}^{(k)} r^{(2n-1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta \right) \right) \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

这里  $k=1, 2, 3, D_{nl}^{(k)}, E_{nl}^{(k)}$  是待求的振型系数,  $r$  是板上任意一点到裂纹尖端的距离,  $\theta$  是板上任意一点和裂纹尖端连线与裂纹的夹角(图 1). 由于角函数表达式中含有的独立变量  $r$  和  $\theta$ , 需要与完整板中采用的直角坐标系统一, 还要进行坐标变换. 需要注意的是, 随着坐标的变化, 角坐标  $\theta$  与直角坐标  $x, y$  的关系式在板的不同区域内是不同的, 如图 1 所示, 在坐标变换过程中需要将板分成四个区域.

$(r, \theta)$  坐标的原点选在裂纹尖端  $P$  处, 且有  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ .  $\theta$  在裂纹两边分别为  $-\pi$  和  $\pi$ , 利用三角函数  $\sin \theta$  在  $-\frac{\pi}{2}$  和  $\frac{\pi}{2}$  处不连续的性质来描述裂纹两边位移不连续的现象, 而利用三角函数  $\cos \theta$  求一阶导数以后在  $-\frac{\pi}{2}$  和  $\frac{\pi}{2}$  处不连续性质来描述转角不连续的现象. 如图 1 所示, 在裂纹板的 4 个区域内, 有相同的极半径  $r$  表达式:

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (13)$$

但是  $\theta$  的表达式在各个区域的形式有所不同, 具体表达式如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{区域 1 和 2: } \arctan \frac{y-y_0}{x-x_0} - \alpha \\ \text{区域 3: } \arctan \frac{y-y_0}{x-x_0} + \pi - \alpha \\ \text{区域 4: } \arctan \frac{y-y_0}{x-x_0} - \pi - \alpha \end{array} \right. \quad (14)$$

式中,  $x_0 = a - d \cos \alpha, y_0 = c - d \sin \alpha$ , 如图 1 所示,  $\alpha$  是裂纹顺时针方向与水平线的夹角,  $a, b$  分别是矩形板的长和宽,  $c, d$  分别是裂纹的高度和长度.

将式(13)中  $r$  的表达式和(14)中不同区域的  $\theta$  表达式代入(12)中就得到了直角坐标下的角函数表达式.

在(12)式中  $g_k(x, y)$  是满足各种几何边界条件的简单函数. 对于  $y=0$  处固支的悬臂板其表达式可表示为:

$$g_k(x, y) = y \quad (k=1, 2, 3) \quad (15)$$

### 3 Ritz 法

本文研究的是带裂纹矩形 Mindlin 板, 如图 1 所示. 基于 Mindlin 板理论, 用 Ritz 法可以求出裂纹板的固有频率. 在 Ritz 法中, 带裂纹矩形 Mindlin 板的最大势能 ( $U_{\max}$ ) 和最大动能 ( $T_{\max}$ ) 分别为:

$$U_{\max} = \iint_A \left\{ \frac{D}{2} (\Phi_{x,x}^2 + \Phi_{y,y}^2 + 2v \Phi_{x,y} \Phi_{y,x} + \frac{1-v}{2} (\Phi_{x,y} + \Phi_{y,x})^2) + \frac{\kappa_r Gh}{2} [(\Phi_x + W_{,x})^2 + (\Phi_y + W_{,y})^2] \right\} dA \quad (16a)$$

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \iint_A \left\{ \rho h W^2 + \frac{\rho h^3}{12} (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) \right\} dA \quad (16b)$$

式中,  $\omega$  是带裂纹矩形 Mindlin 板的固有频率;  $W, \Phi_x$  和  $\Phi_y$  分别是式(11a~11c)中的模态函数; 这些函数下标里逗号后面的变量表示函数对相应变量的偏导. 通过求能量方程:

$$\Pi = V_{\max} - T_{\max} \quad (17)$$

的极小值可以求得板的振动频率. 将裂纹板的模态函数(11a~11c)代入式(16a)和(16b)中, 其中  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{nl}^{(k)}$  和  $E_{nl}^{(k)}$  是待定系数, 也相当于独立的广义坐标, 于是, 方程(17)可以简化为多元函数的极值条件:  $U_{\max} - T_{\max}$  对待定系数  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{nl}^{(k)}$  和  $E_{nl}^{(k)}$  中任意一个的偏导数均为零, 即:

$$\frac{\partial U_{\max}}{\partial A_{mn}} - \frac{\partial T_{\max}}{\partial A_{mn}} = 0 \quad (A_{mn} = A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{nl}^{(k)}, E_{nl}^{(k)}) \quad (18)$$

经过计算, 便可得到  $3ij+3N(N+3)$  个关于  $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{nl}^{(k)}, E_{nl}^{(k)}$ , 这些系数的线性代数方程式, 令方程组的系数行列式为零, 解这个方程可得到固有频率  $\omega$ , 将求出的各阶  $\omega$  的值代入线性方程组中

求出系数,便得到各阶频率相对应的模态函数.本文计算悬臂 Mindlin 板的固有频率和模态时分别取 ( $i=4, j=8, N=3$ ) 得到一个 142 阶的矩阵.

## 4 结果分析

### 4.1 带裂纹悬臂 Mindlin 板的频率分析

图表中给出了带边角裂纹 Mindlin 板的前三阶无量纲频率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ . 板的长宽比为  $b/a=2$ ; 厚度和宽度的比为:  $h/a=0.03$ ; 裂纹的角度  $\alpha=15^\circ$  或  $\alpha=-15^\circ$ .

#### (1) 裂纹长度对悬臂 Mindlin 板频率的影响

表 1 考察相同裂纹角度和裂纹位置下不同裂纹长度对板固有频率的影响. 裂纹位置  $c/b=1/2$ ; 裂纹的角度  $\alpha=15^\circ$  或  $\alpha=-15^\circ$ ; 裂纹长度的变化为  $d/a=0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.6$ .

表 1 不同裂纹长度悬臂板的频率参数  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$

Table 1 Frequency parameters  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  of the cantilevered square plates with different crack lengths

$\alpha$	$c/b$	$d/a$	Mode		
			1	2	3
$15^\circ$	0.5	0	3.447	14.641	21.166
		0.1	3.436	14.508	21.007
		0.2	3.402	14.271	20.664
		0.3	3.374	13.891	20.185
		0.4	3.320	13.340	19.590
		0.5	3.204	12.684	18.934
		0.6	3.128	11.964	18.283
$-15^\circ$	0.5	0.1	3.436	14.629	20.124
		0.2	3.399	14.412	20.054
		0.3	3.381	14.035	19.673
		0.4	3.349	13.515	19.017
		0.5	3.307	12.931	18.212
		0.6	3.250	12.312	17.374

在裂纹角度和位置相同的情况下,改变裂纹的长度对固有频率有一定的影响,从表 1 可以看出,不论对于第几阶固有频率,均是裂纹长度越长,板固有频率就越小,这是由于局部刚度减小的原因造成的.当裂纹长度大于或等于板的宽度的一半时,固有频率减小得更快.

#### (2) 裂纹位置对悬臂 Mindlin 板频率的影响

图 2 考查了相同裂纹角度和裂纹长度下不同裂纹位置对板的前三阶固有频率的影响,裂纹位置的变化为  $c/b=0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, \dots, 0.75$ .

在裂纹长度和角度相同的情况下,改变裂纹的位置对固有频率也有一定的影响,从图 2 可以得

出:当  $\alpha \pm 15^\circ$  时,随着裂纹位置由固定端向自由端移动,裂纹板的第一阶固有频率逐渐增大,第二阶固有频率先减小后增大,即当裂纹处在板中间位置时对固有频率的减小比在两端时有更显著的影响.在  $\alpha$  为  $15^\circ$  时,对于第三阶固有频率,由于第三阶振动模态有两条节线,所以固有频率的变化趋势是先增大后减小再增大,在越靠近节线位置附近频率减小的越显著.当  $\alpha$  为  $-15^\circ$  时,固有频率的趋势是先减小后增大.

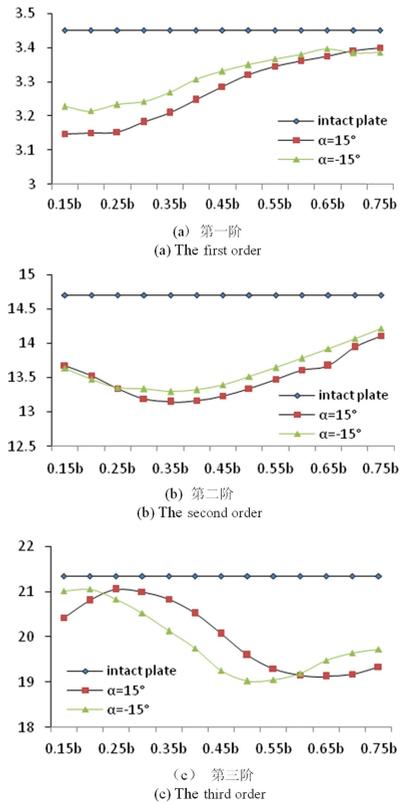


图 2  $d/a=0.4$  时不同裂纹位置悬臂板的前三阶频率参数

Fig. 2 First three order Frequency parameters  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  of the cantilevered square plate with different crack locations ( $d/a=0.4$ )

#### (3) 裂纹角度对悬臂 Mindlin 板频率的影响

图 3(a)~3(c) 考查了相同裂纹位置和裂纹长度下不同裂纹角度对板的前三阶固有频率的影响,横坐标的单位为 ( $^\circ$ ).

在裂纹长度和位置相同的情况下,改变裂纹的角度对固有频率有一定的影响,当裂纹角度与  $x$  轴的夹角从正方向增大时,第一阶固有频率逐渐减小,第二阶和第三阶固有频率均是一直呈增大的趋势;当裂纹角度与  $x$  轴的夹角从负方向增大时,前两阶固有频率均呈现增大的趋势,第三阶固有频率先减小后增大.

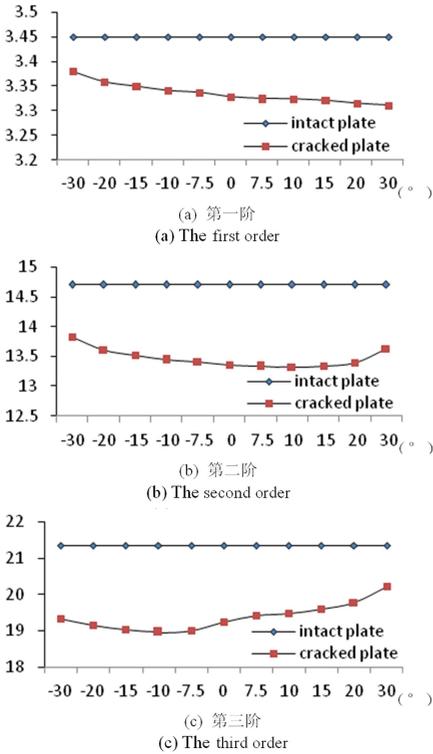


图 3  $d/a=0.4, c/b=0.5$  时  $\alpha$  不同裂纹角度的前三阶频率参数  
Fig. 3 First three order Frequency parameters  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  of different crack angles at crack angles at  $d/a=0.4$  and  $c/b=0.5$

### 4.2 带裂纹悬臂 Mindlin 板的模态分析

得到各阶固有频率之后,本文计算了前三阶的振型,针对 Mindlin 板分别给出了挠度  $W$  和转角  $\Phi_x, \Phi_y$  的模态图。

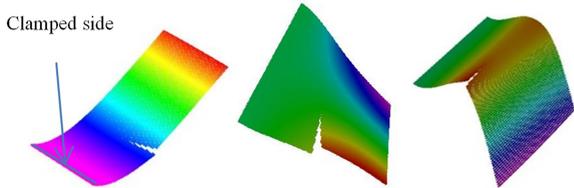


图 4 裂纹板在  $d/a=0.4, c/b=0.5, \alpha=15^\circ$  时有关  $W$  的前三阶模态函数图

Fig. 4 First three order model of  $W$  for the crack plate at  $d/a=0.4, c/b=0.5, \alpha=15^\circ$

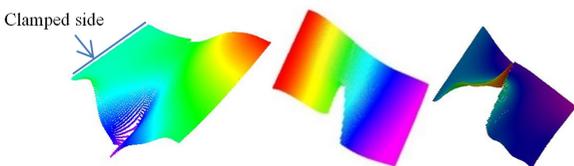


图 5 裂纹板在  $d/a=0.4, c/b=0.5, \alpha=15^\circ$  时有关  $\Phi_x$  的前三阶模态函数图

Fig. 5 First three order model of  $\Phi_x$  for the crack plate at  $d/a=0.4, c/b=0.5, \alpha=15^\circ$

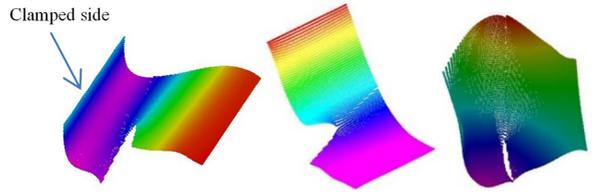


图 6 裂纹板在  $d/a=0.4, c/b=0.5, \alpha=15^\circ$  时有关  $\Phi_y$  的前三阶模态函数图

Fig. 6 First three order model of  $\Phi_y$  for the crack plate at  $d/a=0.4, c/b=0.5, \alpha=15^\circ$

从图 4~6 中裂纹板的模态函数图可以看出,裂纹的存在使得各阶的模态函数图中出现了位移和转角不连续的现象。

### 5 有限元仿真

本文应用 Ansys 有限元分析软件进行建模和求解,由于本文研究的是悬臂裂纹 Mindlin 板,因此选取壳单元进行建模.图 7 为 Ansys 中截取的一张有限元模型图。

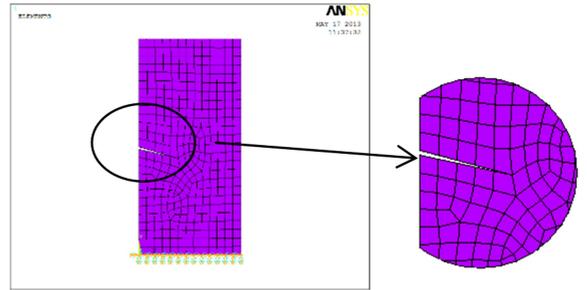


图 7 Ansys 中裂纹板模型图以及局部放大图

Fig. 7 The FE model of crack plate and its partial enlarged detail in ANSYS

有限元中材料和尺寸比例与前面的理论计算保持一致.其中计算结果与理论计算结果对比和误差分析如表 2 和表 3.表 2 对不同裂纹长度下仿真与理论计算的结果进行对比.表 3 对不同裂纹位置下仿真与理论计算的结果进行对比。

图 8 为 Ansys 有限元仿真得到的裂纹板前三阶模态函数图。

将图 8 与上一节理论计算中的图 4 对比可以看出,同样的裂纹参数下,其振动的模态函数图形式是一致的,可以验证理论计算求解模态函数的正确性。

表2 不同裂纹长度悬臂板的前三阶频率参数  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  ( $c/b=0.5, \alpha=15^\circ$ )Table 2 The first three order frequency parameters  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  of the cantilevered square plate with different crack lengths ( $c/b=0.5, \alpha=15^\circ$ )

$d/a$	Theoretical results			Ansys			Error		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
0	3.447	14.641	21.166	3.442	14.711	21.373	0.15%	0.48%	0.97%
0.1	3.436	14.508	21.007	3.431	14.615	21.265	0.15%	0.73%	1.21%
0.2	3.402	14.271	20.664	3.410	14.355	20.868	0.23%	0.59%	0.98%
0.3	3.374	13.891	20.185	3.371	13.906	20.295	0.09%	0.11%	0.54%
0.4	3.320	13.340	19.590	3.310	13.28	19.598	0.30%	0.45%	0.04%
0.5	3.204	12.684	18.934	3.221	12.492	18.837	0.53%	1.54%	0.51%
0.6	3.128	11.964	18.283	3.098	11.579	18.087	0.97%	3.32%	1.08%

表3 不同裂纹位置悬臂板的前三阶频率参数  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  ( $d/a=0.4, \alpha=15^\circ$ )Table 3 The first three order frequency parameters  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  of the cantilevered square plate with different crack location ( $d/a=0.4, \alpha=15^\circ$ )

$c$	Theoretical results			Ansys			Error		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Intact plate	3.447	14.64	21.16	3.442	14.71	21.37	0.15%	0.48%	0.97%
0.15b	3.151	13.68	20.42	3.033	12.95	20.30	3.89%	5.64%	0.59%
0.20b	3.153	13.53	20.80	3.058	12.93	20.64	3.11%	4.64%	0.78%
0.25b	3.181	13.34	21.04	3.101	12.9	20.83	2.58%	3.41%	1.01%
0.30b	3.208	13.19	21.00	3.147	12.91	20.81	1.94%	2.17%	0.91%
0.35b	3.247	13.14	20.83	3.193	12.96	20.59	1.69%	1.39%	1.17%
0.40b	3.285	13.17	20.51	3.236	13.04	20.26	1.51%	1.00%	1.23%
0.45b	3.320	13.23	20.06	3.275	13.15	19.90	1.37%	0.61%	0.80%
0.50b	3.345	13.34	19.59	3.31	13.28	19.60	1.06%	0.45%	0.05%
0.55b	3.360	13.47	19.30	3.341	13.43	19.40	0.57%	0.30%	0.52%
0.60b	3.375	13.61	19.15	3.367	13.59	19.34	0.24%	0.15%	0.98%
0.65b	3.392	13.67	19.12	3.388	13.76	19.41	0.12%	0.65%	1.49%
0.70b	3.400	13.94	19.17	3.404	13.93	19.62	0.12%	0.07%	2.29%
0.75b	3.148	14.10	19.33	3.417	14.09	19.92	7.87%	0.07%	2.96%

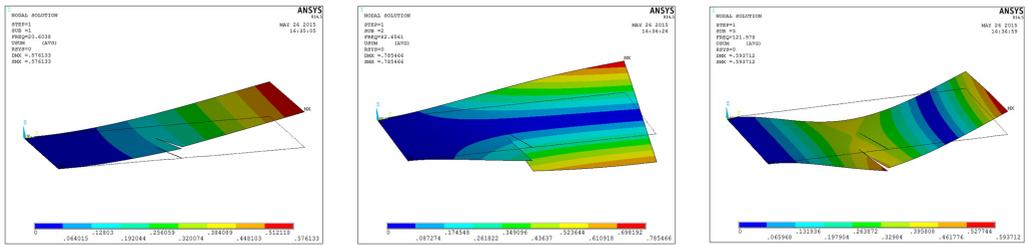


图8 时有限元仿真的前三阶模态函数图

Fig. 8 First three order model of crack plate at in ANSYS

将仿真的数据与理论计算结果进行对比,发现当裂纹参数变化时,两种结果均呈现了相同的变化规律,并且有限元仿真与理论结果的误差可以控制在一定的范围内.通过验证可以说明理论推导的正确性.

## 6 结论

本文利用 Ritz 法求得了带边角裂纹悬臂板的固有频率和模态函数,进而研究了不同裂纹参数对板固有频率的影响.并应用 Ansys 有限元分析软件

进行验证.通过本文的研究发现:

(1) 本文推导的附加角函数的模态函数可以表示裂纹处位移及转角的不连续性.

(2) 通过对本文理论分析得到的固有频率和模态与有限元软件 Ansys 得到的结果进行对比验证了本文理论推导和计算的正确性.

(3) 通过分析裂纹参数对固有频率的影响表明:①裂纹的存在使得局部刚度减小,不论对于第几阶固有频率,均是裂纹长度越长,板固有频率就越小.②裂纹靠近节线位置时频率减小的越显著.

③随着角度从负向正增大时,第一阶固有频率逐渐减小,第二阶和第三阶固有频率均先减小后增大。

本文对裂纹板的研究在损伤探测方面具有重要的应用价值,可利用本文的研究成果来探测裂纹的位置和长度,并且为以后裂纹板的非线性振动研究奠定了理论基础。

## 参 考 文 献

- 1 Yuan J, Dickinson S M. The flexural vibration of rectangular plate systems approached by using artificial springs in the Rayleigh-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 159:39~55
- 2 Yuan J, Young P G, Dickinson S M. Natural frequencies of circular and annular plates with radial or circumferential cracks. *Computer & Structures*, 1994, 53:327~34
- 3 Liew K M, Hung K C, Lim M K. Solution method for analysis of cracked plates under vibration. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, 48:393~404
- 4 Huang C S, Leissa A W, Liao S C. Vibration analysis of rectangular plates with edge V-notches. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2008, 50:1255~1262
- 5 Huang C S, Leissa A W. Vibration analysis of rectangular

- plates with side cracks via the Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 323:974~988
- 6 Huang C S, Leissa A W, Li R S. Accurate vibration analysis of thick, cracked rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330:2079~2093
- 7 Huang C S, McGee O G, Chang M J. Vibrations of cracked rectangular FGM thick plates. *Composite Structures* 2011, 93:1747~1764
- 8 陈丽华,孙玥,张伟. 三阶剪切变形板的振动特性研究. *动力学与控制学报*, 2013, 11 (Chen L H Sun Y, Zhang W. The study of the vibration characteristic of plate using the third order shear deformation theory. *Journal of Dynamics and Control*, 2013, 11 (in Chinese))
- 9 陈丽华,孙玥,张伟. 带边角裂纹悬臂矩形板的振动特性研究. *力学与工程应用*, 2012, 14:77~80 (Chen L H, Sun Y, Zhang W. Study of vibration characteristics of cantilever rectangular plate with side crack. *Application of mechanics and Engineering*, 2012, 14: 77 ~ 80 (in Chinese))
- 10 曹志远,杨昇田. 厚板动力学理论及其应用. 北京:国防工业出版社,1983:57~85 (Cao Z Y, Yang S T. Thick plate theory and its application. Beijing: Geological Publishing House, 1983:57~85 (in Chinese))

# STUDY ON VIBRATION CHARACTERISTICS OF CANTILEVERED MINDLIN PLATE WITH SIDE CRACK\*

Chen Lihua<sup>†</sup> Xue Jian Zhang Wei

(College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract** This paper examines the natural frequencies and modes of cracked Mindlin plate using the Ritz method based on the Mindlin plate theory. The vibration characteristics of cantilever Mindlin plate with a side crack are presented, and the effect of the side crack on the natural frequencies and modal function of Mindlin plate is also investigated. In this analysis, a special mode shape function composed of two parts is employed, where one part is the ideal mode shape of intact Mindlin plate obtained by the beam function combination, and the other part is the corner function which uses the vertex singularity theory to construct the expression of deflection and rotation discontinuity along the crack. The results of the Mindlin theory obtained by a high-precision numerical software of Maple is then compared and verified against the data from finite element simulation by ANSYS.

**Key words** Mindlin plate, side crack, modal function, natural frequency, Ritz method