第 16 卷第 1 期 2018 年 2 月
1672-6553/2018/16(1)/1-5
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol.16 No.1
Feb. 2018

Mathews-Lakshmanan 振子方程的分析力学解法 *

李京颖[1]　丁光涛[2†]
(1.阜阳师范学院物理与电子科学学院,阜阳　236032)(2.安徽师范大学物理与电子信息学院,芜湖　241000)

摘要　本文以求解非线性非保守的 Mathews-Lakshmanan 振子(以下简写成 M-L 振子)为例,说明分析力学理论和方法在非线性系统研究中的应用.根据变分法逆问题理论,将 M-L 振子方程变换为自伴随形式方程;利用四种方法构造出振子的拉格朗日函数和哈密顿函数;分别基于诺特理论和哈密顿-雅可比方法得到 M-L 振子方程的解.

关键词　Mathews-Lakshmanan 振子,　变分法逆问题,　非线性,　分析力学

DOI:　10.6052/1672-6553-2017-66

引言

非线性的振荡是无处不在的事物运动发展的现象,除了传统的力学物理学和诸多工程技术科学外,还涉及从天体系统大气系统,到生态系统经济系统等很多自然和社会科学领域,人们以非线性微分方程模拟这些现象,利用多种方法求解这些方程,得到很多重要的研究成果[1,2].然而,对有些基本的理论问题而言,例如,涉及的系统的量子化时,近似解法、计算方法或实验的方法就达不到要求,因为理论要求能够导出系统的拉格朗日函数和哈密顿函数,能够得到精确的解析解.虽然这样的非线性系统很少,但是有必要研究它们,而且也存在不同的研究途径和方法[3-10].上世纪中叶以来,分析力学理论在很多方面仍然取得新的进展,例如,变分法逆问题和对称性与守恒量理论,分析力学理论和方法在求解微分方程中得到广泛的应用,这就为非线性系统研究提供了新的重要基础和途径[11-20].在力学和物理学的研究中,振动是一个重要课题,人们将线性的保守的振子系统,多方面推广变形,其中之一就是非线性非保守的 Mathews-Lakshmanan 振子(以下简写成 M-L 振子),此后,对该振子及其推广进行了多方面的研究,包括它的量子化[7-10].本文利用分析力学研究 M-L 振子,包括根据变分法逆问题理论和方法,将方程变换为自伴随方程,利用四种方法计算对应的拉格朗日函数和哈密顿函数,实现方程的分析力学化,再从拉格朗日力学和哈密顿力学两条途径,得到振子方程的解,从而以此振子为例,说明分析力学理论和方法在非线性系统研究中的价值.

1　M-L 振子方程的自伴随形式

1.1　一维微分方程系统的自伴随条件

根据变分法逆问题的理论和方法[12],对写成基本形式的一维系统:

$$A(t,q,\dot{q})\ddot{q}+B(t,q,\dot{q})=0 \tag{1}$$

自伴随的充分和必要条件是:

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q}\dot{q}=\frac{\partial B}{\partial \dot{q}} \tag{2}$$

据此可知,对运动学形式的一维系统:

$$\ddot{q}+f(t,q,\dot{q})=0 \tag{3}$$

自伴随的充分和必要条件是:

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}=0 \tag{4}$$

若方程(3)不满足条件(4),则通过引入因子 $\varphi(t,q,\dot{q})$,将式(3)变换成:

$$\varphi(t,q,\dot{q})\ddot{q}+\varphi(t,q,\dot{q})f(t,q,\dot{q})=0 \tag{5}$$

代入条件(2),得到确定 φ 的方程:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}}f+\varphi\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial q}\dot{q} \tag{6}$$

2016-05-15 收到第 1 稿,2016-09-25 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11472063)
† 通讯作者 E-mail: dgt695@sina.com

如果从上述方程解得 $\varphi(t,q,\dot{q})$，代入式(5)，就将方程(3)变换为满足自伴随条件的基本形式的运动微分方程.

1.2 将 M-L 振子方程变换为自伴随形式

1974年，Mathews 和 Lakshmanan 提出一种非线性非保守振子[6,7]：

$$\ddot{x}-\frac{\lambda x}{1+\lambda x^2}\dot{x}^2+\frac{\omega_0^2 x}{1+\lambda x^2}=0 \qquad (\lambda>0) \tag{7}$$

多年来，已经有一系列工作涉及上述振子的经典解和量子化的研究，也涉及将它推广成多维系统等[8-10]. 下面将根据变分法逆问题理论和方法，实现方程(7)分析力学化. 首先，将它变换成为自伴随形式的方程，从而证明该方程可以构造对应的拉格朗日函数和哈密顿函数，将其表示为拉格朗日方程和哈密顿方程形式. 显然，方程(7)不满足条件(4)，故引入因子 φ，代入式(6)得到：

$$-\frac{2\lambda x}{1+\lambda x^2}\dot{x}\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\left(-\frac{\lambda x}{1+\lambda x^2}\dot{x}^2+\frac{\omega_0^2 x}{1+\lambda x^2}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\dot{x} \tag{8}$$

这个方程的一个解为：

$$\varphi=\frac{1}{1+\lambda x^2} \tag{9}$$

即方程(7)能够变换成为如下自伴随方程：

$$\frac{1}{1+\lambda x^2}\ddot{x}-\frac{\lambda x}{(1+\lambda x^2)^2}\dot{x}^2+\frac{\omega_0^2 x}{(1+\lambda x^2)^2}=0 \tag{10}$$

换句话说，*M-L* 振子(7)能够间接地表示为拉格朗日方程形式.

2 M-L 振子方程的拉格朗日函数

2.1 构造 M-L 振子方程的拉格朗日函数的途径一

对于自伴随形式的微分方程有多种途径构造拉格朗日函数，其中之一是 Engels 第一方法[12]. 若一维系统(1)是自伴随的，则其拉格朗日函数为：

$$L=-q\int_0^1 d\tau\left[A(t,\tau q,\tau\dot{q})\tau\ddot{q}+B(t,\tau q,\tau\dot{q})\right]+\frac{d}{dt}\int_0^1 d\tau\int_0^1 d\tau' \tau q A(t,\tau q,\tau'\tau\dot{q})\dot{q} \tag{11}$$

这是一种比较简单的直接计算方法，将

$$A=\frac{1}{1+\lambda x^2}$$

$$B=\left(-\frac{\lambda x}{(1+\lambda x^2)^2}\dot{x}^2+\frac{\omega_0^2 x}{(1+\lambda x^2)^2}\right)$$

代入式(11)，计算得到：

$$L=\frac{\dot{x}^2}{2(1+\lambda x^2)}+\frac{\omega_0^2}{2\lambda(1+\lambda x^2)} \tag{12}$$

2.2 构造 M-L 振子方程的拉格朗日函数的途径二

有些情况下，通过变量变换可以将非自伴随的方程变换成为自伴随形式的，构造得到新变量的拉格朗日函数后，再变换成原来变量的拉格朗日函数[17,18].

文献[18]中通过变量变换方法，对下列变系数非线性动力学系统：

$$\ddot{x}+b(x)\dot{x}^2+c(x)x=0 \tag{13}$$

消去包含 $\dot{x}$ 的项，导出对应的拉格朗日函数后，再变换回到原来的变量，得到如下拉格朗日函数：

$$L_1(\dot{x},x)=\frac{1}{2}\dot{x}^2 e^{2I_b(x)}-\int_{x_0}^{x}\bar{x}c(\bar{x})e^{2I_b(\bar{x})}d\bar{x} \tag{14}$$

其中：

$$I_b=\int_{x_0}^{x}b(\tilde{x})d\tilde{x} \tag{15}$$

比较式(13)和(7)，对 *M-L* 振子有：

$$b(x)=-\frac{\lambda x}{1+\lambda x^2}$$

$$c(x)=\frac{\omega_0^2}{1+\lambda x^2} \tag{16}$$

代入式(15)和(14)，得到式(12)拉格朗日函数 L.

文献[17]提出另一种利用变量变换构造拉格朗日函数的方法，将此方法应用到方程(13)，同样得到式(14)结果，即对方程(7)又导出式(12).

2.3 构造 M-L 振子方程的拉格朗日函数的途径三

文献[19]给出一种从下列一维系统：

$$\ddot{x}=Q(t,x,\dot{x}) \tag{17}$$

的第一积分 $I(t,x,\dot{x})$ 直接构造拉格朗日函数的方法. 当第一积分满足条件：

$$\frac{\partial^2 I}{\partial\dot{x}^2}\neq 0 \tag{18}$$

系统的拉格朗日函数可以写成以下形式：

$$L=A(t,x)I(t,x,\dot{x})+B(t,x) \tag{19}$$

其中系数 $A(t,x)$ 和 $B(t,x)$ 由下列方程确定：

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\right)\frac{\partial I}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial A}{\partial x}I-2A\frac{\partial I}{\partial x}+A\frac{\partial I}{\partial\dot{x}}\frac{\partial Q}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial B}{\partial x}=0 \tag{20}$$

对方程(7)应当先导出第一积分，为此将方程改写成：

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}-\frac{\lambda x}{1+\lambda x^2}\dot{x}^2+\frac{\omega_0^2 x}{1+\lambda x^2}=0$$

上式乘以积分因子$\frac{1}{1+\lambda x^2}$，写成：

$$\frac{d}{dx}\frac{\dot{x}^2}{2(1+\lambda x^2)}+\frac{\omega_0^2 x}{(1+\lambda x^2)^2}=0$$

由此可得第一积分：

$$I=\frac{\dot{x}^2}{2(1+\lambda x^2)}-\frac{\omega_0^2}{2\lambda(1+\lambda x^2)}=E \tag{21}$$

将满足条件(18)的上述积分 I 和 $Q=\frac{\lambda x}{1+\lambda x^2}\dot{x}^2-\frac{\omega_0^2 x}{1+\lambda x^2}$，代入方程(20)，可以得到：

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\right)\frac{\dot{x}}{1+\lambda x^2}-\frac{\partial A}{\partial x}\left[\frac{\dot{x}^2}{2(1+\lambda x^2)}-\frac{\omega_0^2}{2\lambda(1+\lambda x^2)}\right]-$$
$$2A\left[-\frac{\lambda x\dot{x}^2}{(1+\lambda x^2)^2}+\frac{\omega_0^2 x}{(1+\lambda x^2)^2}\right]+$$
$$A\left[\frac{\dot{x}}{1+\lambda x^2}\times\left(-\frac{2\lambda x\dot{x}}{1+\lambda x^2}\right)\right]-\frac{\partial B}{\partial x}=0$$

上述方程存在如下一组解：

$$A=1,B=\frac{\omega_0^2}{\lambda(1+\lambda x^2)} \tag{22}$$

代入式(20)，又得到式(12)拉格朗日函数 L.

2.4　构造 M-L 振子方程的拉格朗日函数的途径四

文献[20]给出一种直接从运动方程构造 Lagrange函数的直接方法.根据此方法，对方程(7)，可以设拉格朗日函数：

$$L=\frac{1}{2}u(x)\dot{x}^2+v(x) \tag{23}$$

代入拉格朗日方程，得到：

$$u\ddot{x}+\frac{1}{2}\frac{du}{dx}\dot{x}^2-\frac{dv}{dx}=0$$

与方程(7)比较，得到：

$$\frac{1}{2u}\frac{du}{dx}=-\frac{\lambda x}{1+\lambda x^2},-\frac{1}{u}\frac{dv}{dx}=\frac{\omega_0^2 x}{1+\lambda x^2} \tag{24}$$

由此可得一组解：

$$u=\frac{1}{1+\lambda x^2},v=\frac{\omega_0^2}{2\lambda(1+\lambda x^2)} \tag{25}$$

代入式(23)，又导出式(12)拉格朗日函数 L.

3　M-L 振子方程的哈密顿函数

对于非线性系统的某些研究，还需要构造系统的哈密顿函数.在导出系统的拉格朗日函数后，利用勒让德变换，即可以导出哈密顿函数.由式(12)得到方程(7)的哈密顿函数：

$$H=\frac{1}{2}(1+\lambda x^2)p^2-\frac{\omega_0^2}{2\lambda(1+\lambda x^2)} \tag{26}$$

式中广义动量：

$$p=\frac{\dot{x}}{1+\lambda x^2} \tag{27}$$

上述拉格朗日函数(12)和哈密顿函数(26)，与通常简谐振子拉格朗日函数和哈密顿函数存在一定的相似性，因此有人将 M-L 振子(7)看作质量与位置(坐标)相关的振子，哈密顿函数(26)是讨论 M-L 振子量子化的出发点.

4　M-L 振子方程的经典解

4.1　利用拉格朗日函数根据诺特理论求解

导出拉格朗日函数(12)后，可以根据诺特(Noether)理论导出守恒量[14]，由于函数 L 不显含时间 t，故可从时间平移对称性导出振子的守恒量为：

$$I=\frac{\dot{x}^2}{2(1+\lambda x^2)}-\frac{\omega_0^2}{2\lambda(1+\lambda x^2)} \tag{28}$$

这就是前面已经从运动方程直接导出的广义能量积分(21).由此积分进一步得到振子的解为：

$$t-t_0=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{2\lambda Ix^2+2I+\frac{\omega_0^2}{\lambda}}} \tag{29}$$

当 $I<0$ 时，振子存在严格的周期解：

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{30}$$

式中：

$$\omega=\frac{\omega_0}{\sqrt{1+\lambda A^2}} \tag{31}$$

这就是说，这个非线性振子周期(频率)与振幅相关.

4.2　利用哈密顿函数根据哈密顿-雅可比理论求解

在导出哈密顿函数(26)后，可以列出正则方程求解，也根据哈密顿-雅可比理论求解[22].由于式(26)中的哈密顿函数不显含时间，故哈密顿-雅可比方程写成：

$$H=\frac{1}{2}(1+\lambda x^2)\left(\frac{dK}{dx}\right)^2-\frac{\omega_0^2}{2\lambda(1+\lambda x^2)}=I \tag{32}$$

上述方程的积分为：

$$K=\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{2I}{1+\lambda x^2}+\frac{\omega_0^2}{\lambda(1+\lambda x^2)^2}}dx \tag{33}$$

振子的运动方程由下式给出:

$$t-t_0=\frac{\partial K}{\partial I}=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{2\lambda Ix^2+2I+\frac{\omega_0^2}{\lambda}}}$$

这个结果与式(29)相同.

5 结果与讨论

(1)本文对M-L振子给出了全面的分析力学求解过程:根据变分法逆问题理论和方法,从变换为自伴随形式的方程,说明它能够分析力学化;利用多种不同的途径构造得到振子的拉格朗日函数,进而导出哈密顿函数,即实现振子的分析力学化;分别通过诺特对称性与守恒量理论和哈密顿-雅可比方法,得到M-L振子的解析解.

(2)非线性现象是普遍存在的,研究的方法也多种多样的.M-L振子是一种非线性非保守的振动系统,也研究了它的量子化问题,这个振子系统可以被推广,有些系统的近似研究可以由它出发,因此,在经典力学基础上给出它的解析解是必要的.M-L振子的解法说明在非线性研究中可以利用分析力学理论和方法,与矢量力学相比,分析力学发展了更多更有效的积分方法[14,15,22],因此在研究非线性系统时,应当重视分析力学理论和方法.

(3)力学系统,包括非线性系统的分析力学化,关键在于构造对应的拉格朗日函数和哈密顿函数,这就表明变分法逆问题的理论和方法的研究和应用,应当得到进一步重视.

参考文献

1 刘延柱,陈立群. 非线性振动. 北京:高等教育出版社,2001 (Liu Y Z, Chen L Q. Nonlinear vibration. Beijing: Higher Education Press, 2001 (in Chinese))

2 刘秉正. 非线性动力学. 北京:高等教育出版社,2004 (Liu B Z. Nonlinear dynamics. Beijing: Higher Education Press, 2004 (in Chinese))

3 Chandrasekar V K , Senthilvelan M, Lakshmanan M . On the complete integrability and linearization of certain second-order nonlinear ordinary differential equations. In: Proceedings Mathematical Physical & Engineering Sciences, 2005,461(2060):2451~2476

4 Chandrasekar V K, Pandey S N, Senthilvelan M, et al. A simple and unified approach to identify integrable nonlinear oscillators and systems. *Journal of Mathematical Physics*, 2006,47(2):4527

5 Pradeep R G, Chandrasekar V K, Senthilvelan M, et al. Non-standard conserved hamiltonian structures in dissipative/damped systems: Nonlinear generalizations of damped harmonic oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, 2009,50(5):63

6 Lakshmanan M, Chandrasekar V K. Generating finite dimensional integrable dynamical systems. *European Physical Journal Special Topics*, 2013, 222(3-4):665~688

7 Mathews P M, Lakshmanan M. On a unique nonlinear oscillator. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1974,32:215

8 Carinena J, Ranada M, Santander M. One-dimensional model of a quantum nonlinear harmonic oscillator. *Reports on Mathematical Physics*, 2005,54(2):285~293

9 Carinena J, Ranada M, Santander M. A quantum exactly solvable non-linear oscillator with quasi-harmonic behaviour. *Annals of Physics*, 2007, 322(2):434~459

10 Quesne C. Generalized nonlinear oscillators with quasi-harmonic behaviour: classical solutions. *Journal of Mathematical Physics*, 2014,56(1):215

11 梅凤翔,吴惠彬. 微分方程的分析力学方法. 北京:科学出版社,2012 (Mei F X, Wu H B. Methods of analytical mechanics for solving differential equations. Beijing: Sceince Press, 2012(in Chinese))

12 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics I, New York: Springer-Verlag,1978

13 Saunders D J. Thirty years of the inverse problem in the calculus of variations. *Reports on Mathematical Physics*, 2010, 66: 43~53

14 梅凤翔. 约束力学系统的对称性和守恒量. 北京:北京理工大学出版社,2004 (Mei F X. Symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2004 (in Chinese))

15 罗绍凯,张永发. 约束系统动力学研究进展. 北京:科学出版社,2008 (Luo S K, Zhang Y F. Advances in the study of dynamics of contrained systems. Beijing: Sceince Press, 2008 (in Chinese))

16 丁光涛. 一维变系数耗散系统Lagrange函数和Hamilton函数的新构造方法. 物理学报, 2011,60: 444503 (Ding G T. A new approach to construction of the Lagrangians and Hamiltonians for one-dimensional dissipative systems with variable coefficients. *Acta Physica Sinica*, 2011,60:444503 (in Chinese))

17 丁光涛. 利用变量变换构造耗散系统 Lagrange 函数. 动力学与控制学报,2012,10: 199 ~ 201 (Ding G T. The construction of th Lagrangians for dissipative-like systems by using the transformations of variables. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, 10: 199 ~ 201 (in Chinese))

18 Musielak Z E, Roy D, Swift L D. Method to derive Lagrangian and Hamiltonian for a nonlinear dynamical system with variable coefficients. *Chaos, Solitons and Fractols*, 2008,38:894~902

19 丁光涛. 从第一积分构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报,2011,9:102~106 (Ding G T. A direct approach to construction of the Lagrangian from the first integral. *Journal of Dynamics and Control*, 2011,9: 102~106 (in Chinese))

20 丁光涛. 从运动方程构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报,2010,8:305~310 (Ding G T. A direct approach to the construction of Lagrangians from the motion equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8:305~310 (in Chinese))

21 丁光涛. 导出变系数非线性动力学系统拉格朗日函数的两种方法. 动力学与控制学报, 2017,15(1):10~14 (Ding G T. Two methods to derive Lagrangians for a nonlinear dynamical system with variable coefficients. *Journal of Dynamics and Control*, 2017,15(1):10~14 (in Chinese))

22 陈滨. 分析动力学(第二版). 北京:北京大学出版社, 2012 (Chen B. Analytical Dynamics(2nd ed.). Beijing: Beijing University Press, 2012 (in Chinese))

ANALYTICAL MECHANICS METHODS FOR SOLVING MATHEWS-LAKSHMANAN OSCILLATOR *

Li Jingying[1]　Ding Guangtao[2†]

(1.*College of Physics and Electronic science*, *Fuyang Normal college*, *Fuyang*　236032, *China*)

(2.*College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu*　241000, *China*)

Abstract　The solving of non-conservative and non-linear Mathews-Lakshmanan oscillator is taken as an example to illustrate the application of the theories and methods of analytical mechanics in studying the non-linear systems. According to the theories of inverse problem of variational calculus, the equation of M-L oscillator is transformed into a self-adjoint equation. The Lagrangian and Hamiltonian of M-L oscillator are also constructed by four methods. Eventually, the equation of M-L oscillator is solved based on the Noether theory and the Hamilton-Jacobi method, respectively.

Key words　Mathews-Lakshmanan oscillator,　inverse problem of variational calculus,　nonlinearity,　analytical mechanics

Received 15 May 2016, revised 25 September 2016.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11472063).

† Corresponding author E-mail: dgt695@ sina.com