

机电系统的尼尔森方程*

崔新斌¹ 傅景礼^{2†}

(1. 浙江理工大学机械与自动控制学院, 杭州 310018) (2. 浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

摘要 本文给出了一种对机电系统进行分析建模的新方法, 即机电系统尼尔森方程. 通过机电系统的尼尔森方程对机电系统进行分析建模与利用拉格朗日方程对机电系统进行分析建模具有相同的作用. 根据方程求导方式的不同可知, 在一些情况下, 使用尼尔森方程建模比使用拉格朗日方程可能会容易些. 在本文中给出机电系统尼尔森方程的推导过程并通过实例对尼尔森方程的使用加以说明.

关键词 尼尔森方程, 机电系统, 拉格朗日方程, 能量

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-43

引言

目前, 拉格朗日方程被广泛应用于机械系统^[1-3]、电路系统^[4-6]、压电系统^[7]和机电系统^[8-10]中, 并在这些系统的建模和分析方面发挥着重要的作用. 傅^[8]等人研究了机电系统的 Noether 对称性, 这使得机械系统的一些理论扩展到机电系统中. 哈密顿-拉格朗日方程是基于能量的传导机理推导出的, 而关于能量传导机理以及机电耦合系统的哈密顿原理, 在很多论文中都已有讲述. 现在, 机电换能器普遍出现在人们的生活当中. 在机电系统中, 机械能通过换能器能够转化为电能, 反之亦然. 基于哈密顿-拉格朗日的原则, 系统的且统一的研究机电系统的方法已经被建立. 尼尔森方程作为分析力学的一个重要结论, 应该被引入到机电系统的分析当中去.

利用拉格朗日方程对机械系统、电路系统机电系统分析建模的方法已经得到广泛利用. 在机械系统中, 尼尔森方程是一个重要的结论, 且得到广泛应用. 在这里, 我们研究并推导了机电系统的尼尔森方程, 给出利用尼尔森方程对机电系统分析建模的方法. 文中通过研究电容式麦克风给出尼尔森方程的使用方法和计算过程.

在机械系统中, 尼尔森方程为分析机械系统建立其微分方程提供了一种新的方法^[1]. 尼尔森方程

与拉格朗日方程有这同等重要的地位, 而且由于两种方程求导方式不同, 对一些系统建模时, 尼尔森方程可能更加的便捷. 同样, 机电系统的尼尔森方程也具有这样的作用.

1 机电系统中的尼尔森方程

1.1 机电系统的拉格朗日方程

机电系统的欧拉-拉格朗日动力学方程为:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial z_i} - \frac{\partial L}{\partial z_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial D}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = E_k \quad k = 1, \dots, n$$

上式中, z_i 是机电系统相互独立的所有机械广义坐标, q_k 为机电系统相互独立的所有电路广义坐标. m 和 n 分别为机械广义坐标和电路广义坐标的数量. Q_i 为系统中广义坐标, z_i 对应的广义非势力, E_k 为广义坐标, q_k 对应的电源电压, D 为系统耗散函数, 其中包括电能耗散和机械耗散两个部分. 函数

$$L = T^* + W_m^* - V - W_e \quad (2)$$

是系统拉格朗日函数. 式中, T^* 为系统动能, W_m^* 为系统磁余能, V 为系统势能, W_e 为系统电能.

1.2 机电系统的尼尔森方程

机电系统包括两个部分, 即机械部分和电路部分. 两个部分既有一定的联系, 又各自遵循各自相应的法则.

2016-12-06 收到第 1 稿, 2017-03-01 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(11472247, 11272287)

† 通讯作者 E-mail: sqfujingli@163.com

首先,研究机电系统的机械部分.一个机电系统的机械部分应满足虚位移的运动学约束条件,即达朗贝尔-拉格朗日原理:

$$\sum_{g=1}^N (-m_g \ddot{r}_g + F_g) \delta r_g = 0 \quad (3)$$

上式中,向量 F_g 是施加在系统的力, δr_g 为虚位移, N 表示系统质点的数量.对于机电系统, F_g 包括三个部分,即系统内力 f'_g 、系统所受外力 f''_g 和有质动力 f''_g .机械部分和电路部分是由有质动力联系,有质动力可以写为:

$$f''_g = \frac{\partial W_m^*}{\partial r_g} - \frac{\partial W_e}{\partial r_g} \quad (4)$$

根据机械系统的尼尔森方程可以得到^[1]:

$$\sum_{i=1}^m \left(2 \frac{\partial T^*}{\partial z_i} - \frac{\partial \dot{T}^*}{\partial \dot{z}_i} + Q'_i \right) \delta z_i = 0 \quad (5)$$

上式中, Q'_i 为机械系统广义坐标对应的广义力.同时可得:

$$Q'_i = \sum_{g=1}^N F_g \frac{\partial r_g}{\partial z_i} = \frac{\partial W_m^*}{\partial z_i} - \frac{\partial V}{\partial z_i} - \frac{\partial W_e}{\partial z_i} + \sum_{g=1}^N f'_g \frac{\partial r_g}{\partial z_i} \quad (6)$$

通过计算拉格朗日函数对时间的导数可得:

$$\dot{L} = \dot{T}^* + \sum_{s=1}^m \frac{\partial W_m^*}{\partial z_s} \dot{z}_s + \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_m^*}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \sum_{s=1}^m \frac{\partial V}{\partial z_s} \dot{z}_s - \sum_{s=1}^m \frac{\partial W_e}{\partial z_s} \dot{z}_s - \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_e}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \quad (7)$$

和式

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{z}_i} = \frac{\partial \dot{T}^*}{\partial \dot{z}_i} + \frac{\partial W_m^*}{\partial z_i} - \frac{\partial V}{\partial z_i} - \frac{\partial W_e}{\partial z_i} \quad (8)$$

由式(6)和(8)可得:

$$\sum_{i=1}^n \left(2 \frac{\partial L}{\partial z_i} - \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{z}_i} + Q_i \right) \delta z_i = 0 \quad (9)$$

和式

$$Q_i = \sum_{g=1}^N f'_g \frac{\partial r_g}{\partial z_i} \quad (10)$$

在系统中,式(9)中 δz_i 是彼此独立的.因此,式(9)能够改写为:

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{z}_i} - 2 \frac{\partial L}{\partial z_i} = Q_i \quad (11)$$

在机电系统中,耗散函数为:

$$D = D_m(z_i, \dot{z}_i) + D_e(\dot{q}_k) \quad (12)$$

从上式(12)可以看出, D_m 和 D_e 分别表示机电系统机械部分和电路部分的耗散,电路部分的耗散

不依赖于机械的广义坐标,机械部分的耗散与电路中电流无关.因此含有耗散的尼尔森方程为:

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{z}_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{z}_i} - 2 \frac{\partial L}{\partial z_i} = Q_i \quad (13)$$

然后,研究机电系统的电路部分.机电系统的机械部分和电路部分通过一些独立的广义坐标联系在一起.但是,电路部分必须满足基尔霍夫电压定律,电压只依赖于电路部分的广义坐标.

对于电路,电能函数为:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{q_k^2}{C_k} \quad (14)$$

在对电容器充电的过程中,电容器两极板间产生一个电势差:

$$U_k^e = \frac{\partial W_e}{\partial q_k} = \frac{q_k}{C_k} \quad (15)$$

磁余能函数为:

$$W_m^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n L_{kr} \dot{q}_k \dot{q}_r \quad (16)$$

上式中, L_{kr} ($k \neq r$) 是第 k 个独立回路与第 r 个独立回路的互感系数, L_{kk} 为第 k 个回路的自感系数,且:

$$L_{kr} = L_{rk}(z_i) \quad (17)$$

现在,利用 U_k^i 代表第 k 个独立回路产生的感应电动势, E_k 表示第 k 个独立回路电源电压.根据基尔霍夫电压定律可得:

$$U_k^i + E_k = R_k \dot{q}_k + U_k^e \quad (18)$$

根据式(18)可得:

$$\frac{\partial W_m^*}{\partial \dot{q}_k} + R_k \dot{q}_k - \frac{\partial W_m^*}{\partial \dot{q}_k} = E_k \quad (19)$$

电路部分耗散为:

$$D_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n R_k \dot{q}_k^2 \quad (20)$$

且

$$R_k \dot{q}_k = \frac{\partial D_e}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} \quad (21)$$

然后,计算偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}_h} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 W_m^*}{\partial z_i \partial \dot{q}_h} \dot{z}_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 W_m^*}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h} \dot{q}_k - \frac{\partial W_e}{\partial \dot{q}_h} \\ &= \frac{\partial \dot{W}_m^*}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial W_e}{\partial \dot{q}_h} \end{aligned} \quad (22)$$

和偏导数:

$$\frac{\partial L}{\partial q_h} = \frac{\partial W_e}{\partial q_h} \quad (23)$$

将式(21)、(22)和(23)带入(19)得:

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_h} - 2 \frac{\partial L}{\partial q_h} = E_k \quad (24)$$

综上所述,式(13)和(24)为机电系统的尼尔森方程,即:

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{z}_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{z}_i} - 2 \frac{\partial L}{\partial z_i} = Q_i \quad (25)$$

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} - 2 \frac{\partial L}{\partial q_k} = E_k$$

1.3 机电系统的尼尔森方程与拉格朗日方程的等效性

电磁扬声器是一个简单的机电系统.下面分析该系统来验证机电系统的尼尔森方程与拉格朗日方程的等效性.

扬声器将电能转换为声能.图 1 是低频的扬声器模型,其机械部分为含有阻尼的弹簧-质量系统, m 、 k 、 c 为对应元件的常数, T 是传感器常数.

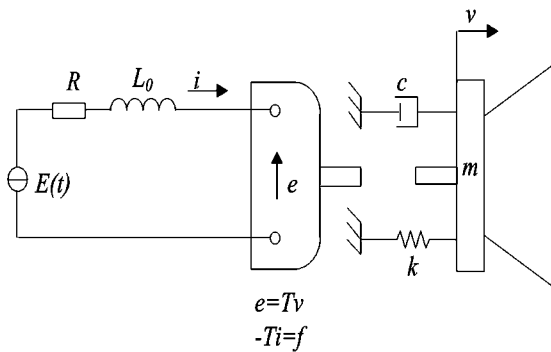


图 1 电磁扬声器

Fig.1 Electromagnetic loudspeaker

选取系统中的广义坐标为 x 和 $q (q=i)$, 系统能量函数为:

$$T^* = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 \quad (26)$$

$$W_m^* = \frac{1}{2} L_0 \dot{q}^2 + T \dot{q} (x - x_0)$$

$$W_e = 0$$

系统耗散为:

$$D = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 + \frac{1}{2} R \dot{q}^2 \quad (27)$$

从上式(26)可得系统拉格朗日函数为:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L_0 \dot{q}^2 + T \dot{q} (x - x_0) - \frac{1}{2} k x^2 \quad (28)$$

首先,将式(27)和(28)带入式(1)得:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx - T \dot{q} = 0 \quad (29)$$

$$T \ddot{x} + L_0 \ddot{q} + R \dot{q} = E(t)$$

式(29)即为电磁扬声器的拉格朗日方程.

然后,对拉格朗日函数对时间求导得:

$$\dot{L} = m \dot{x} \ddot{x} + L_0 \dot{q} \ddot{q} + T \dot{q} (x - x_0) + T \dot{q} \dot{x} - k x \dot{x} \quad (30)$$

将式(27)和(30)带入式(25)得:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx - T \dot{q} = 0 \quad (31)$$

$$T \ddot{x} + L_0 \ddot{q} + R \dot{q} = E(t)$$

式(31)即为电磁扬声器的尼尔森方程.通过比较,式(29)和(31)完全相同.因此,我们可以看出机电系统的尼尔森方程与拉格朗日方程具有相同的作用.

机电系统拉格朗日方程和尼尔森方程除具有等效性外也有不同.其中,尼尔森方程在其计算过程中与拉格朗日方程有差异,尼尔森方程是计算

$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{z}_i}$ 和 $\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}_k}$, 而拉格朗日方程是计算 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right)$ 和 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)$. 在一些情况下,计算 $\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{z}_i}$ 和 $\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}_k}$ 可能比计算 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right)$ 和 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)$ 简单.因此,由于求导方式的不同,在一些情况下,使用尼尔森方程去建立偏微分方程可能比拉格朗日方程去建立更简单.

2 电容式麦克风

利用实例电容式麦克风来说明机电尼尔森方程的分析建模过程.

电容式麦克风由一个固定的极板和一个与之平行的可动极板组成,后者与弹簧相连.该电容通过一个具有电压源和 RL 支路的串联电路充电.电阻 R 两端的电势差可反映作用于极板上的压强.

图 2 为电容式麦克风的模型,在系统中, c 为机械部分阻尼系数, k 是弹簧弹性系数, m 为动极板的质量. x_0 表示两个极板的距离, x_1 表示弹簧在平衡位置的伸长.假设可动极板电容的电容值为:

$$C(x) = \frac{\xi A}{x_0 - x} \quad (32)$$

在平衡位置时,电容器的电量 q_0 在两极板间产生一个吸引力为:

$$f_e = - \left(\frac{\partial W_e}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q_0^2}{2C(x)} \right]_0 = \frac{q_0^2}{2\xi A} \quad (33)$$

它与弹簧力相平衡,因此有:

$$kx_1 = \frac{q_0^2}{2\xi A} \quad (34)$$

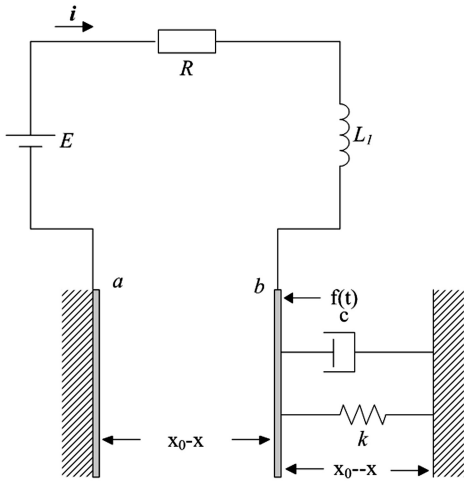


图2 电容式麦克风

Fig.2 Capacitive microphone

选取广义坐标为 x 和 q , 在这里 $i = q$. 系统的能量函数为:

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ W_m^* &= \frac{1}{2} L_1 \dot{q}^2 \\ V &= \frac{1}{2} k (x+x_1)^2 \end{aligned} \quad (35)$$

$$W_e = \frac{1}{2C} (q_0+q)^2 = \frac{x_0-x}{2\xi A} (q_0+q)^2$$

因此,系统拉格朗日函数为:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L_1 \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k (x+x_1)^2 - \\ &\quad \frac{x_0-x}{2\xi A} (q_0+q)^2 \end{aligned} \quad (36)$$

求上式的关于时间的导数为:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= m \dot{x} \ddot{x} + L_1 \dot{q} \ddot{q} - k (x+x_1) \dot{x} + \\ &\quad \frac{1}{2\xi A} (q_0+q)^2 - \frac{x_0-x}{\xi A} (q_0+q) \dot{q} \end{aligned} \quad (37)$$

系统耗散为:

$$D = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 + \frac{1}{2} R \dot{q}^2 \quad (38)$$

因此,由上可以得到系统的尼尔森方程为:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} + c \dot{x} + k (x+x_1) - \frac{1}{2\xi A} (q_0+q)^2 &= f \\ L_1 \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{x_0-x}{\xi A} (q_0+q) &= E \end{aligned} \quad (39)$$

在平衡位置, $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0 = q = \dot{q} = \ddot{q} = f$, 尼尔森方程(39)能够缩写为:

$$kx_1 = \frac{q_0^2}{2\xi A} \quad (40)$$

$$E = \frac{x_0 q_0}{\xi A}$$

假设 $q \ll q_0$, $x \ll x_0$, 即系统关于平衡位置作小幅度振动,有:

$$(q_0+q)^2 \approx q_0^2 + 2q_0 q \quad (41)$$

$$(x_0-x)(q_0+q) \approx x_0 q_0 - q_0 x + x_0 q$$

通过式(40)和(41),式(39)能被改写为:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx - \frac{q_0 q}{\xi A} = f \quad (42)$$

$$L_1 \ddot{q} + R \dot{q} - \frac{q_0 x}{\xi A} + \frac{x_0 q}{\xi A} = 0$$

3 小结

在本文中,我们提出用尼尔森方程为机电系统建模的方程并给出了计算过程.这种方法与拉格朗日方程具有相同的作用.无论机电系统中机械部分和电路部分是否有耦合,我们都可以利用尼尔森方程为其建模.在机械系统中,尼尔森方程为一些系统建立方程提供一种更为简单的方法,而本文将这种方程扩展到机电系统中,为机电系统建立微分方程提供了一种新的方法.

参 考 文 献

- 1 梅凤翔. 分析力学. 北京:北京理工大学出版社, 2013 (Mei F X. Analytical mechanics. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013 (in Chinese))
- 2 翟晓阳,傅景礼. 汽车车体振动系统的对称性与守恒量研究. 应用数学和力学, 2015, 36(12): 1285~1239 (Zhai X Y, Fu J L. Study on symmetries and conserved quantities of vehicle body vibration system. *Applied mathematics and Mechanics*, 2015, 36(12): 1285~1293 (in Chinese))
- 3 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京:科学出版社, 1999 (Mei F X. Application of lie groups and lie algebras to constrained mechanical systems. Beijing: Science Press, 1999 (in Chinese))
- 4 Scherpen J M A, Klaassens J B, Ballini L. Lagrangian modeling and control of DC-to-DC converters. *Proceedings*

- of the *IEEE INTELEC*, 1999,99CH37007:31~41
- 5 Scherpen J M A, Jeltsema D, Klaassens J B. Lagrangian modeling and control of switching networks with integrated coupled magnetics. *IEEE Conference on Decision & Control*, 2000,4:4054~4059
- 6 Stramigioli S. Modeling and IPC control of interactive mechanical system: A coordinate free approach. London: Springer, 2001
- 7 谢煜,傅景礼,陈本永. 压电堆叠作动器的对称性求解. *应用数学和力学*, 2016,37(8):778~790 (Xie Y, Fu J L, Chen B Y. Solution of symmetries for piezoelectric stack actuators. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016,37(8):778~790 (in Chinese))
- 8 Fu J L, Chen L Q. On Noether symmetries and form invariance of mechanico-electrical systems. *Physics Letters A*, 2004,331(3-4):138~152
- 9 Preumont A. Mechatronics dynamics of electromechanical and piezoelectric systems. Netherlands: Springer, 2006
- 10 邱家俊. 机电分析动力学. 北京:科学出版社, 1992 (Qiu J J. Electromechanical analytical mechanics. Beijing: Science Publishing Company, 1992 (in Chinese))

NIELSEN'S EQUATIONS OF ELECTROMECHANICAL SYSTEMS *

Cui Xinbin¹ Fu Jingli^{2†}

(1.School of Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

(2.School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract In this paper, a new method for the analysis and modeling of electromechanical systems was presented, namely the Nielsen's formulation. Nielsen's equations of electromechanical systems can be useful for establishing equations, and have the same effect to build a model for electromechanical systems like Lagrange's equations. According to the derivation of the equation, it can be seen that it is easier to use the Nielsen equation than to use the Lagrange's equation in some cases. The derivation of the Nielsen's equation for electromechanical systems is given, and the use of the Nielsen's equation is also illustrated by examples in this paper.

Key words Nielsen's equations, electromechanical systems, Lagrange's equations, energy