

Couette-Taylor 流系统的低模分析及 全局稳定性与同步的研究*

阚猛 王贺元[†] 段文元

(辽宁工业大学理学院, 锦州 121001)

摘要 研究 Couette-Taylor 流三模 Lorenz 系统的部分动力学行为与仿真问题,并解释了对应的 Couette-Taylor 流的演化过程.给出了此三模系统的全局吸引集和正向不变集,得出两个三模系统全局指数同步结果,并用仿真加以验证.

关键词 Couette-Taylor 流, 全局吸引集, 正向不变集, 全局指数同步

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-001

引言

1963 年洛伦兹在著名论文“决定论非周期流”中讨论了天气预报的困难和大气湍流现象,给出了三个变量的自治方程,即著名的 Lorenz 系统.这是在耗散系统中,由一个确定的方程能导出混沌解的第一个实例,从而揭开了对混沌现象深入研究的序

幕.半个世纪以来,许多物理学家、数学家对混沌的理论和应用做出了重要的贡献,使人们对混沌现象的自然规律及其在自然科学与社会科学中表现有了一个广泛而深刻的认识^[1-5].

同轴圆筒间旋转流动的 Couette-Taylor 流问题是近一个世纪以来人们普遍关注的热点问题^[6-12], Couette-Taylor 流系统在柱坐标下其形式为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t} - \nu \left[\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{1}{r} u_\varphi^2 + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} - \nu \left[\nabla^2 u_\varphi - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} u_r u_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} - \nu \nabla^2 u_z + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

边界条件为:

$$\begin{cases} u_\varphi|_{r=r_1} = r_1 \omega_1, u_r|_{r=r_1} = u_z|_{r=r_1} = 0 \\ u_\varphi|_{r=r_2} = r_2 \omega_2, u_r|_{r=r_2} = u_z|_{r=r_2} = 0 \\ u(t, r, \varphi, z) = u(t, r, \varphi, z + \frac{2\pi}{\alpha_0}) \end{cases}$$

其中 u_r, u_φ, u_z 为速度分量.

由于它在研究流动的失稳、从分岔到混沌、直至发展为湍流过程中流动形态的可观测性、以及它

在湍流研究中的基础性地位及其在流体机械、石油化工等领域的广泛应用,国际上将它列为非线性科学的范例之一,根据两圆筒的半径比、内外圆筒旋转方式、旋转角速度等的不同,这种流动会产生多种复杂的流动形态,如 Couette 流动、Taylor 涡流、螺旋 Taylor 漩涡、波状 Taylor 涡流、波状螺旋漩涡、调制波状螺旋漩涡、湍状 Taylor 涡流等二十余种,存在着多种演化到湍流的方式,提供了从层流到湍

2016-05-22 收到第 1 稿,2016-11-02 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(11572146,11526105)、辽宁省教育厅科研基金(L2013248)和锦州市科技专项基金(13A1D32)资助

[†] 通讯作者 E-mail: lxywhy@lnut.edu.cn

流过渡非常好的例子.该问题所包含的这些复杂多变的流动形态引发了众多研究者开展相关的理论分析、数值计算和实验观测研究.

由于圆筒间 Couette-Taylor 流的全局吸引子是结构非常复杂和难于计算的,而且湍流的发生通常表现为少数模态的失稳,所以我们采用简化模态的低模分析方法进行数值仿真.低模分析方法理论基础和依据是惯性流形和近似惯性流形理论(它们被认为是一种包含全局吸引子,且指数吸引所有轨道的低维光滑流形),也就是无穷维动力系统复杂的动力学行为通常源于简单的起源,并可由简单方程来分辨.这种简化模态的低模分析方法不但可以克服 Couette-Taylor 流问题性质不好把握的困难,而且所得到的类 Lorenz 方程组将包含非常丰富而有意义的内容,这对探讨 Navier-Stokes 方程的分歧、湍流等非线性现象是十分有意义的.

混沌系统的定性研究中,最终有界性的研究起着一个非常重要的作用.如果一个混沌系统在相空间内具有全局吸引紧集,则平衡位置、周期解、概周期解,混沌吸引子将不可能在全局吸引集之外.俄罗斯学者 Leonov 通过长期的研究,分别用德文、俄文发表了很多关于 Lorenz 混沌系统方面的论著,他得到了 Lorenz 系统全集吸引集的一个圆柱形估计式和一个球形估计式,这是混沌系统中全局最终有界的第一个结果.由于它化全局为局部、化无穷为有限的功能,在很多方面都有重要的应用.最近廖晓昕在 Leonov 的基础上给出了关于 Lorenz 系统全局吸引集合正向不变集的改进了的新结果^[13,14],较大地简化了 Leonov 所得的两个著名估计式的复杂证明且比 Leonov 的结果更精确.

自从 1990 年 Pecora 和 Carroll 提出混沌同步的思想以来,混沌同步研究一直是非线性科学领域备受关注的热点问题之一.研究表明,混沌同步在物理化学、生物、力学、脑科学、电子学、信息科学、保密通讯等领域均具有十分诱人的应用前景和巨大的市场潜在价值,而混沌同步在混沌保密通讯中的应用尤其令人瞩目.

本文研究了选取简正模后得到的三模类 Lorenz 型方程动力学行为与仿真问题,解释了 Couette-Taylor 流实验中观察到的部分涡流的演化过程.在 Lorenz 系统全局吸引集和正向不变集的基础

上,给出了 Couette-Taylor 流的三模系统的全局吸引集和正向不变集,最后,对于该三模系统,设计了线性反馈控制律,实现全局指数同步,并利用计算机仿真验证了有效性.

1 Couette-Taylor 流低模分析与数值仿真

如果内圆筒旋转,外圆筒静止,在低雷诺数的情况下,基本 Couette 流是唯一的,就是说当旋转角速度很小时,流体绕圆筒的轴线作水平圆周运动,这种流动叫做 Couette 流动.当 ω 到达某个临界值 ω_{1c} 时, Couette 流动逐渐失去稳定性,出现新的定常流动,该流动呈轴对称形式,沿轴线方向规则地分布着旋涡,相邻的旋涡是反向的,我们把它叫做 Taylor 涡流,即在通过轴的子午面内,沿 Z 轴方向呈现周期性旋涡,并且关于 Z 轴成镜面反射对称. Taylor 旋涡是环形涡,它仍然是定常流动,而且是稳定的.如果 ω 继续增大,越过第二临界值 ω_{2c} 时, Taylor 旋涡转化成 Taylor 行进波,这是一种沿旋转轴均匀运动的波,破坏了对时间和旋转轴的不变性,但仍是一种周期性运动,并且在一个适当的旋转标架里,流动看来还是定常的,这样的周期运动称为旋转波.当 ω 继续增大时,第三次转变发生,流动变成拟周期,它的次频率作为调制旋转波,再经过若干阶段,进入湍流.简化模型通常是处理无穷维问题的常用方法,为获得无穷维系统 Couette-Taylor 流问题的动力学行为,对其进行低维分析是非常有意义的,而且经典的湍流理论认为湍流是一种具有有限个自由度的运动,这在 Navier-Stokes 方程全局吸引子分数维的有限性方面已获得强有力的支持,因此采用低模分析方法来讨论 Couette-Taylor 流问题是切实可行的.

文献[6]利用同轴圆筒间隙区域 Stokes 算子的特征函数作为基函数对周期性边界条件 Navier-Stokes 方程进行傅里叶展开,截取傅里叶级数的前三项,得到下列混沌系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + cy \\ \dot{y} = -xz + arx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2)$$

这里 x, y, z 为状态变量,它们均为时间 t 的函数, σ, a, b, c 都是正的参数, r 为雷诺数.

其定点 (x_0, y_0, z_0) 满足下列条件:

$$\begin{cases} y = \frac{\sigma}{c}x \\ x(ar - \frac{\sigma}{c}z) = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{b}{\sigma}(acr - \sigma)} \end{cases}$$

当 $acr < \sigma$ 时, 系统只有一个定态 $O(0, 0, 0)$, 此定态表示系统流体处于绕中心轴旋转的层流状态, 即 Couette 流动(图 1).

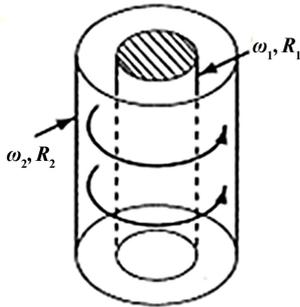


图 1 Couette-Taylor 流
Fig.1 Couette-Taylor flow

当 $acr \geq \sigma$ 时, 有以下三个定态:

$$\begin{cases} O(0, 0, 0) \\ P^+(x_0, y_0, z_0) \\ P^-(x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

其中 $x_0 = \pm \sqrt{\frac{b}{\sigma}(acr - \sigma)}$, $y_0 = \pm \sqrt{\frac{b\sigma}{c^2}(acr - \sigma)}$, $z_0 = ar - \frac{\sigma}{c}$.

由于在 P^+, P^- 处 x, y, z 变量之值都不为零, 因此定态 P^+, P^- 表示已出现稳定的 Taylor 涡流的状态(图 2). 当这种流动失稳时将产生 Taylor 行进波(图 3).

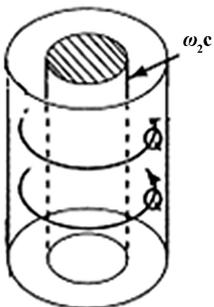


图 2 Taylor 涡流
Fig.2 Taylor vortex

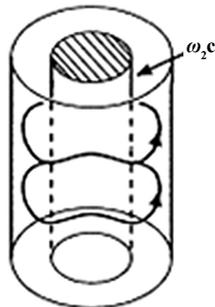


图 3 Taylor 行进波
Fig.3 Traveling wave

性质及对应的 Couette-Taylor 流实际流动.

表 1 当 r 连续变化时系统(2)的定态的性质及对应的 Couette-Taylor 流实际流动

Table 1 Property of the equilibrium points in system (2) and corresponding actual flow of Couette-Taylor flow with the increasing of r

r	0	1	1.75	18.86	24.46
O	Stable nodal point	Saddle node	Saddle node	Saddle node	Saddle node
P^+ and P^-	Inexistence	Stable nodal point	Stable focus	Stable focus	Saddle node
Movement in phase space	Tend to be steady state point O	Tend to be steady state point P^+ or P^-	The trajectory tends to P^+ or P^- by form of spirals	trajectory jump back and forth between P^+ and P^- increasingly intense	Unstable limit cycle (subcritical Hopf bifurcation)
The actual flow of Couette-Taylor flow	Couette-Taylor flow (Figure 1)	The regular Taylor and Taylor wave were formed (Figure 2,3)	Taylor-vortex and traveling were formed (Figure 2,3)	After wavy vortex into the transient chaos	Irregular turbulence (chaos)

接下来对 Couette-Taylor 流三模系统混沌行为进行数值仿真:

取 $\sigma = 9.35, a = 0.758, b = 1.45, c = 8.4, r = 60$, 通过计算机仿真, 系统(2)混沌吸引子, Lyapunov 指数谱, 庞加莱截面, 功率谱, 分别如图(4)(5)(6)(7)所示, 说明该系统存在混沌现象.

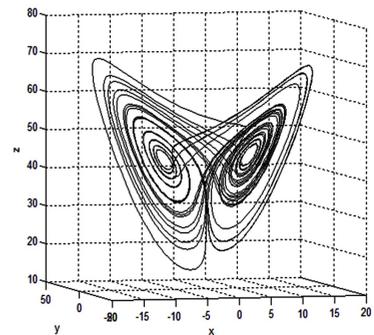


图 4 系统(2)混沌吸引子
Fig.4 Chaotic attractors of system (2)

2 Couette-Taylor 流三模系统的全局稳定性分析

本节给出该混沌系统(2)的全局指数吸引集和正向不变集的估计式.

首先我们在这里给出一些相关定义. 令 $X = (x, y, z)$, 假设 $X(t) = X(t, t_0, X_0)$ 是混沌系统(2)的解.

如表 1 给出了当 r 连续变化时系统(2)定态的

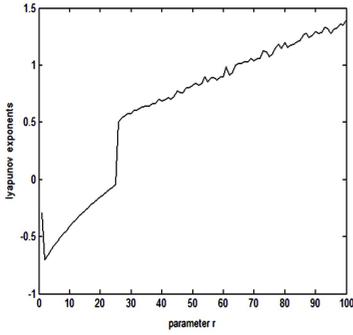


图5 系统(2)最大Lyapunov指数谱

Fig.5 Maximum Lyapunov spectrum of system (2)

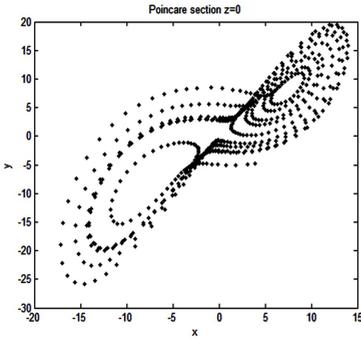


图6 系统(2)的庞加莱截面

Fig.6 Poincaré section of system (2)

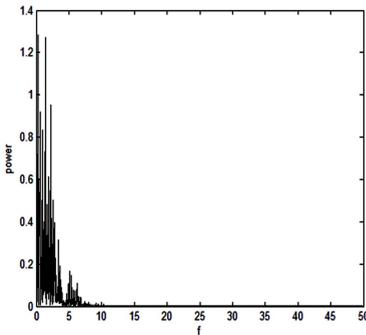


图7 系统(2)的功率谱

Fig.7 Power spectrum of system (2)

定义 1 如果存在常数 $L_\lambda > 0$, 使对于 $V_\lambda(X_0) > L_\lambda, V_\lambda(X(t)) > L_\lambda$, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} V_\lambda(X) = L_\lambda$, 那么我们称 $\Omega_\lambda = \{X | V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda\}$ 是系统(2)的一个全局吸引集. 如果对任意的 $X_0 \in \Omega_\lambda$ 和任意的 $t > t_0$ 都有, 则称 $X(t, t_0, X_0) \in \Omega_\lambda$ 为正向不变集. 如果存在常数 $L_\lambda > 0, r_\lambda > 0$ 使得对任意的 $X_0 \in R^3, V_\lambda(X_0) > L_\lambda, V_\lambda(X(t)) > L_\lambda$, 有下列的指数估计不等式: $V(X(t)) - L_\lambda \leq (V_\lambda(X_0) - L_\lambda) e^{-r_\lambda(t-t_0)}$ 成立, 那么我们称 $V_\lambda(X(t)) > L_\lambda$ 是系统(2)的一个全局指数吸引集.

定理 1 设 $b > \frac{1}{2}, a > 0, c \geq 1, r \geq 1$, 对任意常数

$m \geq 0$, 令:

$$V(X) = mx^2 + y^2 + (z - mc - ar)^2 \tag{3}$$

$$L: mx^2 + y^2 + (z - mc - ar)^2 \leq \frac{b^2(ar + mc)^2}{2b - 1} \tag{4}$$

则当 $V(X_0) \geq L, V(X(t)) \geq L$ 时, 对于系统(2)的轨线, 有全局指数吸引集和正向不变集的估计式 $V(X(t)) - L \leq (V(X_0) - L) e^{-(t-t_0)}$, 从而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(X(t)) \leq L$. 也就是说, $\Omega = \{X | V(X(t)) \leq L\}$ 是系统(2)的全局指数吸引集和正向不变集.

证明 构造一个广义正定的径向无界 Lyapunov 函数:

$$V(X) = mx^2 + y^2 + (z - mc - ar)^2 \tag{5}$$

计算沿着系统(2)的正半轨线关于时间的导数, 有:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2mx\dot{x} + 2y\dot{y} + 2(z - mc - ar)\dot{z} \\ &= 2mx(-\sigma x + cy) + 2y(-xz + arx - y) + \\ &\quad 2(z - mc - ar)(xy - bz) \\ &= -2m\sigma x^2 - 2y^2 - 2bz^2 + 2(ar + mc)bz \\ &= -V + (1 - 2\sigma)mx^2 - y^2 + (1 - 2b)z^2 + \\ &\quad 2(ar + mc)(b - 1)z + (mc + ar)2 \\ &= -V + F(X) \end{aligned} \tag{6}$$

定义函数:

$$F(X) = (1 - 2\sigma)mx^2 - y^2 + (1 - 2b)z^2 + 2(ar + mc)(b - 1)z + (mc + ar)2$$

计算 $F(x, y, z)$ 关于 (x, y, z) 的极 Lagrange 极值. 因为 $F(X)$ 为二次函数, 其局部极大值为全局极大值, 因此计算 $F(x, y, z)$ 极大值 $F(X_0)$. 因此, 令:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(1 - 2\sigma)mx = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2(1 - 2b)z + 2(ar + mc)(b - 1) = 0$$

于是 $x = 0, y = 0, z = \frac{-(ar + mc)(b - 1)}{1 - 2b}$. 再求

$F(x)$ 的二阶导数:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2(1 - 2\sigma)m < 0 \text{ (当 } \sigma > \frac{1}{2} \text{ 时成立)}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2 < 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2(1 - 2b) + 2(ar + mc) < 0 \text{ (当 } b > \frac{1}{2} \text{ 时成立)}$$

因此 $\sup_{x \in R^3} F(X) = F(x, y, z) |_{(x=0, y=0, z=\frac{-(ar+mc)(b-1)}{1-2b})} =$

$$\frac{b^2(ar+mc)^2}{2b-1}$$

于是,从式子(6),我们可知 $\dot{V} \leq -V+L$. 从而,当 $V(X_0) \geq L, V(X(t)) \geq L$ 时,有全局指数估计式 $V(X(t)) - L \leq (V(X_0) - L)e^{-(t-t_0)}$.

对上式两边取上极限,有 $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} V(X(t)) \leq L$. 因此, $\Omega = \{X | V(X(t)) \leq L\}$ 是系统(2)的全局指数吸引集和正向不变集.

因此可以给出系统(2)的如下一些估计式:

1) 当 $m=0$ 时,我们便得到了系统(2)的圆柱形估计式:

$$y^2 + (z-ar)^2 \leq \frac{b^2(ar)^2}{2b-1}$$

2) 当 $m=1$ 时,我们便得到了系统(2)的球形公式:

$$x^2 + y^2 + (z-c-ar)^2 \leq \frac{b^2(ar)^2}{2b-1}$$

3) 当 $m=1/c$ 时,我们便得到系统(2)的一个新的椭球形公式:

$$\frac{1}{c}x^2 + y^2 + (z-ar)^2 \leq \frac{b^2(ar)^2}{2b-1}$$

4) 当 $m=ar/c$ 时,我们便得到系统(2)的另一个椭球形公式:

$$\frac{ar}{c}x^2 + y^2 + (z-2ar)^2 \leq \frac{4b^2(ar)^2}{2b-1}$$

下面利用集合论中交集的思想,取前几种估计式的交集,以期获得更佳的估计结果.

定理 2 设 $a>0, b>0$ 和 $r \geq 1$, 则下列圆柱体

$$Q_1: \begin{cases} y^2 + (z-ar)^2 \leq \varepsilon(ar)^2, \text{ 当 } 0 < b \leq \frac{1}{2} \\ x^2 \leq \varepsilon(ar)^2 \end{cases}$$

$$Q_2: \begin{cases} y^2 + (z-ar)^2 \leq \frac{b^2(ar)^2}{2b-1}, \text{ 当 } b > \frac{1}{2} \\ x^2 \leq \varepsilon \frac{b^2(ar)^2}{2b-1} \end{cases} \quad (7)$$

为系统(2)的一个全局吸引集和正向不变集,其中 $\varepsilon > 1$ 为任意正数.

证: 当 $0 < b \leq \frac{1}{2}$ 时,对于系统(2)的 2, 3 两个方程作广义正定径向无界的 Lyapunov 函数:

$$V = y^2 + (z-ar)^2 \quad (8)$$

沿系统(2)的轨线有:

$$\frac{dV}{dt} = -2y^2 - 2bz^2 + 2barz$$

$$\begin{aligned} &\leq -2y^2 - bz^2 + 2barz \\ &= -2y^2 + b(z-ar)^2 + b(ar)^2 \\ &\leq by^2 - b(z-ar)^2 + b(ar)^2 < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

当 $y^2 - (z-ar)^2 > (ar)^2$ 时成立,故圆柱 $y^2 + (z-ar)^2 \leq \varepsilon(ar)^2$, 为系统(2)分量 y, z 的全局吸引集和正向不变集. 所以, $|y| \leq \sqrt{\varepsilon}ar$.

将 y 的最终界代入系统(2)的第一个方程且用常数变易法估计 $x(t)$, 有:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-\sigma(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\sigma(t-\tau)} cy(\tau) d\tau \\ &\leq x_0 e^{-\sigma(t-t_0)} + e^{-\sigma t} \int_{t_0}^t e^{\sigma\tau} c\sqrt{\varepsilon}ard\tau \\ &= x_0 e^{-\sigma(t-t_0)} + \frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar (1 - e^{-\sigma(t-t_0)}) \\ &= (x_0 - \frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar) e^{-\sigma(t-t_0)} + \frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar \end{aligned}$$

故有:

$$(x(t) - \frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar) \leq (x_0 - \frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar) e^{-\sigma(t-t_0)} \rightarrow 0,$$

$$\text{当 } x_0 > \frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar, t \rightarrow +\infty \quad (10)$$

即 $x(t)$ 从大于 $\frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar$ 的方向指数地趋于 $\frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar$. 同时我们又可得出:

$$\begin{aligned} x(t) &\geq x_0 e^{-\sigma(t-t_0)} - e^{-\sigma t} \int_{t_0}^t e^{\sigma\tau} c\sqrt{\varepsilon}ard\tau \\ &= x_0 e^{-\sigma(t-t_0)} - \frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar (1 - e^{-\sigma(t-t_0)}) \\ &= x_0 e^{-\sigma(t-t_0)} + \frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar e^{-\sigma(t-t_0)} - \frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar \quad (11) \end{aligned}$$

$$\text{故 } -x(t) - \frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar \leq (-x_0 - \frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar) e^{-\sigma(t-t_0)} \rightarrow 0,$$

即 $x(t)$ 从小于 $-\frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar$ 的方向地趋于 $-\frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar$, 从而 $|x| \leq \frac{c}{\sigma} \sqrt{\varepsilon} ar$ 为关于 x 的全局吸引集. 这说明 Q_1 为系统(2)的全局吸引集合正向不变集.

接下来考虑 $a>0, b > \frac{1}{2}$ 和 $r \geq 1$ 时的情况, 仍用(8)式的 Lyapunov 函数, 有:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -2y^2 - 2bz^2 + 2arbz \\ &= -V - 2y^2 + (1-2b)z^2 + ar(2b-2)z + (ar)^2 \\ &= -V + \tilde{F}(X) \end{aligned}$$

定义函数:

$$\tilde{F}(X) = -2y^2 + (1-2b)z^2 + ar(2b-2)z + (ar)^2$$

计算 $\tilde{F}(X)$ 极大值 $\tilde{F}(X_0)$, 令:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = -4y = 0$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial z} = 2(1-2b)z + ar(2b-2) = 0$$

得 $y=0, z = -\frac{ar(2b-2)}{2(1-2b)}$. 再求 $\bar{F}(X)$ 的二阶导

数:

$$\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y^2} = -4 < 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial z^2} = 2(1-2b) < 0 \quad (b > \frac{1}{2} \text{ 时成立})$$

同时 $\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial z^2} = 0$. 因此 $\bar{F}(X)$ 的极大值:

$$\begin{aligned} \bar{F}(X_0) &= \sup \bar{F}(X) = \bar{F}(x, y, z) \Big|_{x=0, y=0, z=-\frac{ar(2b-2)}{2(1-2b)}} \\ &= \frac{b^2(ar)^2}{2b-1} \end{aligned}$$

所以有 $\frac{dV}{dt} \leq -V + \bar{F}(X_0)$, 当 $y^2 + (z-ar)^2 \geq$

$\frac{b^2(ar)^2}{2b-1}$ 时成立.

当 $X \neq X_0$ 时, $\frac{dV}{dt}$ 在 $y^2 + (z-ar)^2 = \frac{b^2(ar)^2}{2b-1}$ 上取

严格的不等号, 故系统(2)的轨线的分量 y 和 z 从

Q_2 的表面上由外向内穿过. 当 $X = X_0$ 时, $\frac{dV}{dt} = 0$, 由

连续开拓原理可知, 系统(2)的轨线的分量 y 和 z

是从 Q_2 的表面上由外向内穿过的. 由 $y^2 + (z-ar)^2$

$\leq \frac{b^2(ar)^2}{2b-1}$ 得知 $|y| \leq \frac{bar}{\sqrt{2b-1}}$, 根据(10)和(11)关于

$x(t)$ 的估计式得到 $x(t) \leq \frac{b^2(ar)^2}{2b-1}$. 所以 Q_2 为系

统(2)的全局吸引集和正向不变集.

3 Couette-Taylor 流三模系统的全局指数同步

所谓混沌同步, 指的是对于不同初始条件出发的两个混沌系统, 随着时间的推移, 它们的轨线逐渐一致^[15]. Pecora 和 Carroll 指出, 当混沌系统能分解成两个子系统, 而且响应系统中所有的条件 Lyapunov 指数均小于零时, 在驱动系统和响应系统中会有混沌同步产生^[16].

定义 2 两个非线性动力系统:

$$\dot{x} = F(t, x) \quad (12)$$

$$Y = F(t, Y) + \mu(X, Y) \quad (13)$$

这里 $X, Y \in R^n$, F 是 n 维的非线性函数; μ 是 n 维的控制输入函数, 我们称系统(12)是驱动系统, 系统(13)是响应系统.

如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0$, 系统(12)和系统(13)是同步的.

首先设驱动系统为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sigma x_1 + cy_1 \\ \dot{y}_1 = -x_1 z_1 + ar x_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - bz_1 \end{cases} \quad (14)$$

相应的响应系统可表示为:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\sigma x_2 + cy_2 + u_1(e_x, e_x, e_z) \\ \dot{y}_2 = -x_2 z_2 + ar x_2 - y_2 + u_2(e_x, e_x, e_z) \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - bz_2 + u_3(e_x, e_x, e_z) \end{cases} \quad (15)$$

这里 u_1, u_2, u_3 为要设计的控制函数.

令 $e^T = (e_x, e_y, e_z)$, $e_x = x_2 - x_1, e_y = y_2 - y_1, e_z = z_2 - z_1$, 则式(15)减去(14)得到的误差动力系统可表示为:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -\sigma e_x + ce_y + u_1(e_x, e_y, e_z) \\ \dot{e}_y = are_x - e_y - z_2 e_x - x_2 e_z + e_x e_z + u_2(e_x, e_y, e_z) \\ \dot{e}_z = -be_z + y_2 e_x + x_2 e_y - e_x e_y + u_3(e_x, e_y, e_z) \end{cases} \quad (16)$$

目标是设计有效控制器 $(u_1, u_2, u_3)^T$, 使系统(16)的零解是全局指数稳定的, 从而驱动系统(14)和响应系统(15)全局指数同步, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$. 因为混沌系统是有界的, 所以假设 $|x| \leq M_x, |y| \leq M_y, |z| \leq M_z$.

定义 3 如果存在常数 $\alpha > 0$, 对任意的 $t > t_0$ 都有 $V(t) \leq V(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)}$, 系统的原点是全局指数稳定的.

如下结论利用线性反馈同步证明系统全局指数同步.

定理 3 对于误差系统(16), 当控制器设计如下:

$$u_1 = -ke_x - y_2 e_z, u_2 = -ce_x - are_x + z_2 e_x, u_3 = 0.$$

适当选择 $k > 0$, 使得矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 2(\sigma+k) & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$$

正定, 则误差系统(16)的零解全局指数稳定, 从而驱动系统(14)和响应系统(15)全局指数同步.

证明 构造一个正定的径向无界的 Lyapunov 函数.

$$V = e_x^2 + e_y^2 + e_z^2$$

计算 V 沿着式(16)正半轨线对时间的导数有:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= 2e_x \dot{e}_x + 2e_y \dot{e}_y + 2e_z \dot{e}_z \\
 &= 2e_x(-\sigma e_x + ce_y - ke_x - y_2 e_z) + \\
 &\quad 2e_y(are_x - e_y - z_2 e_x - ce_x - are_x + z_2 e_x) + \\
 &\quad 2e_z(-be_z + y_2 e_x) \\
 &= -2(\sigma + k)e_x^2 - 2e_y^2 - 2be_z^2 \\
 &= -\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2(\sigma + k) & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \\
 &= -e^T P e \tag{17}
 \end{aligned}$$

其中,

$$P = \begin{pmatrix} 2(\sigma + k) & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b \end{pmatrix}$$

为了使误差系统(16)的零解是全局指数稳定的, 保证矩阵 P 是正定的即可.

当且仅当下列不等式成立:

$$2(\sigma + k) > 0$$

从上面不等式, 推得 k 满足 $k > -\sigma$.

当 $k > 0$ 时, 矩阵 P 是正定的, 而 \dot{V} 是负定的,

从式(17)和高等代数知识, 我们有:

$$\frac{dV}{dt} \leq -\lambda_{\min}(P)(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) = -\lambda_{\min}(P)V$$

因此有:

$$\begin{aligned}
 e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 &= V(X(t)) \leq V(X(t_0)) e^{-\lambda_{\min}(P)(t-t_0)}, \\
 t &\geq t_0
 \end{aligned}$$

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $V(X(t)) \rightarrow 0$, 从而误差系统(16)的零解全局指数稳定, 因此驱动系统(14)和响应系统(15)全局指数同步.

下面利用四阶 Runge-Kutta 算法来验证上面提出的方法的有效性.

在数值仿真中, 选取步长为 0.001, 驱动系统(14)和响应系统(15)的初始条件分别为:

$$(x_1(0), z_1(0), y_1(0)) = (17, 14, 89)$$

$$(x_2(0), z_2(0), y_2(0)) = (-25, 28, -37)$$

因此误差系统的初始条件为 $(e_x(0), e_y(0), e_z(0)) = (-42, 14, -126)$, 且定义同步误差为:

$$e(t) = \sqrt{e_x^2(t) + e_y^2(t) + e_z^2(t)}$$

对于定理 3 中的控制器, 选取控制参数 $k = 1$ 为系统(16)的控制率, 那么响应系统(15)和驱动系统(14)的同步如图 8 所示, 同步误差 $e(t)$ 随时间 t 的变化如图 9 所示. 从仿真结果看出, 两个系统很快达到同步, 误差很快趋于 0.

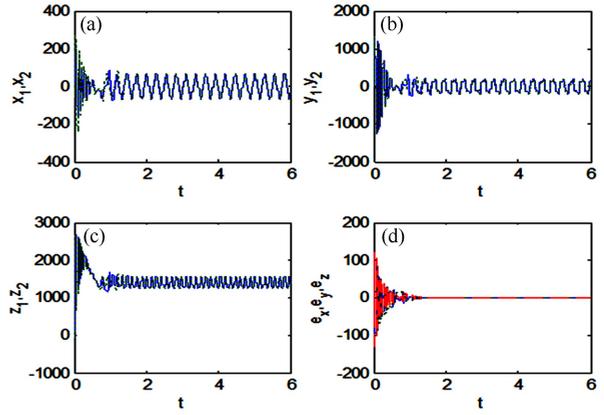


图 8 驱动系统轨线(红线)和响应系统(蓝线)轨线随着时间 t 的变化
Fig.8 Time history of state trajectories for drive system (red line) and response system (blue line)

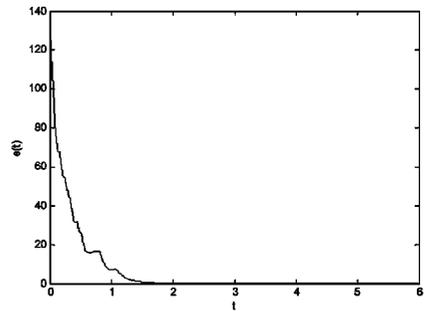


图 9 误差随时间 t 变化

Fig.9 Time history of error $e(t)$

4 结论

本文研究 Couette-Taylor 流三模类 Lorenz 方程动力学行为与仿真问题, 解释了 Couette-Taylor 流实验中观察到的部分涡流的演化过程. 给出了 Couette-Taylor 流的三模系统的全局吸引集和正向不变集, 实现了全局指数同步. 所得结果对 Couette-Taylor 流等混沌系统的实际应用有一定意义.

参 考 文 献

- Edward ott. Chaos in dynamical systems. England: Cambridge University Press, 2002
- Roger Temam. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1997
- 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学. 北京: 高等教育出版社, 2004:120~131 (Liu B Z, Peng J H. Nonlinear Dynamics. Beijing: Higher Education Press, 2004:120~131 (in Chinese))
- 盛昭瀚, 马军海. 非线性动力系统分析引论. 北京: 科学出版, 2001 (Sheng Z H, Ma J H. The analysis of non-

- linear dynamical system. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese))
- 5 孙克辉,傅元理. 简化 Lorenz 系统多翅膀混沌吸引子设计与电路实现. 动力学与控制学报, 2016,14(5): 395~400 (Sun K H, Fu Y L. Design and circuit implementation of the simplified Lorenz multi wing chaotic attractor. *Journal of Dynamics and Control*, 2016,14(5): 395~400 (in Chinese))
 - 6 Wang H Y. Lorenz systems for the incompressible flow between two concentric rotating cylinders. *Journal of Partial Differential Equations*, 2010,23(3):209~221.
 - 7 王贺元. Couette-Taylor 流三模系统的混沌行为及其仿真. 数学物理学报, 2015,35A(4):769~779 (Wang H Y. The chaos behavior and simulation of three model systems of Couette-Taylor flow. *Acta Mathematica Scientia*, 2015,35A(4):769~779 (in Chinese))
 - 8 Gassa Feugainga C M, Crumeyrollea O, Yangb K S, et al. Destabilization of the Couette-Taylor flow by modulation of the inner cylinder rotation, *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 2014,44:82~87
 - 9 Richard J A M, Grossmann S S, Verzicco R, et al. Optimal Taylor-Couette flow: Direct numerical simulations. *Journal of Fluid Mechanics*, 2013,719:14~46
 - 10 Wang H Y. Dynamical behaviors and numerical simulation of lorenz systems for the incompressible flow between two concentric rotating cylinders. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012,22(5)
 - 11 Pascal C, Gerard T. The Couette-Taylor problem. New York: Springer-Verlag, 1994.
 - 12 Meseguera A, Avilab M, Melibovskyc F, et al. Solenoidal spectral formulations for the coputation of secondary flows in cylindrical and annular geometries. *European Physics Journal*, 2007,146:249~259.
 - 13 廖晓昕. 论 Lorenz 混沌系统全局吸引集和正向不变集的新结果及对混沌控制与同步的应用. 中国科学, E 辑, 2004,34(12):1404~1419 (Liao X X. On the new results of global attractive set and positive invariant set of the Lorenz chaotic system and applications to chaos control and synchronization. *Science in China Series. F Information Sciences*, 2005,48(3):304~321 (in Chinese))
 - 14 廖晓昕,罗海庚,傅予力等. 论 Lorenz 系统族的全局指数吸引集和正向不变集. 中国科学, E 辑: 信息科学, 2007,37(6):757~769 (Liao X X, Luo H G, Fu Y L, et al. On global exponential attractor and positive invariant sets of Lorenz systems. *Science in China Series. E Information Sciences*, 2007,37(6):757~769 (in Chinese))
 - 15 陈关荣,吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析控制与同步. 北京: 科学出版社, 2003 (Chen G R, Lv J H. Dynamic analysis control and synchronization of Lorenz systems. Beijing: Science Press, 2003 (in Chinese))
 - 16 关新平. 混沌控制及其在保密通信中的应用. 北京: 国防工业出版社, 2002 (Guan X P. Chaos control and its application in secure communication. Beijing: National Defend Industry Press, 2002 (in Chinese))

LOW-DIMENSIONAL MODEL ANALYSIS AND GLOBAL STABILITY AND SYNCHRONIZATION STUDY OF COUETTE-TAYLOR FLOW SYSTEM*

Kan Meng[†] Wang Heyuan Duan Wenyan

(College of Sciences, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China)

Abstract In this paper, the dynamic behaviors and synchronization is investigated for a three-mode system of Couette-Taylor flow, and the corresponding evolution of Couette-Taylor flow is also explained. By constructing a family of generalized radically infinite and positive definite Lyapunov functions, the globally attractive set and positively invariant set of the Couette-Taylor flow system are obtained. It is found that the designed linear feedback controller are effective in globally synchronizing two identical chaotic systems. Eventually, a numerical example is provided to validate the feasibility of the results.

Key words Couette-Taylor flow, globally attractive sets, positively invariant set, globally exponential synchronization

Received 22 May 2016, revised 2 November 2016.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11572146,11526105), Foundation of Liao Ning Educational Committee (L2013248) and Special Fund for Science and Technology of Jin Zhou (13A1D32)

[†] Corresponding author E-mail: lxywhy@lnut.edu.cn