

广义坐标的形成史*

梅凤翔¹ 李彦敏^{2†} 吴惠彬³

(1.北京理工大学宇航学院,北京 100081) (2.商丘师范学院物理与电气信息学院,商丘 476000)

(3.北京理工大学数学学院,北京 100081)

摘要 当力学系统加上约束时,由直角坐标过渡到广义坐标是特别方便的,而且也是十分必要的.引进广义坐标是分析力学的一大特色,而 Lagrange 方程就建立在广义坐标上的.这个札记提供广义坐标形成的一些史料,并提出一些看法.

关键词 分析力学, 广义坐标, 形成史

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-018

引言

科学史研究的一个重要领域是学科史研究.力学史的一部分是分析力学史,关于分析力学史我国研究较少,在分析力学发展过程中有许多资料都不是第一手的,而是从别人那里拿来的第二、第三手的资料.比如说,Lagrange 引入广义坐标,翻遍 Lagrange 原著并未出现此种提法,而广义坐标这个词,实际上是在 Lagrange 著作问世一百多年后才由此种提法.本文就广义坐标的形成和发展给出一些史料,并提出一些看法.

1 Lagrange 的《分析力学》

1.1 Lagrange 在其著作《分析力学》中提出动力学普遍公式的变换问题,指出“利用每个问题的性质给出的条件方程,将出现在公式中的各个变量缩减为少数目的独立变量.”^[1]翻遍原著并未出现“广义坐标”(coordonnées généralisées).

1.2 Lagrange 用字母 $\xi, \psi, \varphi \cdots$ 表示“缩减为少数目的”的新变量.

1.3 Moiseyev 指出,Lagrange 的“每个问题的性质给出的条件方程”就是描述光滑双面的约束方程,而新变量就像可能位移一样是彼此独立的^[2].

1.4 变量 $\xi, \psi, \varphi \cdots$ 后来发展为 q_1, q_2, q_3, \cdots , 这就是广义坐标字母的原型.

1.5 Lagrange JL(1736-1813), 汉译拉格朗

日,法国力学家,数学家,分析力学的奠基人.他的《分析力学》是名著,由此出现了分析力学学科.

2 Bertrand 的附录

2.1 在 Lagrange 著作附录 VI 中 Bertrand 写道:“用 q_1, q_2, \cdots, q_k 标记 k 个变量,使得 $3n$ 个坐标 $x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n$ 可表为这些变量和时间 t 的函数.”^[1]

2.2 Bertrand 用字母 q_1, q_2, \cdots, q_k 代替 Lagrange 的字母 $\xi, \psi, \varphi \cdots$ 表示独立的新变量.附录中仍未出现“广义坐标”,但后人沿用了字母 q .

2.3 这个附录是 Bertrand JLF(1822-1900)给出的,他是法国数学家,巴黎科学院院士.分析力学中有 Bertrand 问题.Jourdain 原理,牛青萍称为 Bertrand 原理.

3 Routh 的《刚体系统动力学》

3.1 Routh 的著作《刚体系统动力学》第二部分第 177 页,解下述问题:绕一铅垂轴旋转的重球在任意形状曲面顶点处于平衡.给一轻扰作小振动,试求运动.他将“用不定乘子 λ 和 μ 修正的 Lagrange 运动方程”表示为^[3]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'} - \frac{\partial L}{\partial q} = \lambda \frac{\partial L_1}{\partial q'} + \mu \frac{\partial L_2}{\partial q'}$$

其中,

$$L_1 = 0, L_2 = 0$$

2016-09-11 收到第 1 稿,2016-10-13 收到修改稿.

* 国家自然科学基金项目(10932002,11272050,11372169,11572034)

† 通讯作者 E-mail: hnymnl@163.com

为约束方程.

3.2 Routh 用字母 q 表示坐标,未提“广义坐标”.这个版本是第六版的美国版,第一版是 1860 年,第六版是 1905 年. q' 表示 q 对时间的导数.

3.3 “修正的 Lagrange 方程”,实际上是非完整系统的带乘子的方程,也称为 Routh 方程.

3.4 Routh EJ (1831-1907), 汉译劳恩,罗斯,英国力学家.他在刚体动力学,分析力学,运动稳定性等方面贡献很大.

4 Appell 的《理性力学》

4.1 Appell 巨著《理性力学》第六版第二卷俄译本《理论力学》第 268 页写道:“参数 q_1, q_2, \dots, q_k 可称为完整系统的坐标.”^[4,5]

4.2 Appell 将参数 q 称为完整系统的坐标,是因为由这些参数可完全描述完整系统的运动.

4.3 Appell P (1855-1930), 汉译阿佩尔,法国数学家,力学家.他的五卷《理性力学》非常有名,其中第二卷有他导出的适应于完整和非常完整系统的普遍方程,即 Appell 方程.他的第一卷和第二卷也是分析力学的名著之一,有关评价见文献[6].

5 Chaplygin 的《非完整系统的动力学研究》

5.1 Chaplygin 在他“论重旋转体在水平面上的运动”一文中写道:“设有某个力学系统,在任一瞬间均由 n 个参数 q_1, q_2, \dots, q_n 所决定,…”.“广义速度 \dot{q}_s 之间,显然…”^[7,8]

5.2 这里有字母 q , 称为参数,未提“广义坐标”,但将 \dot{q} 称为广义速度.

5.3 Чаплыгин СА (1869-1942), 汉译恰普雷金,查浦雷金,英译 Chaplygin, 俄国、苏联力学家.他在文献[7-8]中的 4 篇论文中都是非完整力学的奠基性成果.有关评议见文献[9].

6 Suslov 的《理论力学》

6.1 Suslov 在他《理论力学》第 321 页写道:“ q_σ ($\sigma = 1, 2, \dots, s$) 不同于笛卡儿坐标,称为广义坐标,或曲线坐标.”^[10]

6.2 在书的校者前言中, Bukhgalts 和 Goltzman 写道:

“敖德萨大学已故教授 Suslov GK 的《分析力学基础》,本版称为《理论力学》,它是这个邻域的很完全,很系统的教材,…”^[10]

6.3 Suslov 的《分析力学基础》初版于 1911 年~1921 年.

6.4 Суслов ГК (1857-1932), 汉译苏斯洛夫,英译 Suslov, 俄国、苏联力学家.他的《理论力学》也是分析力学名著之一,有关评价见文献[6].

7 Marcolongo 的《理论力学》

7.1 Marcolongo 1912 年的德文版《理论力学》第 99 页写道:“…参数 q_1, q_2, \dots, q_k . 这些参数称为系统的普遍 (allgemeine) 坐标.”^[11]

7.2 这本书的复印件是美国分析力学专家 Papastavridis 教授 1992 年 9 月寄给梅凤翔的,是想说明所谓 Kane 方程已在本书中出现.

7.3 德文 allgemeine, 与张永发教授讨论过,应汉译为普遍的.在文献[12] § 34 的标题为“第二类 Lagrange 运动方程. allgemeine (generalisierte) 坐标,…”可见,在一些德文书中 allgemeine (普遍的) 与 generalisierte (广义的) 是通用的.

8 Whittaker 的《分析动力学》

8.1 Whittaker 在其著作《分析动力学》第 33 页写道:“坐标一般用 q_1, q_2, \dots, q_n 表示.”^[13]

8.2 Whittaker 的“动力学系统的坐标”,即广义坐标,只用了字母 q , 但未提“广义”.

8.3 Whittaker ET (1873-1956), 汉译惠特克,他的《分析动力学》很好地总结了 1904 年以前经典力学的主要成果.这本书是分析力学的名著之一,有关评价见文献[6].更好的评价见文献[14].

9 Levi-Civita 和 Amaldi 的《理性力学》

9.1 Levi-Civita 和 Amaldi 的《理性力学》第一卷的俄译本第 276 页写道:“任意参数 q_1, q_2, \dots, q_n 称为系统的广义坐标或 Lagrange 坐标.”^[15,16]

9.2 上述意大利文《理性力学》于 1930 年出第二版,1952 年被译成俄文为《理论力学》.

9.3 Levi-Civita T (1873-1941), 汉译列维-奇维塔,意大利数学家,在绝对微分学,三体问题等方面多有贡献.他与 Amaldi 合著的《理性力学》也很有名.

10 Hamel 的《理论力学》

10.1 Hamel 的德文《理论力学》第 79 页写道:“ q_ν 称为 Lagrange 坐标.”^[17]

10.2 Hamel G (1877-1954), 汉译哈梅尔,德

国数学家,力学家,非完整力学的奠基人之一.他的《理论力学》相当有名.更好的评价见文献[14].

11 Mac Millan 的《刚体动力学》

11.1 Mac Millan WD (1871-1948) 1936 年的英文《刚体动力学》,1951 年被译为俄文.俄文本第 294 页写道:“这些变量称为广义坐标或 Lagrange 坐标.”^[18]

11.2 Mac Millan 书中给出的“Lagrange 方程对非完整系统的推广”就是后人称为 Mac-Millan 方程的方程.

12 周培源的《理论力学》

周培源 (1902-1993) 在其《理论力学》^[19] (1952) 中写道:“…从牛顿原理的式样变换到此参数——或称拉格朗日的广义坐标.”

13 结论

13.1 名称

从 Lagrange 著作的 Bertrand 的附录开始用 q_1, q_2, \dots, q_k 代替 Lagrange 的 $\xi, \psi, \varphi \dots$; 从 Bertrand 的独立新变量到 Appell 的完整系统的坐标,再到 Suslov 的广义坐标;广义坐标的正式提出大约经历了 120 年.

广义坐标的称谓有:

- 1) 完整系统的坐标 (Appell)
- 2) Lagrange 的坐标 (Hamel, Levi-Civita 和 Amaldi, Mac Millan)
- 3) 普遍坐标 (Marcolongo)
- 4) 曲线坐标 (Suslov)
- 5) 广义坐标 (Suslov, Levi-Civita 和 Amaldi, Mac Millan)
- 6) Lagrange 的广义坐标 (周培源)

13.2 定义

- 1) 描述一个完整系统的独立参数^[20].
- 2) 描述完整系统位形的独立参数^[21].
- 3) 确定系统可能位置的参数的最小数目称为独立广义坐标数^[22].
- 4) 凡是能够确定系统位置的、适当选取的独立变量,称为广义坐标^[23].

13.3 意义

1) 当力学系统受有约束时,由直角坐标过渡到广义坐标是特别方便的,而且也是十分必要的.引

进广义坐标,是分析力学的一大特色,而 Lagrange 方程就是建立在广义坐标上的.

2) 武际可的《力学史》有如下论述^[24]:

“按照当时已有的力学知识,要分析稍许复杂的机构,例如一个有五级齿轮传动系统的运动,也还是无能为力的.如果拿这个问题去请教牛顿,牛顿只会处理自由质点的运动,不会处理刚体运动,何况还是带约束的呢.而转去请教欧拉呢?他不得不将整个系统化归为五个‘隔离体’,即五个刚体,分别列出五个刚体的运动方程,而不同刚体之间又有作用力和反作用力的耦合,所以得面对数十个方程联立的微分方程组.这样处理问题实在太复杂了.”

“拉格朗日自有他的高招,他将这个系统化为一个广义坐标的系统,因为五个轮子的系统只要一个参量便可描述它的状态.例如,随便以其中一个轮子的转角为参量,这个参量知道了,整个齿轮系统的状态也便知道了.然后再计算当系统动起来后系统的动能.这时便可列出一个广义坐标满足的二阶方程,这是何等的简便啊!”

3) 有了广义坐标,对完整力学系统已足够用.有时根据需要,可引进多余坐标.而对非完整系统,尚需由广义坐标发展到准坐标.对 Hamilton 系统需引进正则变量以及作用一角变量^[25].

参 考 文 献

- 1 Lagrange J L. Oeuvres Tome XI. Mécanique analytique. Quatrième Éd, Vol 1. Paris: Jacques Gabay, 2006
- 2 Моисеев Н Д. Очерки развития механики. Москва: ИМУ, 1961
- 3 Routh E J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. Part II, New York: Dover Publ. Inc., 1955
- 4 Appell P. Traité de mécanique rationnelle. T II, Sixième Éd. Paris: Gauthier-Villars, 1953
- 5 Аппель П. Теоретическая механика. Т II. Москва: ГИФМЛ, 1960
- 6 梅凤翔. 关于分析力学的三本名著. 力学与实践, 2014, 36(1): 84~87 (Mei F X. Three classics about analytical mechanics. *Mechanics in Engineering*, 2014, 36(1): 84~87 (in Chinese))
- 7 Чаплыгин С А. Исследования по динамике негोलонных систем. Москва: Гостехтеоретиздат, 1949
- 8 查普雷金 С А. 非全定系统的动力学研究. 张燮译. 北京: 科学出版社, 1956 (Chaplygin S A. The dynamics

- study of nonholonomic systems. Translated by Xie Zhang. Beijing: Science Press, 1956 (in Chinese))
- 9 刘信力,梅凤翔.《非全定系统的动力学研究》的评议.力学与实践,2014,36(4):376~378(Liu X L, Mei F X. Comments on the dynamics study of nonholonomic systems. *Mechanics in Engineering*, 2014,36(4):376~378 (in Chinese))
 - 10 Суслов Г.К. Теоретическая механика. Москва: Гостехиздат, 1946
 - 11 Marcolongo R. Theoretische mechanik. Leipzig and Berlin: Druck and Verlag von BG Teubner, 1912
 - 12 Budó A. Theoretische mechanik. Berlin: Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1976
 - 13 Whittaker E T. A Treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Fourth Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1952
 - 14 陈立群.分析力学的3部经典著作及其作者.力学与实践,2010,32(5):113~116(Chen L Q. Three classics of analytical mechanics and their authors. *Mechanics in Engineering*, 2010,32(5):113~116 (in Chinese))
 - 15 Levi-Civita T, Amaldi U. Lezioni di meccanica razionale. Vol Primo, Bologna, 1930
 - 16 Леви-Чивита Т, Амальди У. Курс теоретической механики. Часть Первая, Москва: ИЛ, 1952
 - 17 Hamel G. Theoretische mechanik. Berlin: Springer-Verlag, 1949
 - 18 Мак-Миллан НД. Динамика твердого тела. Москва: ИЛ, 1951
 - 19 周培源.理论力学.北京:人民教育出版社,1952(Zhou P Y. Theoretical mechanics. Beijing: People's Education Press, 1952 (in Chinese))
 - 20 中国大百科全书编辑委员会.中国大百科全书·力学.北京:中国大百科全书出版社,1985(The editorial board of encyclopedia of China. Encyclopedia of China: mechanics. Beijing: Encyclopedia of China Publishing House, 1985 (in Chinese))
 - 21 力学词典编辑部.力学词典.北京:中国大百科全书出版社,1990(The editorial office of mechanics dictionary. Mechanics dictionary. Beijing: Encyclopedia of China Publishing House, 1990 (in Chinese))
 - 22 马尔契夫 А П.理论力学.李俊峰译.北京:高等教育出版社,2006(Markeyev A P. Theoretical mechanics. Translated by Junfeng Li. Beijing: Higher Education Press, 2006 (in Chinese))
 - 23 梅凤翔.分析力学,上卷.北京:北京理工大学出版社,2013(Mei F X. Analytical mechanics, volume A. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013 (in Chinese))
 - 24 武际可.力学史.重庆:重庆出版社,2000(Wu J K. History of mechanics. Chongqing: Chongqing Press, 2000 (in Chinese))
 - 25 梅凤翔.分析力学由广义坐标到作用—角变量.力学与实践,2000,22(3):55~57(Mei F X. Analytical mechanics from generalized coordinates to action—angle-variables. *Mechanics in Engineering*, 2000,22(3):55~57 (in Chinese))

ON THE HISTORY OF FORMATION OF GENERALIZED COORDINATES*

Mei Fengxiang¹ Li Yanmin^{2†} Wu Huibin³

(1.School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(2.Department of Physics and Information Engineering, Shangqiu Normal University, Shangqiu 476000, China)

(3.School of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract When the mechanical system is coupled with the constraints, it is very convenient for the transition from the rectangular coordinates to the generalized coordinates, and it is also very necessary. The introduction of generalized coordinates is one of the major features of analytical mechanics, and the Lagrange equation is based on the generalized coordinates. In this paper, some relevant history data of the formation of generalized coordinates are provided, and some propositions are given.

Key words analytical mechanics, generalized coordinate, history of formation

Received 11 September 2016, revised 13 October 2016.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10932002, 11272050, 11372169, 11572034)

† Corresponding author E-mail: hnynmnl@163.com