

CFRP 索斜拉桥面内自由振动的多索梁模型 及模态分析*

丛云跃¹ 康厚军^{1†} 郭铁丁¹ 苏潇阳¹ 金怡新²

(1.湖南大学 土木工程学院,长沙 410082) (2.成都亚佳工程新技术开发有限公司,成都 610031)

摘要 为研究斜拉桥中索与梁、索与索之间的耦合振动问题,建立了斜拉桥的单梁-多索力学模型.考虑索的初始垂度引起的几何非线性因素的影响,将多索梁模型分段处理,基于索、梁经典的面内振动的微分方程,通过索、梁连接处的动态平衡条件,建立多索梁模型面内振动理论.以双索梁为例,应用分离变量法,结合边界条件,求解双索斜拉梁模型平面内自由振动的特征值问题.同时,建立双索梁的有限元模型,有限元所得结果与本文理论研究吻合良好.最后对 CFRP 索梁模型的各项相关重要参数进行分析,并将本文理论与课题组前期成果进行对比分析.研究表明,CFRP 索能极大改善双索梁模型的基本动力学性能.增大拉索轴向刚度能明显提高模型的低阶频率,而梁弯曲刚度的提高对其高阶频率的提高比较明显.

关键词 多索梁, 模态分析, CFRP 索, 频率, 有限元

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-60

引言

由柔性索和弹性梁组成的索-梁组合结构具有施工方便、造价低廉、跨越能力大和受力性能好等特点,因此在实际工程中得到了广泛的应用.斜拉桥中的斜拉索和桥面梁、起吊塔和起重机中的拉索和横臂、网架结构中的索和梁等都可以抽象为索-梁组合结构^[1].索梁耦合结构一直都是工程界和力学学者研究的热点.亢战等^[2]应用单个质量块分别模拟连续系统的拉索和梁,并将拉索振动问题简化为 1 个自由度的非线性振动系统,并对其进行了参数研究.汪至刚等^[3]提出了索-梁组合结构的弦-质量块模型.Fung^[4]通过 Hamilton 原理和有限元法推导出的非线性时变微分方程研究了斜拉梁中索的长度和张力随时间变化的振动问题.Gattulli 等^[5-7]通过经典变分公式得到了斜拉梁的面内外横向振动的运动控制方程,从模态耦合角度分析了索-梁组合结构的整体、局部和耦合模态的存在及相互间的影响并将其与有限元方法和实验进行对比.赵跃宇等^[8]利用索-梁组合结构的连接条件和边界条

件,建立了索-梁组合结构的约化振动控制方程,并且利用 Galerkin 模态截断得到了该系统的多模态离散动力学方程;诸俊等^[9]研究了双索单梁组合结构的非线性动力响应,建立了索-梁组合结构的约化运动方程,利用回传射线矩阵法求解了结构的面内特征模态,并以此为基础采用一阶模态截断的方式构造了结构的单自由度非线性方程.曹登庆等^[10]研究了由四根索与梁组成的复杂斜拉桥模型的振动问题,推导了面内外的线性及非线性微分振动方程,并且给出了斜拉桥线性模型的无阻尼固有频率和振型,进行了参数分析.康厚军等^[11]利用张紧弦和欧拉梁振动理论,通过索梁连接处的动态平衡条件,建立了斜拉桥面内振动理论,应用传递矩阵法求解了其特征值问题,并进行了参数分析.彭剑等^[12]采用多尺度方法研究了时滞反馈控制下铰支柔性梁的主参数共振问题,并分析了时滞、反馈控制增益、非线性参数等对系统非线性主参数振动的影响.孙立新等^[13]建立了粘弹性地基上损伤弹性 Timoshenko 梁在有限变形情况下的运动微分方程,利用 Matlab 进行数值模拟并进行了参数分析.

2017-07-14 收到第 1 稿,2017-08-03 收到修改稿.

* 国家自然科学基金项目(11572117,11502076)

† 通讯作者 E-mail: khjun@hnu.edu.cn

彭剑等^[14]基于 Hamilton 原理建立了受控压电梁的参数振动方程,研究了轴向激励压电梁时滞反馈控制下的主参数共振,并对其稳定域进行分析.以上研究主要针对单根索与梁的组合结构进行分析,不能很好地反映实际桥梁中索梁之间的复杂耦合特性.

CFRP(Carbon Fiber Reinforced Polymer) 索斜拉桥是近几年出现的一种具有广阔发展前景的新型大跨度桥梁.它不仅能够克服传统钢质拉索的锈蚀、疲劳、极限长度小和承载效率低等问题,而且具有轻质(容重约为钢材的 1/5)、高强(弹性模量最高可达 1000GPa,抗拉强度可达 2700MPa^[15])和耐腐蚀的优点,被广泛应用于航空航天和机械工程领域.目前,国内外学者已开始从理论上证明 CFRP 索相对于钢索的静动力特性有不同程度的改善^[16-19].目前国内外已建成 CFRP 索斜拉桥 6 座,其应用前景将更加广阔.

综上所述,已有的研究多数以单索单梁组合体系为研究对象,此类理论只能反映单根索与梁之间的动力学关系,不能用于研究索与索之间的能量传递及其组合结构的基本动力学行为.针对以上问题,本文在文献[10]的基础上进一步研究索梁组合结构的特性,以索和梁的面内经典振动理论为基础,结合索和梁之间的动态平衡条件,建立斜拉桥

的多索梁模型,推导了系统的面内自由振动微分方程.以双索梁为例,对 CFRP 索斜拉梁的自由振动特性进行研究,重点分析索和梁刚度对模型的模态及内力的影响.为了验证本文理论和方法的正确性,建立了双索斜拉梁系统的有限元模型,对本文的求解结果进行验证.

1 斜拉桥的多索梁模型

1.1 基本构型与假设

本文研究斜拉桥面内运动的多索梁模型如图 1 所示.建立如图所示的坐标系,以坐标系 $x_j o y_j$ 描述拉索的运动,坐标系 $x o y$ 描述桥面梁的运动.以索梁结合处为节点将梁分段处理,其中 θ_j 为第 j 根斜拉索的倾角, u_{cj}, v_{cj} ($j=1, 2, \dots, n$) 为第 j 根索在平面内运动的动态位移, v_{bi} ($i=1, 2, \dots, n+1$) 为梁竖向振动时的动态位移, l_b 表示梁全长, l_{cj} 表示第 j 根索的跨长.因为实际桥面梁的横向(竖向)振动远大于纵向(水平)振动,所以,这里只考虑了桥面梁的横向振动.为了使梁在斜拉索初始应力的作用下保持水平,在索、梁耦合点处施加竖直向下的力 $f_0 = N_0 \sin \theta$,在工程实际中为了保持梁水平通常用梁的自重来平衡拉索初始应力的分量或设置预拱度^[11].

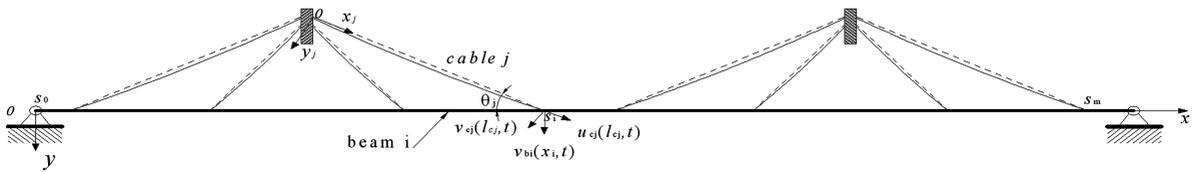


图1 多索梁模型

Fig.1 Configurations of multiple cable-stayed beam

本文引入文献[7]中的假设,如下:

(1) 视桥塔为刚性塔,不考虑其对系统振动的影响.

(2) 组合体系中,拉索为对称布置,索和梁都为均质线弹性材料.

(3) 在索的局部坐标系中,索的垂跨比很小 ($d_j^*/l_{c_j} < 1/10$),索的静力构型为二次抛物线,表示为 $y_{c_j} = 4d_j^* [x_{c_j}/l_{c_j} - (x_{c_j}/l_{c_j})^2]$, $j=1, 2, \dots, n$.

(4) 索的轴向动态应变由索中线的 Lagrangian 应变来描述.

(5) 忽略索的弯曲、扭转、剪切刚度及轴向惯性力的影响.

(6) 忽略梁的轴向、扭转、剪切变形以及几何非线性的影响.

1.2 运动方程及边界条件

在上述假设下,应用 Hamilton 原理,并进行约化处理之后,可以得到组合体系的平面内运动方程,如下:

$$m_{bi} \ddot{v}_{bi}^*(x_i) + \xi_{bi}^* \dot{v}_{bi}^*(x_i) + E_{bi} I_{bi} v_{bi}^{iv*}(x_i) = 0 \quad (1)$$

其中, $s_{i-1} < x_i < s_i$

$$m_{c_j} \ddot{v}_{c_j}^* + \xi_{c_j}^* \dot{v}_{c_j}^* - [H_{c_j} v_{c_j}^{''*} + E_{c_j} A_{c_j} (y_{c_j}^{''*} + v_{c_j}^{''*})] e_j^*(t) = 0 \quad (2)$$

$$e_j^*(t) = \frac{u_{c_j}^*(l_{c_j}, t)}{l_{c_j}} +$$

$$\frac{1}{l_{cj}} \int_0^{l_{cj}} \left(y_j'^* v_{cj}'^* + \frac{1}{2} v_{cj}^{2*} \right) dx_j^*$$

$$(j=1, 2, \dots, n; i=1, 2, \dots, n+1) \quad (3)$$

式中: \ddot{v}_{cj}^* 、 \ddot{v}_{bi}^* 为对时间的 2 阶导数; v_{bi}^{iv} 为对坐标的 4 阶导数; $y_j'^*$ 、 $y_j''^*$ 及 $v_{cj}'^*$ 、 $v_{cj}''^*$ 分别为对坐标的 1 阶导数和 2 阶导数; m_{cj} 、 ξ_{cj}^* 与 m_{bi} 、 ξ_{bi}^* 分别为第 j 根索和第 i 段梁的单位质量及阻尼系数; H_{cj} 表示第 j 根斜拉索的初始张力在局部坐标系中的水平分量; $E_{cj}A_{cj}$ 与 $E_{bi}I_{bi}$ 分别为第 j 根索的轴向刚度和第 i 段梁的抗弯刚度; $e_j^*(t)$ 为第 j 根拉索的平均动应变。

本文假设梁的两端为铰支, 拉索上端锚固在桥塔上, 下端锚固在梁上. 则组合体系应满足下面的几何边界和连续条件:

$$\begin{aligned} v_{b1}^*(0, t) &= v_{b(n+1)}^*(l_b, t) = 0, v_{b1}^{v*}(0, t) = 0 \\ v_{bj}^{v*}(s_j^*, t) &= v_{b(j+1)}^{v*}(s_j^*, t) \\ v_{bj}'^*(s_j^*, t) &= v_{b(j+1)}'v^*(s_j^*, t) \\ v_{b(n+1)}^{v*}(l_b, t) &= 0, v_{bj}^{v*}(s_j^*, t) = v_{b(j+1)}^{v*}(s_j^*, t) \\ u_{cj}^*(l_{cj}, t) \sin\theta_j + v_{cj}^*(l_{cj}, t) \cos\theta_j &= v_{bj}^*(s_j^*, t) \\ u_{cj}^*(l_{cj}, t) \cos\theta_j - v_{cj}^*(l_{cj}, t) \sin\theta_j &= 0 \\ u_{cj}^*(l_{cj}, t) &= v_{bj}^*(s_j^*, t) \sin\theta_j, v_{cj}^*(0, t) = 0 \\ v_{cj}^*(l_{cj}, t) &= v_{bj}^*(s_j^*, t) \cos\theta_j (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4)$$

此外, 从 Hamilton 变分过程中还可得到力学边界条件如下^[10]:

$$\begin{aligned} E_{bj}I_{bj}v_{bj}^{v*}(s_j^*, t) - E_{b(j+1)}I_{b(j+1)}v_{b(j+1)}^{v*}(s_j^*, t) \\ = E_{cj}A_{cj}e_{cj}^*(t) \sin\theta_j + [H_{cj}v_{cj}'^*(l_{cj}, t) + \\ E_{cj}A_{cj}e_{cj}^*(t)(v_{cj}'^*(l_{cj}, t) + y_{cj}'^*(l_{cj}))] \cos\theta_j \\ j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

为得到更一般的结论, 引入以下无量纲变量:

$$x^j = \frac{x_j^*}{l_{cj}}, \tau = \omega_0 t, y^j = \frac{y_j^*}{l_{cj}}, u^j = \frac{u_j^*}{l_{cj}}, v^j = \frac{v_j^*}{l_{cj}}$$

$$v_{bi} = \frac{v_{bi}^*}{l_b}, \gamma_j = \frac{l_b}{l_{cj}}, s = \frac{s^*}{l_b}, \omega_0 = 1.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\xi_{cj} = \frac{\xi_{cj}^*}{m_{cj}\omega_0}, d_j = \frac{d_j^*}{l_{cj}}, \mu = \frac{E_c A_c}{H_c}$$

$$\beta_b^4 = \frac{m_b l_b^4 \omega_0^2}{E_b I_b}, \beta_c^2 = \frac{m_c l_c^2 \omega_0^2}{H_c}$$

$$\chi = \frac{E_b I_b}{l_b^2 E_c A_c}, \xi_{bi} = \frac{\xi_{bi}^*}{m_{bi}\omega_0}, \mu^j = \frac{E_{cj} A_{cj}}{H_{cj}}$$

$$(j=1, 2, \dots, n; i=1, 2, \dots, n+1) \quad (6)$$

可将式(1)~(5)化成无量纲的形式, 如下:

$$\beta_b^4 (\ddot{v}_{bi} + \xi_{bi} \dot{v}_{bi}) + v_{bi}^{iv} = 0$$

$$\beta_c^2 (\ddot{v}_{cj} + \xi_{cj} \dot{v}_{cj}) - v_{cj}^{v*} - \mu e (y'' + v''_{cj}) = 0$$

$$(j=1, 2, \dots, n; i=1, 2, \dots, n+1) \quad (7)$$

利用式(4)中的边界条件, 拉索的平均动应变可以表示为:

$$e_j = v_{cj}(1, t) \tan\theta_j + \int_0^1 \left(y_j' v_{cj}' + \frac{1}{2} v_{cj}^{2*} \right) dx_j \quad (8)$$

无量纲的边界条件, 如下:

$$\begin{aligned} v_{b1}(0, t) &= v_{bm}(1, t) = 0, v_{b1}^{v*}(0, t) = 0 \\ v_{bm}^{v*}(1, t) &= 0, v_{bj}'(s_j, t) = v_{b(j+1)}'(s_j, t) \\ v_{bj}(s_j, t) &= v_{b(j+1)}(s_j, t), v_{cj}(0, t) = 0 \\ v_{bj}^{v*}(s_j, t) &= v_{b(j+1)}^{v*}(s_j, t) \\ u_{cj}(1, t) \sin\theta_j + v_{c1}(1, t) \cos\theta_j &= v_{bj}(s_j, t) \\ v_{cj}(1, t) &= v_{bj}(s_j, t) \cos\theta_j \\ E_{bj}I_{bj}v_{bj}^{v*}(s_j, t) - E_{b(j+1)}I_{b(j+1)}v_{b(j+1)}^{v*}(s_j, t) \\ &= E_{cj}A_{cj}e_{cj}(t) \sin\theta_j + (H_{cj}v_{cj}'(1, t) + \\ &E_{cj}A_{cj}e_{cj}(t)(v_{cj}'(1, t) + y_{cj}'(1))) \cos\theta_j \end{aligned} \quad (9)$$

2 平面内特征值问题求解

展开索的运动微分方程, 忽略方程中的高阶项以及索的平均动应变 $e_{cj}(t)$ 中积分号内的平方非线性项^[9], 得到索、梁无阻尼自由振动方程为:

$$\begin{aligned} \beta_c^2 \ddot{v}_{cj} - v_{cj}^{v*} - \mu \hat{e}_j y'' = 0 \\ \beta_b^4 \ddot{v}_{bi} + v_{bi}^{iv} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n; i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (10)$$

式中:

$$\hat{e}_j = v_{cj}(1, t) \tan\theta_j + \int_0^1 y_j' v_{cj}' dx_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

同样, 力学边界条件的线性形式写成下面的形式:

$$\begin{aligned} E_{bj}I_{bj}v_{bj}^{v*}(s_j, t) - \frac{E_{b(j+1)}I_{b(j+1)}}{l_b^2} v_{b(j+1)}^{v*}(s_j, t) \\ = E_{cj}A_{cj}\hat{e}_{cj}(t) \sin\theta_j + \\ [H_{cj}v_{cj}'(1, t) + E_{cj}A_{cj}\hat{e}_{cj}(t)y_{cj}'(1)] \cos\theta_j \end{aligned} \quad (12)$$

以双索梁为例, 基于上述理论且考虑两根索为对称时的情况, 两索分别锚固在三分之一点处, 倾角 30° . 作下面的变量替换:

$$\begin{aligned} H_{cj} &= H_c, d_j = d, \theta_j = \theta \\ m_{cj} &= m_c, E_{cj}A_{cj} = E_c A_c, l_{cj} = l_c \\ \gamma_{cj} &= \gamma_c, m_{bi} = m_b, E_{bi}I_{bi} = E_b I_b \\ j &= 1, 2; i=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (13)$$

其中, d_j 为第 j 根拉索的无量纲垂度, 采用分离变量法, 令:

$$v_{c_j} = \varphi_{c_j}(x) e^{i(\omega/\omega_0)\tau}, v_{b_i} = \varphi_{b_i}(x) e^{i(\omega/\omega_0)\tau} \quad (j=1, 2; i=1, 2, 3) \quad (14)$$

以及 $x_c = s = x$.

将式(14)代入索、梁的线性振动方程, 得到:

$$\beta_c^2 \varphi_{c_j} + \varphi_{c_j}'' = 8\mu d \hat{e}_j \quad (j=1, 2) \quad (15)$$

$$-\beta_c^4 \varphi_{b_i} + \varphi_{b_i}'''' = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (16)$$

其中:

$$\hat{e}_j = \varphi_{c_j}(1) \tan\theta_j + \int_0^1 y'_j \varphi'_{c_j} dx_j \quad (j=1, 2) \quad (17)$$

同时得到相应的边界条件:

$$\varphi_{c1}(0) = \varphi_{c2}(0) = 0, \varphi_{c1}(1) = \gamma_1 \varphi_{b1}(s_1) \cos\theta$$

$$\varphi_{c2}(1) = \gamma_2 \varphi_{b2}(s_2) \cos\theta$$

$$\varphi_{b1}(0) = \varphi_{b3}(1) = \varphi_{b1}''(0) = \varphi_{b3}''(1) = 0$$

$$\varphi_{b1}(s_1) = \varphi_{b2}(s_1), \varphi'_{b1}(s_1) = \varphi'_{b2}(s_1),$$

$$\varphi''_{b1}(s_1) = \varphi''_{b2}(s_1)$$

$$\varphi_{b2}(s_2) = \varphi_{b3}(s_2), \varphi'_{b2}(s_2) = \varphi'_{b3}(s_2),$$

$$\varphi''_{b2}(s_2) = \varphi''_{b3}(s_2) \chi [\varphi'''_{b1}(s_1) - \varphi'''_{b2}(s_1)] - (\sin\theta + \gamma'_1(1) \cos\theta_1) \hat{e}_1 -$$

$$\frac{\cos\theta}{\mu} \varphi'_{c1}(1) = 0$$

$$\chi [\varphi'''_{b2}(s_2) - \varphi'''_{b3}(s_2)] -$$

$$(\sin\theta_2 + \gamma'_2(1) \cos\theta_2) \hat{e}_2 - \frac{\cos\theta}{\mu} \varphi'_{c2}(1) = 0 \quad (18)$$

方程(15, 16)的解的形式可以表示为下面的形式:

$$\varphi_{c_j}(x) = a_{j_c} \sin\beta_c x + b_{j_c} \cos\beta_c x + D_{j_c} \quad (j=1, 2) \quad (19)$$

式中:

$$D_{j_c} = \frac{8\mu d \hat{e}_j}{\beta_c^2} \quad (20)$$

$$\varphi_{b_i}(x) = c_{ib} \cos\beta_b x + d_{ib} \sin\beta_b x + e_{ib} \cosh\beta_b x + f_{ib} \sinh\beta_b x \quad (i=1, 2, 3) \quad (21)$$

将式(19)代入式(17)得到:

$$\begin{aligned} \hat{e}_j &= \tan\theta (a_{j_c} \sin\beta_c + b_{j_c} \cos\beta_c + D_{j_c}) + \\ &\int_0^1 4d(1 - 2x_c) \beta_c (a_{j_c} \cos\beta_c x - b_{j_c} \sin\beta_c x) dx_c \\ &= (\sin\beta_c \tan\theta - 4d(\sin\beta_c + \frac{2(\cos\beta_c - 1)}{\beta_c})) a_{j_c} + \\ &\tan\theta D_{j_c} + (\cos\beta_c \tan\theta - 4d(1 + \cos\beta_c - \frac{2\sin\beta_c}{\beta_c})) b_{j_c} \end{aligned} \quad (22)$$

式(20)又可以写成下面的形式:

$$D_{j_c} = \frac{8\mu d \hat{e}_j}{\beta_c^2} = \frac{8\mu d}{\beta_c^2 - 8\mu d \tan\theta} (\hat{e}_j - \tan\theta D_{j_c}) \quad (23)$$

将式(23)代入式(22)可得:

$$D_{j_c} = \eta_{j1c} a_{j_c} + \eta_{j2c} b_{j_c} \quad (24)$$

式中:

$$\begin{aligned} \eta_{j1c} &= \frac{8\mu d}{\beta_c^2 - 8\mu d \tan\theta} (\sin\beta_c \tan\theta - \\ &4d(\sin\beta_c + \frac{2(\cos\beta_c - 1)}{\beta_c})) \\ \eta_{j2c} &= \frac{8\mu d}{\beta_c^2 - 8\mu d \tan\theta} (\cos\beta_c \tan\theta - \\ &4d(1 + \cos\beta_c - \frac{2\sin\beta_c}{\beta_c})) \end{aligned} \quad (j=1, 2) \quad (25)$$

将边界条件和连续条件式(18)代入(19)及式(21), 可以得到关于系数 $a_{j_c}, b_{j_c}, c_{ib}, d_{ib}, e_{ib}, f_{ib}, (j=1, 2, i=1, 2, 3)$ 16个方程组成的线性方程组, 易知方程组有解的条件就是其系数矩阵行列式必须为0, 则可以得到组合结构的特征方程如下式(26)所示.

$$[T] \{X\} = 0 \quad (26)$$

其中, T 中的各元素 $t_{m,n} (m, n=1, 2, \dots, 16)$ 为上式各方程中 $a_{j_c}, b_{j_c}, c_{ib}, d_{ib}, e_{ib}, f_{ib}, (j=1, 2, i=1, 2, 3)$ 的各系数, 其表达式见附录A. 特征方程(26)是关于组合结构面内自振频率 ω 的函数, 将满足方程的各阶频率值代入式(19)及式(21)即可得到组合结构的各阶振型.

梁的振型可以表示为分段函数的形式, 如下:

$$\varphi_{bx}(x) = \begin{cases} c_{ib} \cos\beta_b x_i + d_{ib} \sin\beta_b x_i + \\ e_{ib} \cosh\beta_b x_i + f_{ib} \sinh\beta_b x_i \\ s_{i-1} < x_i < s_i, s_1 = 0, s_3 = 1 \\ (i=1, 2, 3) \end{cases} \quad (27)$$

3 算例分析

考虑工程实际问题, 选取如下的物理参数: 索为CFRP索, 单位长度质量为 10.4 kg/m , 横截面积为 $6.273 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, 弹性模量为 210 GPa , 初始索力为 1 MN , 倾斜角度为 30° ; 梁为钢筋混凝土箱梁, 长为 300 m , 单位长度质量为 $4.4 \times 10^4 \text{ kg/m}$, 横截面积为 16.3 m^2 , 截面惯性矩为 9.8 m^4 , 弹性模量为 34.5

GPa.同时为验算本文理论的正确性,用有限元软件 ANSYS 12.0 建立了相同参数下的双索斜拉梁有限元模型,索、梁都采用 Beam3 单元,全梁划分单元数为 150,索为 100.表 1 列出了应用本文理论和有

限元方法计算得到的前 10 阶频率,从表中数据看到,两种结果吻合良好,最大误差仅为 0.4987%.图 2 给出了两种方法计算所得的前 5 阶振型,可以看出一致性良好.

表 1 双索斜拉梁模型的前 10 阶频率

Table 1 The first ten frequencies of double cable-stayed beam

Frequencies	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
Theory value	0.1355	0.2307	0.4354	0.7848	1.2162	1.3503	1.3503	1.7417	2.3740	2.6854
ANSYS results	0.1360	0.2307	0.4349	0.7840	1.2147	1.3436	1.3437	1.7391	2.3696	2.6890
Relative error/%	0.3163	0.0000	0.1288	0.1059	0.1235	0.4987	0.4912	0.1495	0.1857	0.1339

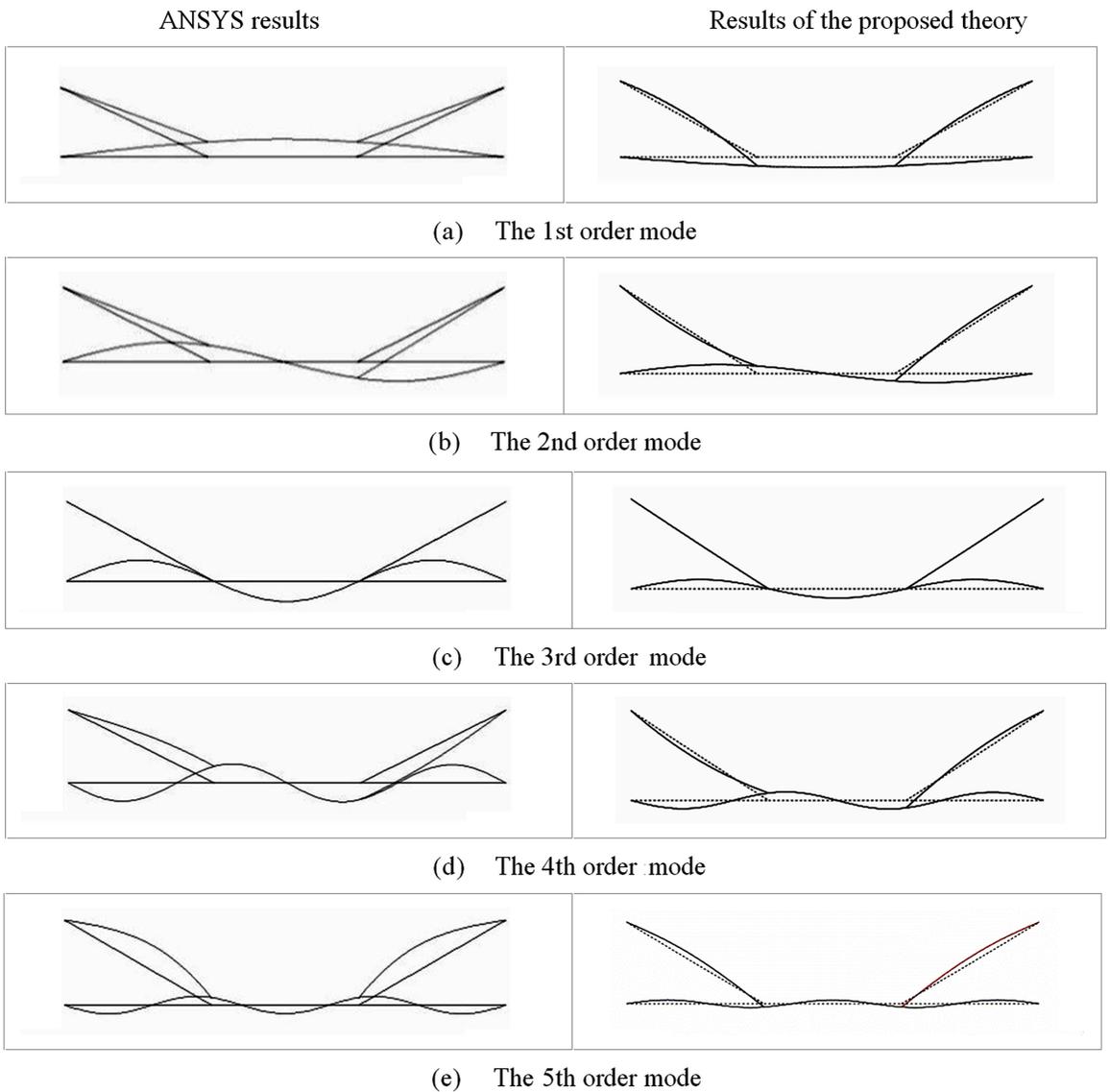


图 2 双索斜拉梁模型的前 5 阶振型

Fig.2 The first 5 mode shapes of double cable-stayed beam

图 3 给出了梁的抗弯刚度对结构的前 5 阶频率的影响曲线,分析中保持梁的弹性模量不变,通

过增大截面惯性矩提高截面的抗弯刚度.从图中看到结构的各阶频率随着梁抗弯刚度的提高而增加,

且高阶频率变化更加明显.当 I_b 很小时,梁的抗弯刚度相对拉索的轴向刚度较小,索可以看作两个简支约束,梁近似看作连续简支梁,故系统的各阶频率随着梁弯曲刚度的增加而增加;当 I_b 较大时,梁的弯曲刚度较大,此时拉索的轴向刚度相对较小,其对梁的约束作用较小,故曲线增长的速度逐渐变缓,这一影响对结构的低阶频率更加明显.同时看到,在 I_b 较小时,频率曲线出现了 Veering 现象,这在实际工程中容易诱发内共振问题,应予以重视.

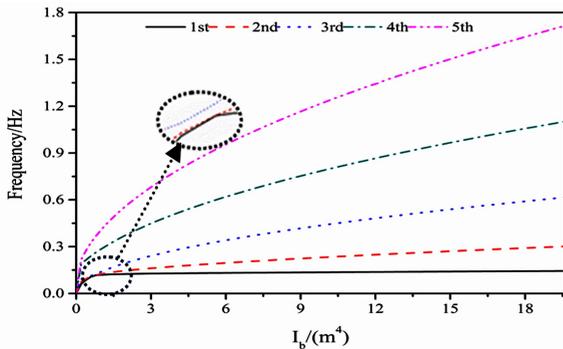


图3 梁的抗弯刚度对系统的前5阶频率的影响

Fig.3 Effect of flexural rigidity of beam on the first 5 frequencies of system

图4给出了系统的前5阶频率值随拉索的轴向刚度的变化曲线.由于CFRP索具有轻质、高强的特性,且其弹性模量具有很大的调整区间,分析中保持拉索的横截面积不变,通过调整其弹性模量来改变拉索的轴向刚度.从图中看到,随着拉索轴向刚度的增加,系统的各阶频率逐渐增大,与图3所不同的是低频变化显著.拉索的轴向刚度增加,其对梁的约束相应增加,系统的整体刚度增大,故各阶频率增大.同时看到,系统的第3阶频率值基本保持不变,由图2看到,第3阶模态为整体模态,所以改变拉索的参数对系统的振动特性几乎没影响.

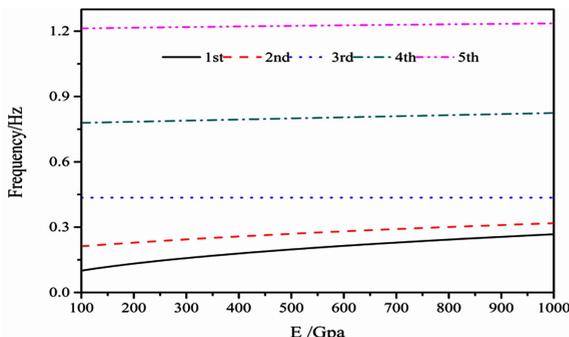


图4 拉索的轴向刚度对系统的前5阶频率的影响

Fig.4 Effect of the axial rigidity of cable on the first 5 frequencies of system

为进一步研究梁和拉索的刚度对系统特性的影响,下面选取系统的第5阶模态(混合模态)为研究对象,着重分析其模态及内力问题.

表2列出了梁的刚度改变时系统的第5阶模态、梁的弯矩图及剪力图.从图中弯矩图看到,随着梁弯曲刚度的增大,梁所承担的弯矩相应增大,根据结构力学中的力矩分配法,构件刚度越大所承受内力越大.梁的抗弯刚度取 $3E_b I_b$ 和 $5E_b I_b$ 时,系统表现出局部模态,此时梁的振动非常小,这是由于两种情况下的系统频率值接近拉索的自振频率值,该两阶模态仅有拉索的振动.当梁的抗弯刚度为 $3E_b I_b$ 时,系统的局部模态为拉索的一阶模态,并且为反对称,其对应的弯矩图为反对称,在索梁耦合点的剪力跳跃值为 $6.21402E_b I_b$,相对其他情况较大,此时梁对拉索的作用较大,能量向拉索传递,引起拉索的大幅振动,威胁桥梁安全,实际工程中应予以重视.随着梁弯曲刚度的进一步增加,一方面,拉索对其约束作用减小,故剪力跳跃值减小;另一方面,根据图3所示,结构各阶的频率值随梁刚度的增大而增大,各阶模态振动时能量变大,传递到拉索的能量增加,激起拉索的高阶模态,如表2所示.实际工程中应合理选取梁的抗弯刚度,既要避免柔性梁的大幅振动,又要防止梁弯曲刚度过大,使能量过多向拉索传递,导致其以高阶模态振动,产生疲劳破坏.

表3给出了拉索的轴向刚度改变时,系统的第5阶模态变化以及相应的梁的弯矩图和剪力图.从表中各情况下的模态看到,提高拉索刚度能明显减弱梁的振动.这是因为随着拉索轴向刚度的增加,其对梁的约束作用增大,能量向拉索传递,拉索振动幅值增加,梁的振动幅值减小,实际工程中使用性能较好且高弹性模量的CFRP索能有效降低桥面的振动幅值.观察梁的内力图发现,拉索轴向刚度的增加能有效减小梁的受力,梁弯矩值和剪力值随着拉索轴向刚度的提高而降低,与表2不同之处在于:梁的内力图走势不随拉索刚度的变化而改变.各情况下的梁的剪力在索梁耦合点的跳跃值随着拉索轴向刚度的增加而减小,这主要是由于索的刚度增大时,梁的弯曲刚度相对减小,索对梁的约束越大,拉索可以视为简支约束,耦合点处拉索承受的剪力减小.

表2 梁抗弯刚度对系统第5阶模态及内力的影响

Table 2 Effect of the flexural rigidity of the beam on the 5th modeshape and the internal force of the structure

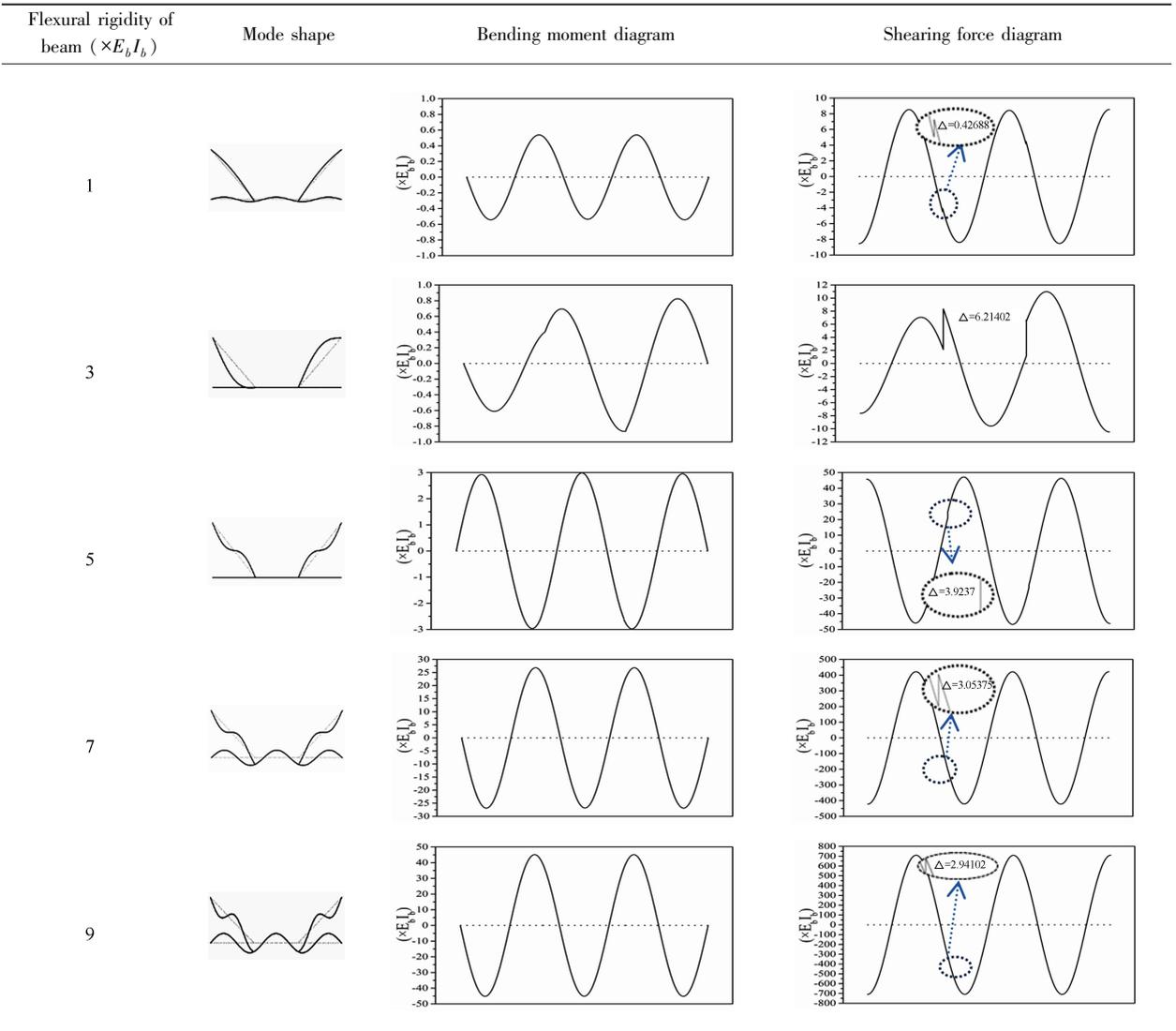


表3 拉索轴向刚度对系统第5阶模态及内力的影响

Table 3 Effect of the axial rigidity of the cable on the 5th mode shape and the internal force of the structure

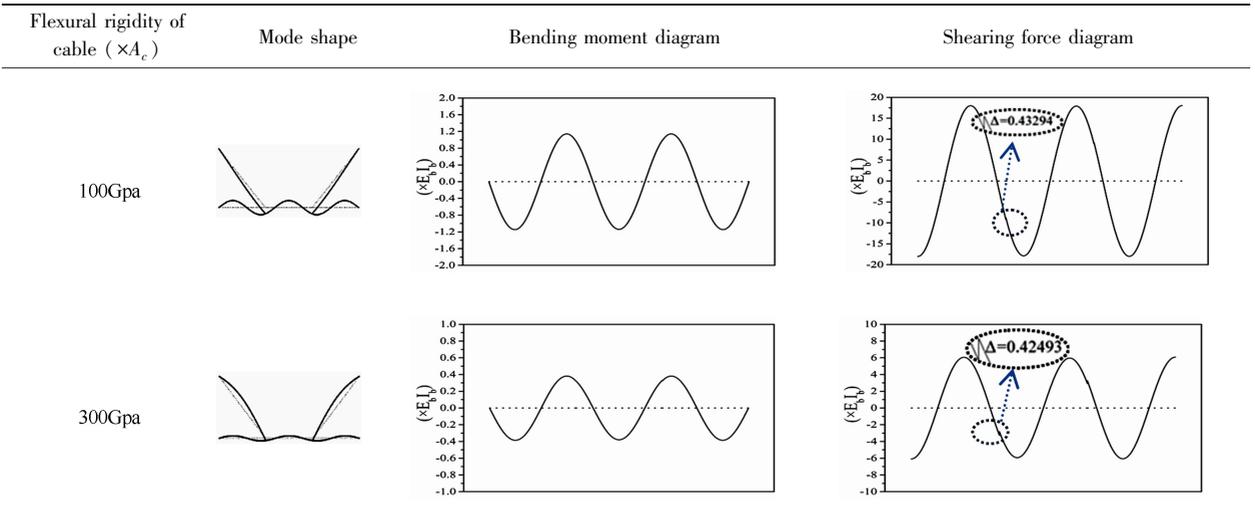


表 3 拉索轴向刚度对系统第 5 阶模态及内力的影响(续表)

Table 3 Effect of the axial rigidity of the cable on the 5th mode shape and the internal force of the structure (continued)

Flexural rigidity of cable ($\times A_c$)	Mode shape	Bending moment diagram	Shearing force diagram
500Gpa			
700Gpa			
900Gpa			

下面将本文理论与课题组的前期研究成果进行对比分析.文献[20]研究多索浅拱模型的非线性动力学问题,选取拉索与浅拱的模态为正弦函数,通过 Galerkin 方法离散为三自由度系统,得到如下的频率表达式:

$$\omega_a^2 = \Gamma_{33}(r_{33} - \eta d_{33}f_{33})/\beta^4 - \frac{1}{2}\Gamma_{33} \sum_{j=1}^2 d_{j0}K_j\varphi^2(s_j) \sin 2\theta_j + \Gamma_{33} \sum_{j=1}^2 \gamma_j K_j \varphi^2(s_j) \sin^2 \theta_j \quad (28)$$

$$\omega_c^2 = -\Gamma_{11}(\lambda_1 d_{11}f_{11} + h_{11})/\beta_c^2 \quad (29)$$

式中, ω_a^2 为浅拱频率的平方, ω_c^2 为索的频率的平方. K_j 为与索对浅拱的弹性支撑作用相关的参数.忽略桥面梁几何非线性的影响,将上述公式退化为与本文模型一致的索梁组合模型的问题.

表 4 给出了由两种方法计算得到的拉索与梁的频率.本文计算得到的梁和索的频率值分别对应系统的第一阶频率(整体模态,主要表现为梁的第一阶模态,拉索为拖拽运动,对梁起弹性支撑的作用)和第 6 阶频率(局部模态,表现为索的第一阶模态).由表中数据看到两种方法所得结果具有很好的一致性,最大误差仅为 1.107%.

表 4 两种计算方法的频率对比

Table 4 Comparison of frequencies obtained by two methods

	This paper	Paper[20]	Relative error (%)
cable	1.3503	1.3502	0.0074
beam	0.1355	0.1370	1.107

图 5 给出了正弦振型函数与本文理论计算得出的系统第一阶模态(整体模态)的对比图.从图中看到两曲线吻合良好,由此说明在非线性动力学分析中,采用正弦函数作为浅拱振型与采用相应线性问题求解的特征函数作为振型足够满足位移精度的要求.

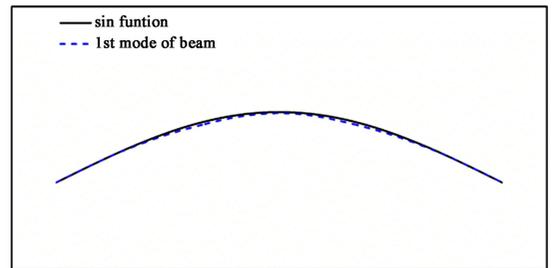


图 5 正弦函数与本文模型 1 阶模态对比

Fig.5 Comparison of sine function and the 1st mode of modal in this paper

另外,从表 2 和表 3 可以看出,分段函数能够进一步反应出梁的内力在索的锚固处的突变.如果在动力学研究中,需要研究该位置处的内力响应,

则选择分段函数更为合适.但是,突变值的大小通常较小.另外,在工程实际中,对斜拉桥的索-梁/浅拱模型的非线性动力学行为的研究,重点关注其各构件间的能量传递导致的大幅振动,侧重点在位移响应,特别是索的振动问题.因此,取正弦函数作为斜拉桥的多索-梁/浅拱模型中梁/浅拱的模态函数足够满足位移精度的要求.若进一步分析其内力及高阶混合模态的内共振特性,则须采用本文理论所得分段函数作为梁/浅拱的模态函数,以满足索-梁/浅拱耦合点处的力学条件.

4 结论

本文建立了斜拉桥的单梁-多索力学模型,考虑索的初始垂度引起的几何非线性因素的影响,将多索梁模型分段处理,基于索、梁经典的面内振动微分方程,通过索、梁连接处的动态平衡条件,建立多索梁模型面内振动理论.同时,建立了相应的有限元模型,两者计算结果吻合良好.最后讨论了索和梁的刚度对模型的模态及力学特性的影响,并得到以下结论:

(1)系统的各阶频率值随梁弯曲刚度的增大而增大,并且高阶频率更加敏感.梁刚度取值较小时出现 Veering 现象,容易导致系统内共振,实际工程中应重点关注.

(2)系统的各阶频率值随拉索轴向刚度的增大而增大,低阶频率更加敏感.

(3)实际工程中应合理选取梁的抗弯刚度,既要避免柔性梁的大幅振动,又要防止梁弯曲刚度过大,使能量过多向拉索传递,导致其以高阶模态振动,发生疲劳破坏.

(4)调整梁和拉索的刚度对梁的模态形状几乎没有影响,对其内力影响较大.

(5)选取正弦函数作为斜拉桥的多索-梁/浅拱模型中梁/浅拱的模态函数足够满足非线性动力学行为响应分析精度,如需进一步分析其内力以及高阶混合模态的内共振问题,须选用本文推导的分段函数.

参 考 文 献

1 赵跃宇,蒋丽忠,王连华等.索-梁组合结构的动力学建模理论及其内共振分析.土木工程学报,2004,37(3):69~72 (Zhao Y Y, Jiang L Z, Wang L H, et al. The dynamical modeling theory and internal resonance of cable-beam composite structure. *China Civil Engineering Journal*, 2004,37(3):69~72 (in Chinese))

2 亢战,钟万勰.斜拉桥参数共振问题的数值研究.土木工程学报,1998(4):14~22 (Kang Z, Zhong W X. Numerical study on parametric resonance of cable in cable stayed bridge. *China Civil Engineering Journal*, 1998(4):14~22 (in Chinese))

3 汪至刚,孙炳楠.斜拉桥参数振动引起的拉索大幅振动.工程力学,2001,18(1):103~109 (Wang Z G, Sun B N. Cable vibration for cable stayed bridge by parametric response. *Engineering Mechanics*, 2001,18(1):103~109 (in Chinese))

4 Fung R F, Lu L Y, Huang S C. Dynamic modeling and vibration analysis of a flexible cable-stayed beam structure. *Journal of Sound & Vibration*, 2002,254(4):717~726

5 Gattulli V, Lepidi M. Nonlinear interactions in the planar dynamics of cable-stayed beam. *International Journal of Solids & Structures*, 2003,40(18):4729~4748

6 Gattulli V, Lepidi M, Macdonald J H G, et al. One-to-two global-local interaction in a cable-stayed beam observed through analytical, finite element and experimental models. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005,40(4):571~588

7 Gattulli V, Morandini M, Paolone A. A parametric analytical model for non-linear dynamics in cable-stayed beam. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2002,31(6):1281~1300

8 赵跃宇,杨相展,刘伟长等.索-梁组合结构中拉索的非线性响应.工程力学,2006,23(11):153~158 (Zhao Y Y, Yang X Z, Liu W C, et al. Non-linear response of cables in cable-stayed beam structure. *Engineering Mechanics*, 2006,23(11):153~158 (in Chinese))

9 诸骏,叶贵如,项贻强等.双索单梁组合结构非线性动力特性.浙江大学学报(工学版),2010,44(12):2326~2331 (Zhu J, Ye G R, Xiang Y Q, et al. Non-linear dynamics of cable-stayed beams. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2010,44(12):2326~2331 (in Chinese))

10 Cao D Q, Song M T, Zhu W D, et al. Modeling and analysis of the in-plane vibration of a complex cable-stayed bridge. *Journal of Sound & Vibration*, 2012,331(26):5685~5714

11 康厚军,解维东,郭铁丁. CFRP 索斜拉梁面内自由振动建模及参数分析.湖南大学学报(自科版),2016,43(9):18~25 (Kang H J, Xie W D, Guo T D. Modeling and parameters analysis on in-plane free vibration of cable-stayed beam. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2016,43(9):18~25 (in Chinese))

12 彭剑,张改,李祿欣.铰支柔性梁主参数共振的时滞反馈控制.动力学与控制学报,2016,14(4):354~357

- (Peng J, Zhang G, Li L X. Time-delayed feedback control of a hinged-hinged flexible beam under parametric excitation. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(4): 354~357 (in Chinese))
- 13 孙立新, 盛冬发. 粘弹性地基上损伤弹性 Timoshenko 梁动力学行为. *动力学与控制学报*, 2016, 14(6): 548~554 (Sun L X, Sheng D F. Dynamical behaviors of elastic Timoshenko beams with damage on viscoelastic foundation. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(6): 548~554 (in Chinese))
- 14 彭剑, 李禄欣, 马建军. 时滞反馈作用下压电梁的参数共振分析. *动力学与控制学报*, 2016, 14(5): 412~416 (Peng J, Li L X, Ma J J. Parametric resonance of piezoelectric beams with time delayed feedback. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(5): 412~416 (in Chinese))
- 15 ACI. Prestressing concrete structures with FRP tendons. MI, USA: Farmington Hills, American Concrete Institute. ACI, 2004
- 16 梅葵花, 吕志涛. CFRP 斜拉索的静力特性分析. *中国公路学报*, 2004, 17(2): 43~45 (Mei K H, Lv Z T. Static characteristic analysis of CFRP cables. *China Journal of Highway and Transport*, 2004, 17(2): 43~45 (in Chinese))
- 17 梅葵花, 吕志涛, 孙胜江. CFRP 拉索的非线性参数振动特性. *中国公路学报*, 2007, 20(1): 52~57 (Mei K H, Lv Z T, Sun S J. Property of nonlinear parametric vibration of CFRP cables. *China Journal of Highway and Transport*, 2007, 20(1): 52~57 (in Chinese))
- 18 康厚军, 赵跃宇, 朱志辉等. 强迫激励下 CFRP 斜拉索面内分叉特性. *湖南大学学报(自科版)*, 2014(9): 8~13 (Kang H J, Zhao Y Y, Zhu Z H, et al. In-plane bifurcation behavior of inclined CFRP cables subject to external excitation. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2014(9): 8~13 (in Chinese))
- 19 Grace N F, Navarre F C, Nacey R B, et al. Design-construction of bridge street bridge—first cfrp bridge in the United States. *Pci Journal*, 2002, 47(5): 20~35
- 20 Kang H J, Guo T D, Zhao Y Y, et al. Dynamic modeling and in-plane 1:1:1 internal resonance analysis of cable-stayed bridge. *European Journal of Mechanics*, 2016

A MULTIPLE CABLE-BEAM MODEL AND MODAL ANALYSIS ON IN-PLANE FREE VIBRATION OF CABLE-STAYED BRIDGE WITH CFRP CABLES*

Cong Yunyue¹ Kang Houjun^{1†} Guo Tieding¹ Su Xiaoyang¹ Jin Yixin²

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

(2. Chengdu Alga Engineering New Technology Development Co Ltd, Chengdu 610031, China)

Abstract Based on the classical dynamic theory of the cable and Euler beam as well as the dynamic equilibrium conditions at the joint of cable and beam, the in-plane vibration theory of a multiple cable-stayed beam was established, in order to study the couple vibration between cables and bridge deck. The combined effects of nonlinear terms due to the cable's geometry were considered, and the beam was separated into some segments. Using a double-cable-stayed beam model as an example, the variable separation approach and boundary conditions were considered to solve the eigenvalue problem of the in-plane free vibration of a double-cable-stayed beam structure. Meanwhile, a finite element model of the double-cable-stayed beam was also developed to verify the proposed theory and method, and a well match of the results between the two methods was obtained. Finally, the analysis about the key parameters was conducted, and a comparison was made between the early outcomes of project group and this paper. It shows that the CFRP cables can improve fundamental dynamic properties of the system than the traditional steel cables. Increasing the axial rigidity of cable and the flexural rigidity of the beam can, respectively, obviously enhance the lower and higher frequencies of the model.

Key words multiple cable-stayed beam, modal analysis, CFRP cable, frequency, finite element

Received 14 July 2017, revised 3 August 2017.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11572117, 11502076).

† Corresponding author E-mail: khjun@hnu.edu.cn

附录 A

$$\begin{aligned}
t_{1,1} &= \eta_{11c}; t_{1,2} = 1 + \eta_{12c}; t_{2,3} = \eta_{21c}; t_{2,4} = 1 + \eta_{22c}; \\
t_{3,1} &= \eta_{11c} + \sin\beta_c; t_{3,2} = \eta_{12c} + \cos\beta_c; \\
t_{3,5} &= -\gamma_1 \cos(s_1\beta_b) \cos\theta; t_{3,6} = -\gamma_1 \sin(s_1\beta_b) \cos\theta; \\
t_{3,7} &= -\gamma_1 \cosh(s_1\beta_b) \cos\theta; \\
t_{3,8} &= -\gamma_1 \sinh(s_1\beta_b) \cos\theta; t_{4,3} = \eta_{21c} + \sin\beta_c; \\
t_{4,4} &= \eta_{22c} + \cos\beta_c; t_{4,9} = -\gamma_2 \cos(s_2\beta_b) \cos\theta; \\
t_{4,10} &= -\gamma_2 \sin(s_2\beta_b) \cos\theta; \\
t_{4,11} &= -\gamma_2 \cosh(s_2\beta_b) \cos\theta; \\
t_{4,12} &= -\gamma_2 \sinh(s_2\beta_b) \cos\theta; t_{5,5} = t_{5,7} = 1; \\
t_{6,13} &= \cos\beta_b; t_{6,14} = \sin\beta_b; t_{6,15} = \cosh\beta_b; \\
t_{6,16} &= \sinh\beta_b; t_{7,5} = -1; \\
t_{7,7} &= 1; t_{8,13} = -\cos\beta_b; \\
t_{8,14} &= -\sin\beta_b; t_{8,15} = \cosh\beta_b; \\
t_{8,16} &= \sinh\beta_b; t_{9,5} = t_{10,6} = \cos(s_1\beta_b); \\
t_{9,6} &= t_{10,9} = \sin(s_1\beta_b); t_{9,7} = t_{10,8} = \cosh(s_1\beta_b); \\
t_{9,8} &= t_{10,7} = \sinh(s_1\beta_b); t_{9,9} = t_{10,10} = -\cos(s_1\beta_b); \\
t_{9,10} &= t_{10,5} = -\sin(s_1\beta_b); \\
t_{9,11} &= t_{10,12} = -\cosh(s_1\beta_b); \\
t_{9,12} &= t_{10,11} = -\sinh(s_1\beta_b); \\
t_{11,5} &= -\cos(s_1\beta_b); t_{11,6} = -\sin(s_1\beta_b); \\
t_{11,7} &= \cosh(s_1\beta_b); t_{11,8} = \sinh(s_1\beta_b); \\
t_{11,9} &= \cos(s_1\beta_b); t_{11,10} = \sin(s_1\beta_b); \\
t_{11,11} &= -\cosh(s_1\beta_b); t_{11,12} = -\sinh(s_1\beta_b); \\
t_{12,9} &= t_{13,10} = \cos(s_2\beta_b); t_{12,10} = t_{13,13} = \sin(s_2\beta_b); \\
t_{12,11} &= t_{13,12} = \cosh(s_2\beta_b); \\
t_{12,12} &= t_{13,11} = \sinh(s_2\beta_b); \\
t_{12,13} &= t_{13,14} = -\cos(s_2\beta_b); \\
t_{12,14} &= t_{13,9} = -\sin(s_2\beta_b); \\
t_{12,15} &= -\cosh(s_2\beta_b); t_{12,16} = -\sinh(s_2\beta_b); \\
t_{13,15} &= -\sinh(s_2\beta_b); t_{13,16} = -\cosh(s_2\beta_b); \\
t_{14,9} &= -\cos(s_2\beta_b); t_{14,10} = -\sin(s_2\beta_b); \\
t_{14,11} &= \cosh(s_2\beta_b); t_{14,12} = \sinh(s_2\beta_b); \\
t_{14,13} &= \cos(s_2\beta_b); t_{14,14} = \sin(s_2\beta_b); \\
t_{14,15} &= -\cosh(s_2\beta_b); t_{14,16} = -\sinh(s_2\beta_b); \\
t_{15,1} &= -\frac{\beta_c \cos\beta_c \cos\theta}{\mu} + \frac{8d(4d\cos\theta - \sin\theta)}{\beta_c} - \\
&\frac{8d\cos\beta_c(4d\cos\theta - \sin\theta)}{\beta_c} + \\
&4d\sin\beta_c(4d\cos\theta - \sin\theta) + \\
&\eta_{11c}(4d\cos\theta - \sin\theta)\tan\theta + \\
&\sin\beta_c(4d\cos\theta - \sin\theta)\tan\theta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{15,2} &= \frac{\beta_c \sin\beta_c \cos\theta}{\mu} - 4d(4d\cos\theta - \sin\theta) - \\
&4d\cos\beta_c(4d\cos\theta - \sin\theta) + \\
&\frac{8d\sin\beta_c(4d\cos\theta - \sin\theta)}{\beta_c} + \\
&\eta_{12c}(4d\cos\theta - \sin\theta)\tan\theta + \\
&\cos\beta_c(4d\cos\theta - \sin\theta)\tan\theta; \\
t_{15,5} &= \beta_b^3 \chi \sin(s_1\beta_b); t_{15,6} = -\beta_b^3 \chi \cos(s_1\beta_b); \\
t_{15,7} &= \beta_b^3 \chi \sinh(s_1\beta_b); t_{15,8} = \beta_b^3 \chi \cosh(s_1\beta_b); \\
t_{15,9} &= -\beta_b^3 \chi \sin(s_1\beta_b); t_{15,10} = \beta_b^3 \chi \cos(s_1\beta_b); \\
t_{15,11} &= -\beta_b^3 \chi \sinh(s_1\beta_b); t_{15,12} = -\beta_b^3 \chi \cosh(s_1\beta_b); \\
t_{16,3} &= -\frac{\beta_c \cos\beta_c \cos\theta}{\mu} + \frac{8d(4d\cos\theta - \sin\theta)}{\beta_c} - \\
&\frac{8d\cos\beta_c(4d\cos\theta - \sin\theta)}{\beta_c} + \\
&4d\sin\beta_c(4d\cos\theta - \sin\theta) + \\
&\eta_{21c}(4d\cos\theta - \sin\theta)\tan\theta + \\
&\sin\beta_c(4d\cos\theta - \sin\theta)\tan\theta; \\
t_{16,4} &= \frac{\beta_c \sin\beta_c \cos\theta}{\mu} - 4d(4d\cos\theta - \sin\theta) - \\
&4d\cos\beta_c(4d\cos\theta - \sin\theta) + \\
&\frac{8d\sin\beta_c(4d\cos\theta - \sin\theta)}{\beta_c} + \\
&\eta_{22c}(4d\cos\theta - \sin\theta)\tan\theta + \\
&\cos\beta_c(4d\cos\theta - \sin\theta)\tan\theta; \\
t_{16,9} &= \beta_b^3 \chi \sin(s_2\beta_b); t_{16,10} = \beta_b^3 \chi \cos(s_2\beta_b); \\
t_{16,11} &= \beta_b^3 \chi \sinh(s_2\beta_b); t_{16,12} = \beta_b^3 \chi \cosh(s_2\beta_b); \\
t_{16,13} &= -\beta_b^3 \chi \sin(s_2\beta_b); t_{16,14} = -\beta_b^3 \chi \cos(s_2\beta_b); \\
t_{16,15} &= -\beta_b^3 \chi \sinh(s_2\beta_b); \\
t_{16,16} &= -\beta_b^3 \chi \cosh(s_2\beta_b); \Gamma_{33} = 1/\int_0^1 \varphi^2 ds; \\
r_{33} &= \int_0^1 \varphi^4 \varphi ds; d_{33} = \int_0^1 y'(s) \varphi'(s) ds; \\
f_{33} &= \int_0^1 y'' \varphi ds; d_{j0} = \int_0^1 y'_j dx; \gamma_j = \frac{L}{l_j}; \\
K_j &= \frac{E_{c1} A_{c1}}{m_a \omega_0^2 L^2}; \Gamma_{11} = 1/\int_0^1 \varphi_1^2 ds; \\
d_{11} &= \int_0^1 y'_1(s) \varphi'_1(x) dx; f_{11} = \int_0^1 y''_1 \varphi_1(x) dx; \\
h_{11} &= \int_0^1 \varphi_1 \varphi''_1 dx_1; \lambda_1 = \frac{E_{c1} A_{c1}}{H_{c1}}
\end{aligned}$$