

Willamowski-Rössler 系统混沌行为的数值仿真 及控制与同步研究^{*}

孙伟鹏 王贺元[†] 阚猛

(辽宁工业大学理学院, 锦州 121001)

摘要 模拟了 Willamowski-Rössler 化学系统经倍周期分岔进入混沌, 以及由混沌退化到周期态的全过程。给出了分岔图与最大 Lyapunov 指数谱和庞加莱截面及功率谱和返回映射图, 仿真结果揭示了该系统混沌行为的普适特征。设计了自适应控制器和非线性控制器, 通过理论分析及数值仿真实现了对其无量纲化系统的控制。采用驱动-响应的同步方法实现该系统的全局指数同步, 数值仿真结果表明该方法是有效的。

关键词 化学系统, 数值仿真, 倍周期分岔, 混沌, 混沌控制, 同步

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-54

引言

人们很早就发现化学反应中存在混沌现象^[1,2], 化学混沌作为混沌学的一个重要分支, 已经越来越被人们所关注和重视。所谓化学混沌^[3], 是指化学反应中某些组份的宏观浓度不规则地随时间变化的现象, 这种不规则性与实验条件和仪器误差无关, 是由其内部反应机理所决定的。事实上, 绝大多数的化学反应速率方程都是非线性的, 因此化学反应出现振荡(周期的或者混沌型的)是不足为奇的。1921 年, Bray 就已发现 H_2O_2 被 $\text{I}_2\text{-HIO}_3$ 催化分解的反应中出现振荡^[1]。1958 年, 别洛索夫发现, 由溴酸钾[KBrO_3]、丙二酸[$\text{CH}_2(\text{COOH})_2$]、硫酸铈[$\text{Ce}(\text{SO}_4)_2$]与硫酸的混合液中, 生成物交替出现红色和蓝色。1964 年, 扎博金斯基用锰或试亚铁灵代替催化剂铈, 从而发现了著名的 B-Z 振荡反应^[1]。1973 年, Ruelle 首次在化学反应中发现浓度随着时间做不规则的非周期变化^[4]。迄今为止, 已经在 B-Z 反应体系等许多化学反应体系中发现了化学混沌。

随着对混沌的不断探索与深入研究, 混沌控制也成为广大学者研究的热点之一^[5-8]。1989 年胡伯勒(A. Hubler)首次提出混沌可以被控制, 次年, 奥特(E. Ott)等通过参数微扰法(OGY 法)成功控制

了混沌。近年来, 混沌控制已经被广泛应用到通信加密、神经网络、计算机等众多领域^[9,10]。然而, 关于化学混沌控制方面的研究相对较少, 因此, 对 Willamowski-Rössler 化学系统^[9]的控制与同步研究对提高化学反应催化性能、改善混合过程等具有重要意义。

本文在前人工作的基础上, 结合现代非线性分析方法分析 Willamowski-Rössler 模型复杂的动力学机理, 对其动力学行为进行详细的仿真模拟。通过自适应控制^[11,12]及非线性控制方法使其无量纲系统^[13,14]稳定到了平衡点处, 采用驱动-响应方法对该系统实现了全局指数同步^[15-18], 最后通过数值仿真验证其有效性。

1 Willamowski-Rössler 系统简介

Willamowski 和 Rössler 第一次提出由化学反应机理产生的化学混沌模型, 可由如下动力学方程描述:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 x - ax^2 - k_2 xy + by^2 - k_4 xz + d \\ \frac{dy}{dt} = k_2 xy - by^2 - k_3 y + c \\ \frac{dz}{dt} = -k_4 xz + k_5 z - ez^2 + d \end{cases} \quad (1.1)$$

2017-01-18 收到第 1 稿, 2017-04-30 收到修改稿。

* 国家自然科学基金(11572146, 11526105), 辽宁省教育厅科研基金(L2013248)和锦州市科技专项基金(13A1D32)资助

† 通讯作者 E-mail: wangheyuan6400@sina.com

式中 k_i 为大于零的常数, 表示反应速率. 该化学反应体系存在的复杂动力学行为是由其内部反应机理所决定, 与实验所处条件及仪器误差无关.

牛宏在文献[9]中, 取参数 $k_1 = 30$, $a = 0.25$, $k_2 = 1$, $b = 10^{-4}$, $k_3 = 10$, $c = 10^{-3}$, $k_4 = 1$, $d = 10^{-3}$, $k_5 = 16.5$ 和 $e = 0.5$, 仿真出了系统(1.1)三维相图(如图1), 陈帝伊等学者在文献[14]中对系统(1.1)的无量纲化模型进行了分析与仿真, 均验证了该系统混沌行为的存在性. 在此基础上, 本文研究了当反应速率 k_4 变化时系统(1.1)的数值仿真问题, 仿真了系统(1.1)以倍周期分岔途径进入混沌, 再由混沌进入周期轨道的动力学行为. 模拟了系统发生分歧和混沌的全过程, 同时实现了对系统(1.1)的混沌控制与同步.

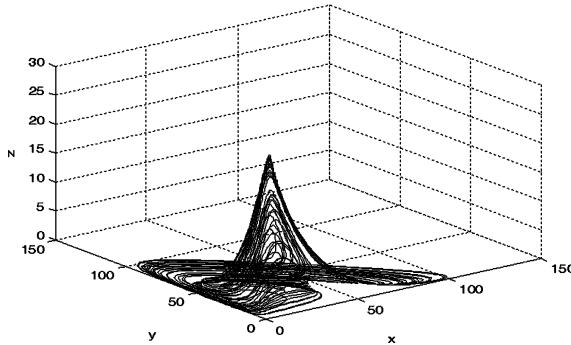


图1 系统(1.1)的三维相图

Fig.1 Three-dimensional phase diagram of model (1.1)

2 Willamowski-Rössler 系统的动力学行为仿真

文献[9]和文献[14], 只简单分析了系统(1.1)混沌行为的存在性, 并没有给出混沌发生的途径和具体过程. 在本节中, 我们对系统(1.1)进行了更加详细的数值模拟, 固定参数 $k_1 = 30$, $a = 0.25$, $k_2 = 1$, $b = 10^{-4}$, $k_3 = 10$, $c = 10^{-3}$, $d = 10^{-3}$, $k_5 = 16.5$ 和 $e = 0.5$, 仿真系统(1.1)在 k_4 取不同值时的吸引子图. 同时给出了系统(1.1)的分岔图、最大李雅普指数图、庞加莱截面、返回映射和功率谱, 从不同角度反映了系统(1.1)的混沌行为. 下面我们对仿真结果总结归纳如下:

(1) 当 $k_4 < 0.5081\cdots$ 时, 系统(1.1)是稳定的, 如图2(a).

(2) 当 k_4 增大到 $0.5081\cdots$ 时, 系统(1.1)第一次发生分岔, 出现了图2(b)所示的周期运动.

(3) 当 $k_4 < 0.8616\cdots$ 时, 系统(1.1)出现了倍周期分岔, 在 $k_4 = 0.9517\cdots$ 时再次出现了倍周期分岔, 随后 k_4 在 $0.9702\cdots$, $0.97415\cdots$, $0.974996\cdots$, 等处继续发生分岔, 最终在 $k_4 = 1$ 时, 系统(1.1)进入混沌状态, 表现为许多不规则轨迹. 而

$$\frac{0.8616\cdots - 0.5081\cdots}{0.9517\cdots - 0.8616\cdots} \approx 3.9234\cdots,$$

$$\frac{0.9517\cdots - 0.8616\cdots}{0.9702\cdots - 0.9517\cdots} \approx 4.8702\cdots,$$

$$\frac{0.9702\cdots - 0.9517\cdots}{0.97415\cdots - 0.9702\cdots} \approx 4.6835\cdots,$$

$$\frac{0.97415\cdots - 0.9702\cdots}{0.974996\cdots - 0.97415\cdots} \approx 4.66903\cdots$$

可见系统(1.1)分岔点的间隔比趋于极限 $4.669201\cdots$, 见图2(c)~(f).

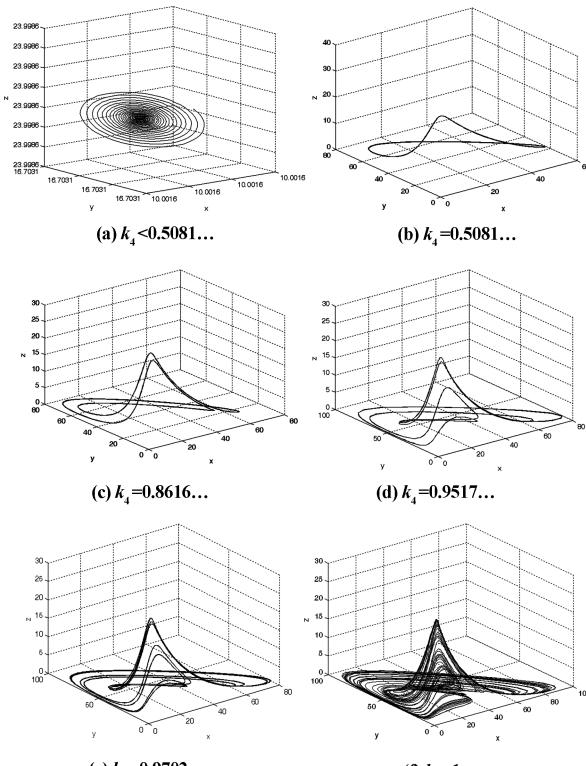


图2 倍周期分岔到达混沌

Fig.2 Period-doubling bifurcations to chaos

(4) 图3(a)给出了系统(1.1)随 k_4 变化的分岔图, 从分岔图可以看到系统进入混沌状态的全过程, 并且分岔图中的不稳定区间 $k_4 \in [0.8616\cdots, 1.03\cdots] \cup [1.1472\cdots, 1.1663]$ 与图3(b)中正的李雅普指数区间是一致的. 图4(a)~(c)分别为 $k_4 = 1$ 时系统(1.1)的庞加莱截面、返回映射和功率谱, 图中均显示了系统(1.1)的混沌特征.

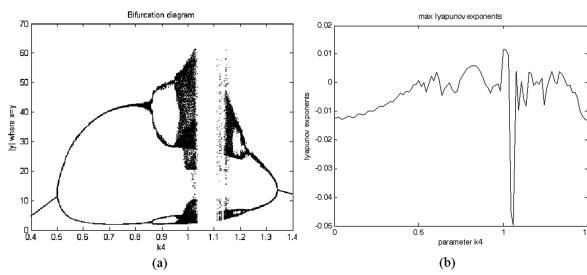


图3 系统(1.1)的分岔图(a)和最大Lyapunov指数图(b)

Fig.3 Bifurcation diagram (a) and max Lyapunov exponent (b) of the model (1.1)

(5)当 $1.03 < k_4 < 1.1472\cdots$ 时,混沌突然消失,在图4(d)放大的分岔图中,可以看到系统(1.1)此时进入周期状态。

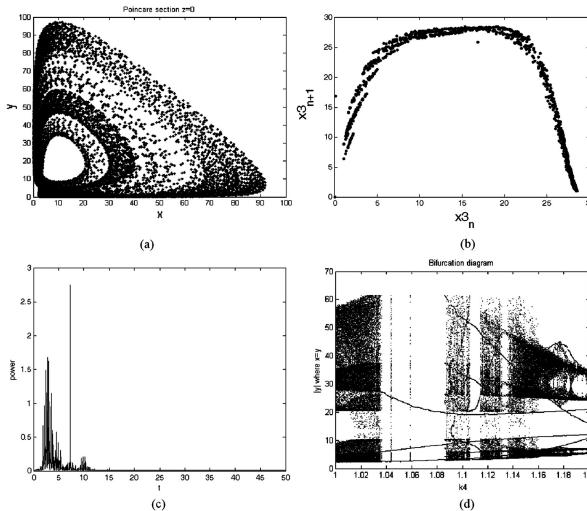


图4 系统(1.1)的庞加莱截面(a)、返回映射(b)、功率谱(c)及放大的分岔图(d)

Fig.4 Poincaré section (a), return map (b), power spectrum (c) and enlarged bifurcation diagram (d) of the model (1.1)

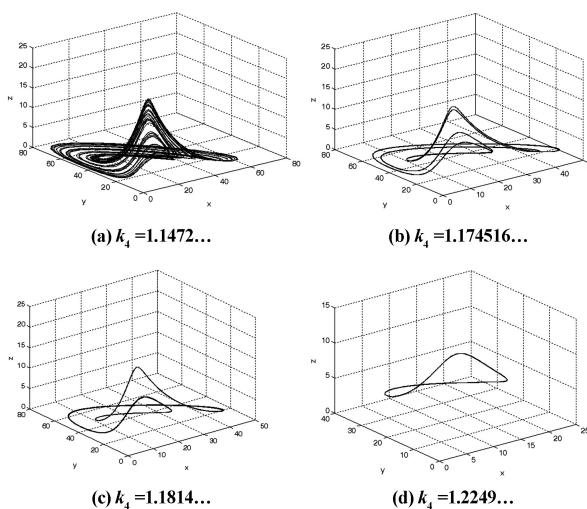


图5 由混沌进入周期解的过程

Fig.5 Process from chaos to periodic motions

(6)随后在 k_4 到达 $1.1472\cdots$ 时,系统再次进入混沌状态,这是一种间接式混沌,见图5(a).

当 k_4 继续增大,分别在 k_4 等于 $1.174516\cdots$, $1.1814\cdots$, $1.2249\cdots$ 处,系统(1.1)由混沌状态逐渐收缩成极限环,这是一个倒分岔过程,并且数值结果表明其分岔点也满足费根鲍姆常数,如图5(b)~(d).

3 Willamowski-Rössler系统的控制

3.1 Willamowski-Rössler系统的自适应控制

为了方便起见,根据数量间的量级关系,将(1.1)式转化为下面的无量纲方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 x - ax^2 - xy - xz \\ \frac{dy}{dt} = xy - k_3 y \\ \frac{dz}{dt} = -xz + k_5 - ez^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $a=0.01$,其它参数值与(1.1)式达到混沌状态时的取值相同.通过计算,该系统有六个平衡点,分别为: $P_1(0, 0, 5.7446)$, $P_2(0, 0, -5.7446)$, $P_3(10, 28.3674, 1.5326)$, $P_4(10, 51.4326, -21.5326)$, $P_5(-14.5253, 0, 30.1453)$, $P_6(2999.4499, 0, 0.0055)$.

根据自适应控制原理可得到系统(3.1)的受控形式如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 x - ax^2 - xy - xz - p_1(x - x_0) \\ \frac{dy}{dt} = xy - k_3 y - p_2(y - y_0) \\ \frac{dz}{dt} = -xz + k_5 - ez^2 - p_3(z - z_0) \end{cases} \quad (3.2)$$

其中, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 5.7446)$,当取 $P_1 = 30$, $P_2 = 20$, $P_3 = 10$,时,通过计算可知受控系统(3.2)稳定于平衡点 P_1 .

3.2 Willamowski-Rössler系统的非线性反馈控制

为了方便讨论,作如下变换:

$$\begin{cases} q_1 = x - \bar{x} \\ q_2 = y - \bar{y} \\ q_3 = z - \bar{z} \end{cases} \quad (3.3)$$

其中 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 为系统的平衡点.根据非线性反馈控制原理得到系统(3.1)受控形式为:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -aq_1^2 - q_1 q_2 - q_1 q_3 + (k_1 - 2\bar{ax} - \bar{y} - \bar{z}) q_1 - \\ \bar{x} q_2 - \bar{x} q_3 + \mu_1 \\ \dot{q}_2 = q_1 q_2 + (\bar{x} - k_3) q_2 + q_1 \bar{y} + \mu_2 \\ \dot{q}_3 = -eq_3^2 - q_1 q_3 - \bar{z} q_1 - (2\bar{ez} + \bar{x}) q_3 + \mu_3 \end{cases} \quad (3.4)$$

构造一个径向无界的Lyapunov函数:

$$V = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$$

取 $\mu_1 = p_1 q_1 - q_2^2 - \bar{y} q_2 + q_3^2 + \bar{z} q_3 + aq_1^2$, $\mu_2 = p_2 q_2 + q_1^2 + \bar{x} q_1$, $\mu_3 = p_3 q_3 + q_1^2 + eq_3^2 + \bar{x} q_1$. 当 $p_1 < -k_1 2\bar{ax} - \bar{y} - \bar{z}$, $p_2 < k_3 + \bar{x}$, $p_3 < \bar{x} + 2\bar{ez}$, 有 $\dot{V} = q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 + q_3 \dot{q}_3 < 0$, 则系统(3.4)在任意平衡点 $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 处稳定.

4 混沌控制的数值模拟

本节通过实验对所选控制器加以验证. 这里仅取不稳定平衡点 P_1 , 其他平衡点可以类似考虑. 对于自适应控制, 当 $P_1 = 30, P_2 = 20, P_3 = 10$ 时, 系统的相轨迹图如图 6(a) 所示, 可以看到系统的周期轨线被很好地控制在平衡点 P_1 处. 对于非线性反馈控制, 当 $P_1 = -40, P_2 = 5, P_3 = 2$ 时, 系统的空间相图如图 6(b) 所示, 其周期轨线也被很好地控制在平衡点 P_1 处.

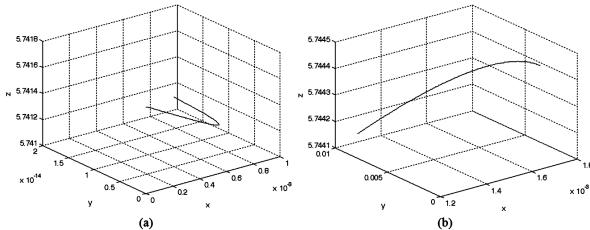


图 6 自适应控制(a)及非线性反馈控制(b)下的系统相图

Fig.6 Phase diagram of the system for self-adaptive control (a) and nonlinear feedback control (b)

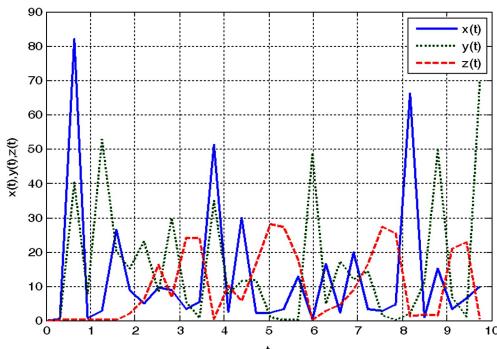


图 7 受控前系统(3.1)的时间历程图

Fig.7 Time history of the model (3.1) without control

系统(3.1)受控前 x, y, z 的时间历程如图 7 所示, 系统显示出不稳定的运动状态. 取控制时间 $t = 5$ s, 初值 $x(0) = 10, y(0) = 5, z(0) = 2$, 对于自适应控制, 其受控后的时间历程图如图 8(a)所示. 由图中可以看出, (x, y, z) 分别稳定到了 $(0, 0, 5.7446)$, 即系统(3.1)被控制到了平衡点 P_1 处. 对于非线性反馈控制, 其受控后的时间历程图如图 8(b)所示. 由图中可以看到在 t 接近 1 s 时, 系统(3.1)也被控制到平衡点 P_1 处.

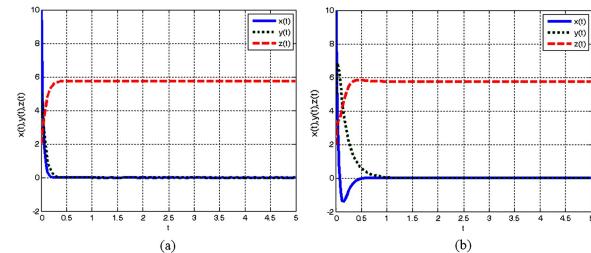


图 8 自适应(a)和非线性反馈控制(b)下系统(3.1)的时间历程图

Fig.8 Time history diagram of the model (3.1) after self-adaptive control (a) and nonlinear feedback control (b)

5 Willamowski-Rössler 系统的同步问题

考虑系统(1.1)的同步问题, 驱动系统的变量用下标 1 标注, 响应系统的变量用下标 2 标注. 则驱动系统为:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = k_1 x_1 - ax_1^2 - k_2 x_1 y_1 + b y_1^2 - k_4 x_1 z_1 + d \\ \frac{dy_1}{dt} = k_2 x_1 y_1 - b y_1^2 - k_3 y_1 + c \\ \frac{dz_1}{dt} = -k_4 x_1 z_1 + k_5 z_1 - e z_1^2 + d \end{cases} \quad (5.1)$$

对应的响应系统表示为:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = k_1 x_2 - ax_2^2 - k_2 x_2 y_2 + b y_2^2 - k_4 x_2 z_2 + d + \mu_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = k_2 x_2 y_2 - b y_2^2 - k_3 y_2 + c + \mu_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = -k_4 x_2 z_2 + k_5 z_2 - e z_2^2 + d + \mu_3 \end{cases} \quad (5.2)$$

这里 μ_1, μ_2, μ_3 为要设计的控制函数.

由响应系统减去驱动系统可得到受控的误差动力学系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = k_1 e_x - a(e_x^2 + 2x_1 e_x) - k_2(e_x e_y + x_1 e_y + y_1 e_x) + \\ b(e_y^2 + 2y_1 e_y) - k_4(e_x e_z + x_1 e_z + z_1 e_x) + \mu_1 \\ \dot{e}_y = k_2(e_x e_y + x_1 e_y + y_1 e_x) - b(e_y^2 + 2y_1 e_y) - k_3 e_y + \mu_2 \\ \dot{e}_z = -k_4(e_x e_z + x_1 e_z + z_1 e_x) + k_5 e_z - e(e_z^2 + 2z_1 e_z) + \mu_3 \end{cases} \quad (5.3)$$

其中 $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$, $e_z = z_2 - z_1$. 构造一个径向无界的 Lyapunov 函数:

$$V = e_x^2 + e_y^2 + e_z^2$$

对于误差系统(5.3), 当控制器取:

$$\begin{cases} \mu_1 = ae_x^2 + 2ax_1e_x + k_2e_xe_y + k_2x_1e_y + k_2y_1e_x - be_y^2 - \\ \quad 2by_1e_y + k_4e_xe_z + k_4x_1e_z + k_4z_1e_x - ke_x \\ \mu_2 = -k_2e_xe_y - k_2x_1e_y - k_2y_1e_x + be_y^2 + 2by_1e_y - ke_y \\ \mu_3 = k_4e_xe_z + k_4x_1e_z + k_4z_1e_x + ee_z^2 + 2ez_1e_z - ke_z \end{cases}$$

选取 $k > 30$, 有 $\dot{V} = 2e_x^2 + 2e_y^2 + 2e_z^2 < 0$, 则误差系统(5.3)的零解是全局指数稳定的, 从而驱动系统(5.1)和响应系统(5.2)是全局指数同步的.

6 Willamowski-Rössler 系统的同步仿真

我们利用 Runge-Kutta 算法来验证上面提出的方法的有效性, 驱动系统和响应系统的初值分别取 $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (17, 14, 29)$, $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (25, 36, 24)$

对于选取的控制器, 我们选取控制参数 $k = 50$ 作为系统的控制率, 可以看出驱动系统(5.1)和响应系统(5.2)很快达到了同步, 同步误差很快趋于 0(见图 9).

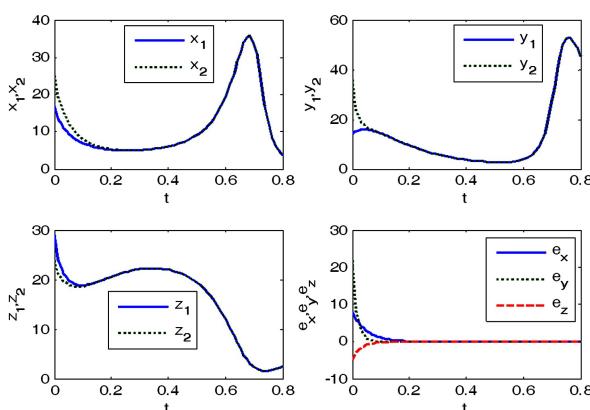


图 9 控制参数 $k=50$ 下的同步

Fig.9 Synchronization when $k=50$

7 总结

本文对 Willamowski-Rössler 系统的动力学行为进行了详细的数值仿真, 仿真结果显示, 当 $k_4 < 0.5081\cdots$ 时系统处于稳定状态, 当 $k_4 = 0.5081\cdots$ 时作周期运动, 当 $k_4 = 0.8616\cdots$ 时系统发生倍周期分岔, $k_4 = 0.9517\cdots$ 时再次发生倍周期分岔, 最终经由倍周期分岔在 $k_4 = 1$ 时进入混沌. 随后混沌消失, 系统进入周期状态, 在 $k_4 = 1.1472\cdots$ 处再次产生混沌

吸引子, 当 k_4 继续增大, 系统由混沌状态逐渐收缩成极限环.

采用自适应控制和非线性反馈控制的方法将 Willamowski-Rössler 的无量纲系统控制在平衡点处, 通过理论和数值仿真验证了两种方法的可行性.

采用驱动-响应的同步方法实现了混沌系统的全局指数同步, 并且给出了同步的条件, 通过理论分析和数值仿真表明了这些方法的有效性.

参 考 文 献

- 1 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学. 北京: 高等教育出版社, 2004 (Liu B Z, Peng J H. Nonlinear dynamics. Beijing: Higher Education Press, 2004 (in Chinese))
- 2 谢应齐, 曹杰. 非线性动力学数学方法. 北京: 气象出版社, 2001 (Xie Y Q, Cao J. Mathematical methods of nonlinear dynamics. Beijing: China Meteorological Press, 2001)
- 3 李才伟, 吴金平. 化学混沌与 BZ 反应的细观元胞自动机模拟. 计算机与应用化学, 2000, 17(6): 489~493 (Li C W, Wu J P. Simulation of chemical chaos and BZ reaction using mesoscopic cellular automaton. *Computers and Applied Chemistry*, 2000, 17(6): 489~493 (in Chinese))
- 4 李铭. B-Z 化学振荡反应的机理及其分析应用 [硕士学位论文]. 西北师范大学, 2011 (Li M. Mechanism and analytical application of B-Z oscillating chemical reactions [Master Thesis]. Northwest Normal University, 2011 (in Chinese))
- 5 Liu Y J, Zheng Y Q. Adaptive robust fuzzy control for a class of uncertain chaotic systems. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 57(3): 431~439
- 6 Mohammad M F, Saeed K. Robust control of electrically driven robots by adaptive fuzzy estimation of uncertainty. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(3): 1465~1477
- 7 Han H C. Adaptive control of a chaotic permanent magnet synchronous motor. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(3): 1311~1322
- 8 Chen G H. Controlling chaos and chaotification in the Chen-Lee system by multiple time delays. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 36(4): 843~852
- 9 牛宏. 若干类化学和生物动力系统的复杂性研究 [博士学位论文]. 东北大学, 2012 (Niu H. Researches on complexity for some classes of chemical and biological dynamic systems [Ph. D Thesis]. Northeastern University,

- 2012 (in Chinese))
- 10 Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos. *Physical Review Letters*, 1990, 64(11):1196~1199
- 11 金晓宏, 刘文浩, 黄浩. 一个比 Rössler 系统代数结构更为简单的三阶混沌系统及其混沌抑制. 科学技术与工程, 2015, 15(18):1~5 (Jin X H, Liu W H, Huang H. A third-order chaotic system whose algebraic structure simpler than the Rössler system and its chaos suppression. *Science Technology and Engineering*, 2015, 15(18):1~5 (in Chinese))
- 12 潘光, 魏静. 一种分数阶混沌系统同步的自适应滑模控制器设计. 物理学报, 2015, 64(4):45~51 (Pan G, Wei J. Design of an adaptive sliding mode controller for synchronization of fractional-order chaotic systems. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(4):45~51 (in Chinese))
- 13 Zhang Q L, Liu C, Zhang X. Complexity analysis and control of singular biological systems. Springer London, 2012, 421(4):353~368
- 14 陈帝伊, 袁茂森, 申滔等. 开放系统中多步化学反应的混沌及控制. 化学工程, 2011, 39(6):93~97 (Chen D Y, Yuan M S, Shen T, et al. Chaos analysis and control of Multi-Step chemical reaction in open system. *Chemical En-*
- gineering (China)*, 2011, 39(6):93~97 (in Chinese))
- 15 Niu H, Zhang Q L, Zhang Y J. The chaos synchronization of a singular chemical model and a Willamowski-Rössler reaction model. *International Journal of Information & System Sciences*, 2010(4):355~364
- 16 朱慧坚, 曾才斌. 参数完全未知的不同混沌系统的尺度与混合同步. 控制理论与应用, 2015, 32(3):341~346 (Zhu H J, Zeng C B. Scaling and mixed synchronization for different chaotic systems with totally unknown parameters. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(3):341~346 (in Chinese))
- 17 邵书义, 陈谋. 一类分数阶非线性混沌系统的同步控制. 计算机仿真, 2015, 32(4):394~398 (Shao S Y, Chen M. Synchronization control for a class of fractional order nonlinear chaotic system. *Computer Simulation*, 2015, 32(4):394~398 (in Chinese))
- 18 孙克辉, 贺少波, 董燕青. 简化洛伦兹混沌系统的追踪同步控制. 信息与控制, 2015, 44(4):393~397 (Sun K H, He S B, Dong Y Q. Tracking synchronization control of the simplified Lorenz chaotic system. *Information and Control*, 2015, 44(4):393~397 (in Chinese))

NUMERICAL SIMULATION, CONTROL, AND SYNCHRONIZATION RESEARCH

ON CHAOTIC BEHAVIOR OF WILLAMOWSKI-RÖSSLER SYSTEM^{*}

Sun Weipeng Wang Heyuan[†] Kan Meng

(College of Sciences, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China)

Abstract The whole process of the change of Willamowski-Rössler chemistry system from period motions to chaotic motions through double-period bifurcation, as well as the change from chaotic motions to period motions. We present bifurcation diagram, Lyapunov exponent spectrum, Poincare section, power spectrum and return map of the system, and the chaotic behavior of the model is also revealed. The adaptive and nonlinear controllers are designed, and the theoretical analysis and numerical simulation show that the chaos of the non-dimensional form of Willamowski-Rössler system can be controlled effectively. Drive-Response method is used to realize the global exponential synchronization. The simulation results show that the Drive-Response method is effective.

Key words chemical system, numerical simulation, double period-bifurcation, chaos, chaos control, synchronization

Received 18 January 2017, received 30 April 2017.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11572146, 11526105), Foundation of Liaoning Education Committee (L2013248), Special Fundation of Jinzhou Science and Technology(13A1D32).

† Corresponding author E-mail: wangheyuan6400@sina.com