

多柔体系统动力学研究进展与挑战*

田强[†] 刘铖 李培 胡海岩

(北京理工大学宇航学院力学系,北京 100081)

摘要 首先回顾多体系统动力学的学科发展和学术交流情况,然后系统概述了多柔体系统动力学方程数值算法、多柔体系统接触/碰撞动力学与柔性空间结构展开动力学三个方面的研究进展及值得关注的若干问题,最后给出了开展多柔体系统动力学研究的若干建议。

关键词 多柔体系统, 数值算法, 接触/碰撞, 柔性空间结构

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-039

1 多体动力学的学科发展回顾

20 世纪 60 年代,以国际著名动力学家、德国慕尼黑工业大学 Kurt Magnus 教授(1912-2003)为代表的一批学者创立了后来称为“多体系统动力学”(multibody system dynamics)的力学分支学科^[1]。该学科主要研究由多个具有运动学约束、存在大范围相对运动物体构成的动力学系统的建模、分析和控制,具有高度的综合交叉属性。该学科的研究成果广泛用于各种机构、车辆、机器人、航天可展开结构的动力学设计,对推动先进制造技术的发展具有重要意义。因此,多体系统动力学学科已被列入《国家自然科学基金委“十三五”发展规划》中的重点扶持学科^[2]。

1.1 学科发展概述

经过近半个多世纪的发展,多刚体系统动力学的研究在建模理论、动力学方程数值求解方法、软件开发等方面已逐渐成熟与完善,故本文在学术内容上重点关注多柔体系统动力学。多柔体系统动力学重点研究柔性部件的大范围运动与部件变形相互耦合的动力学,属于多个力学二级学科的交叉地带,涉及连续介质力学、计算力学、非线性动力学等多方面的理论和方法,研究对相关的理论基础要求较高。

众多国内外学者曾对多柔体系统动力学的研究进展做过全面综述。Shabana^[3]系统总结了早期

多柔体动力学建模的浮动坐标法(floating frame of reference formulation)、增量有限元法(incremental finite element formulation)以及大转动矢量法(large rotation vector formulation),指出了各种方法的特点与不足。浮动坐标方法已被应用于多体动力学商业软件,适用于对具有小变形、小转动或低转速的多柔体系统进行动力学建模和分析。增量有限元法已被广泛应用于大变形结构动力学分析,但仅能处理具有小转动的多柔体系统动力学问题。且如果使用非等参有限元,该方法不能精确描述刚体运动。大转动矢量法隐含的采用了位移与转角两套独立的节点坐标表达柔体截面转动(冗余描述),这对于细长或薄壁柔体动力学问题将产生奇异问题。读者阅读文献[3-6]可获得该方法的更多特点。Wasfy 和 Noor^[7]详细总结了 2003 年之前的多柔体系统动力学研究进展,对柔性构件的建模、约束建模、求解技术、控制策略、耦合问题、设计和实验研究进行了分类讨论,对比分析了柔性多体系统的浮动坐标系、共旋坐标系(corotational frame)、惯性系等不同动力学建模方法,全文包含多达 877 篇参考文献。Eberhard 和 Schiehlen^[8]从分析动力学发展、欧美国家多体动力学学术组织形成、多体系统动力学专著等方面阐述了多体系统动力学发展的历史脉络,介绍了多体动力学在汽车、机床等工业领域的应用研究进展。

此外,还有不少学者从某个方面综述多柔体系

2017-02-27 收到第 1 稿,2017-03-01 收到修改稿。

* 国家自然科学基金项目(11290151, 11472042, 11672034)与国防基础科研计划(B2220133017)资助

[†] 通讯作者 E-mail: tianqiang_hust@aliyun.com

统动力学的研究进展.例如,基于连续介质力学和非线性有限元的绝对节点坐标法^[9](Absolute Nodal Coordinate Formulation, ANCF)是多柔体系统动力学研究的一个重要里程碑,可精确描述柔体的大范围运动和大变形耦合^[3,9].Shabana^[10]给出了 ANCF 单元应具备的条件,田强等^[11]、Gerstmayr 等^[12]以及 Nachbagauer^[13]综述了 Shabana 提出的绝对节点坐标方法,详细介绍了该方法在单元构造、高效计算格式构建与工程应用方面进展情况.又如,多柔体动力学方程的求解是多柔体系统动力学的核心,其数学描述通常为微分-代数方程组(Differential-Algebraic Equations, DAEs).Bauchau 和 Laulusa^[14]系统综述了多体系统动力学微分-代数方程组(DAEs)的降指标方法、控制违约漂移的约束稳定性技术与违约根除技术.此外,洪嘉振与蒋丽忠^[15]介绍了多柔体动力学发展的历史过程、研究发展阶段,特别指出了“动力刚化”问题^[16]给研究带来的挑战.刘才山与陈滨^[17]从多柔体系统动力学方程的描述、碰撞模型的建立、铰接间隙引起的碰撞问题、数值算法、实验研究等方面总结了多柔体系统接触/碰撞动力学研究进展.芮筱亭与戎保^[18]介绍了他们提出的多体系统传递矩阵法,说明该方法无需集成系统总体动力学方程、便于快速计算,已被用于多管火箭等兵器系统动力学分析.

多柔体系统动力学发展至今,对具有小变形、小转动或低转速假设的多柔体动力学问题已有较为完善的建模与计算方法^[3,7,11,17-19].现有多体动力学商业软件 ADAMS^[20,21]、RecurDyn^[22]等已经可以很好地处理这类动力学问题.有限元分析商业软件 ANSYS、ABAQUS 等也逐步引入了多体动力学分析模块.目前,多柔体系统动力学发展面临的主要研究难点有:柔体大范围运动与大变形的耦合描述问题、多柔体间的接触/碰撞动力学问题、高维微分-代数方程组的高效求解问题、高维多柔体系统的动力学模型降阶与控制问题、多领域耦合多柔体系统动力学问题、多尺度多柔体系统动力学问题等.

1.2 主要国际期刊

Web of Science 数据库统计显示(至 2017 年 8 月 2 日):以“multibody dynamics”为主题的 SCI 检索论文共 3802 篇,其中我国学者共发表论文 533 篇,位居美国学者 1028 篇之后,全球排名第 2.但值得指出的是,在这 3802 篇文章中有 ESI 高被引论

文 9 篇,我国学者仅 2 篇.以上数据说明,我国多体系统动力学论文数量与美国尚有明显差距,论文的新颖性、原创性方面也需要加强.

另外,该数据库中以“multibody dynamics”为主题的论文来源数量位居前八名的期刊分别是:《Multibody System Dynamics》、《Vehicle System Dynamics》、《ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics》、《Nonlinear Dynamics》、《International Journal for Numerical Methods in Engineering》、《Mechanism and Machine Theory》、《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》和《Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: J Multi-body Dynamics》.其中《Multibody System Dynamics》创刊于 1997 年,是专门刊登多体系统动力学研究成果的期刊,其创刊主编是德国斯图加特大学的 Werner Schiehlen 教授(1996-2000 年期间担任 IUTAM 主席),目前的共同主编是国际著名多体系统动力学专家、葡萄牙 Jorge Ambrósio 教授.我国上海交通大学刘锦阳教授、北京大学刘才山教授是该刊的现任编委,北京理工大学胡海岩院士担任《ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics》杂志副主编.从统计数据看,在计算力学顶级期刊《International Journal for Numerical Methods in Engineering》与《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》上,刊出的多体系统动力学研究成果仍较少.

1.3 主要国际交流

1977 年, Kurt Magnus 教授在国际理论与应用力学联合会(International Union of Theoretical and Applied Mechanics, IUTAM)框架下发起召开了首次多刚体系统动力学研讨会^[23].此后 IUTAM 召开过许多次多体系统动力学研讨会.在 IUTAM 四年一度的世界力学家大会(International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, ICTAM^[24])上,曾有多位国际著名学者应邀就多体动力学研究进展作特邀报告^[25-27].2016 年,在加拿大蒙特利尔召开的第 24 届世界力学家大会上,我国北京理工大学胡海岩院士作了特邀报告“Soft Machines: Challenges to Computational Dynamics”^[28],介绍其学术团队在多柔体系统动力学框架下的软机器建模与仿真研究,这是我国学者首次在 ICTAM 上作动力学与控制研究领域的特邀报告.

2002年,日本学者磐城明星大学(Iwaki Meisei University)的Nobuyuki Shimizu教授在日本磐城发起召开了首届亚洲多体系统动力学会议(Asian Conference on Multibody Dynamics, ACMD),并担任首届亚洲多体系统动力学委员会主席。此后,ACMD每两年召开一次,现任亚洲多体系统动力学委员会主席是上海交通大学机械与动力工程学院王皓教授。2012年,我国上海交通大学成功主办第六届亚洲多体系统动力学会议。这是多体系统动力学领域的国际学术会议首次在我国召开,来自全球的学者共246人(其中外国学者111人)出席会议;我国北京理工大学胡海岩院士作了“Dynamic Modeling and Analysis of Rigid-Flexible Multibody Systems via Absolute Coordinate Based Method”大会特邀报告^[29]。2014年,第3届国际多体系统动力学会议与第7届亚洲多体动力学会议在韩国釜山联合召开。这是多体动力学领域中最具权威的两大国际会议首次联合召开,我国上海交通大学刘锦阳教授^[30]作了题为“Dynamic Modeling and Experiment Investigation of Rigid-flexible Coupling Multi-body Systems”的大会特邀报告。2018年,第九届亚洲多体动力学会议将在我国西安召开。

2003年,《Multibody System Dynamics》期刊现任主编之一、葡萄牙Jorge Ambrósio教授在葡萄牙里斯本发起召开了首届欧洲应用科学计算方法学会(European Community on Computational Methods in Applied Sciences, ECCOMAS)的多体系统动力学专题学术会议(ECCOMAS thematic conference on multibody dynamics),此后该会议每两年召开一次。2015年,第7届会议在西班牙巴塞罗那召开,收到论文149篇^[31],参会人数近300人,大部分来自欧洲。2017年6月,第八届会议将在捷克布拉格召开。

2003年,国际著名多体系统动力学专家、美国伊利诺伊大学芝加哥分校Ahmed A. Shabana教授发起成立了美国机械工程师协会多体与非线性动力学技术委员会(ASME Technical Committee on Multibody Systems and Nonlinear Dynamics, TC-MSND^[32])并担任该委员会首任主席。现任TC-MSND主席为美国威斯康星-麦迪逊大学的Dan Negrut教授。2005年,在美国加州长滩(Long Beach)正式召开首届ASME多体系统、动力学与控制会议(ASME Conference of Multibody Systems, Nonlinear

Dynamics, and Control, 1997年~2005年期间曾以“Multibody System Symposium”形式召开)^[33],大会主席为Ahmed A. Shabana教授。关于美国多体系统动力学的发展史,可参见文献[34,35]。

2010年,在芬兰召开了第1届国际多体系统动力学会议(The First Joint International Conference on Multibody System Dynamics)并成立了国际多体系统动力学学会(The International Association for Multibody System Dynamics, IMSD^[36]),该会议每两年召开一次。2016年,第4届国际多体系统动力学会议在加拿大蒙特利尔召开,参会代表超过300人。IMSD的首任主席是芬兰拉普兰塔理工大学(Lappeenranta University of Technology)的Aki Mikkola教授,现任主席为加拿大滑铁卢大学的John Mcphee教授。我国上海交通大学刘锦阳教授、北京大学刘才山教授曾多次担任IMSD的委员。2014年,IMSD正式被国际理论与应用力学联合会接收为其分支学术组织。国际多体动力学著名专家、德国斯图加特大学Peter Eberhard教授是唯一的IMSD-IUTAM理事^[37]。

1.4 该学科在中国的发展

我国在多体系统动力学领域的研究起步于上世纪80年代^[38],比欧美国家晚了近二十年。上海交通大学刘延柱教授^[39]与洪嘉振教授^[40]、北京航空航天大学黄克累教授^[41]与谢传锋教授^[42]、天津大学刘又午教授^[43,44]、吉林大学陆佑方教授^[45]、北京大学陈滨教授^[46]是我国该领域研究的主要发起者和开拓者。自上世纪90年代起,我国学者开始研究多柔体系统动力学。一方面,在国家自然科学基金等资助下从事多体系统建模和计算方法研究,在柔性部件大范围运动和变形相互耦合的截断阶次分析、柔性部件碰撞的高精度建模方法等方面取得进展。另一方面,针对我国航天、兵器、机械等工业领域的发展需求,编写程序开展多种装备的动力学仿真。

1984年,中国力学学会下属的一般力学专业委员会设立首届多刚体系统动力学专业组,组长由北京大学周起钊教授^[47]担任,这标志着我国多体系统动力学研究队伍初步形成。1986年,中国力学学会一般力学专业委员会在北京召开了“多刚体系统动力学研讨会”,18位学者作报告,共提交25篇论文^[38]。1988年,在吉林长春召开了“柔性多体系

统动力学”研讨会,邀请6位学者作报告;这次会议后被认定为第1届全国多体系统动力学会议。1992年,在上海交通大学召开了“多体系统动力学—理论、计算方法和应用学术会议”^[48]。该会议收到论文49篇,研究重点从多刚体系统转向多柔体系统。该会议后被认定为第2届全国多体系统动力学会议。1996年,由中国力学学会一般力学专业委员会与中国空间学会空间机械专业委员会联合在山东长岛召开了“全国多体系统动力学与控制学术会议”,会议收到论文43篇^[49];此次会议后被认定为第3届全国多体系统动力学会议。

进入21世纪以来,第4、5届全国多体系统动力学会议分别于2000年在大连理工大学、2004年在天津大学召开,这两次会议的注册代表人数均不到50人。自2009年起,多体系统动力学与航天动力学领域的学者每两年联合召开一次的全国性学术会议。2009年,“第六届全国多体系统动力学暨第一届全国航天动力学与控制学术会议”在山东青岛大学召开,参会代表超过100人。2011年,“第七届全国多体系统动力学暨第二届全国航天动力学与控制学术会议”在福州大学召开,收到学术论文摘要40余篇,注册代表70余人。2013年,为推动我国多体系统动力学的发展,由国家自然科学基金委员会数理科学部、中国力学学会动力学与控制专业委员会共同主办、青岛大学承办了为期7天“多体系统动力学高级讲习班”。讲习班邀请了13位知名专家作专题报告,内容涵盖多体系统动力学建模理论与方法、多体系统动力学模型数值算法、多体系统动力学软件及其应用等方面。来自全国的中青年学者与研究生共160余人参加讲习班,使多体系统动力学研究获得进一步推广。同年,“第八届全国多体系统动力学暨第三届全国航天动力学与控制学术会议”在南京理工大学召开,注册代表100余人,共收到学术论文摘要近90篇。

近年来,我国多体系统动力学研究队伍逐渐扩大。目前,该领域研究人员总人数约占动力学与控制领域研究人员总人数的20%。2015年,“第九届全国多体系统动力学暨第四届全国航天动力学与控制学术会议”在武汉华中科技大学召开,收到论文摘要130余篇,注册代表超过150人。2017年,第十届全国多体系统动力学暨第五届全国航天动力学与控制学术会议将在山东青岛大学召开。现任第

十届动力学与控制专业委员会多体动力学与控制专业组组长是北京大学刘才山教授。

目前,我国从事的多体系统动力学研究的主要高校有(按地域排列):清华大学^[50-54]、北京大学^[17,55]、北京航空航天大学^[56,57]、北京理工大学^[11,58,59]、北京信息科技大学^[60]、哈尔滨工业大学^[61-64]、大连理工大学^[65-68]、上海交通大学^[15,16,39,40,69-75]、南京理工大学^[18,76-79]、青岛大学^[80,81]、福州大学^[82,83]、华中科技大学^[84,85]、西北工业大学^[86-88]等。

2 多柔体系统动力学方程的高效求解

2.1 微分-代数方程组求解算法

多柔体系统的动力学方程通常为如下微分-代数方程组(Differential-Algebraic Equations, DAEs)^[40,80,89]

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{F}(\mathbf{q})+\mathbf{D}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+P_1\Phi_q^T\lambda+P_2\Phi_q^T\Phi-\mathbf{Q}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=0 \\ P_1\Phi(\mathbf{q},\mathbf{t})=0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 \mathbf{M} 是质量矩阵,如果采用自然坐标方法^[90]或者绝对节点坐标方法^[10-13]描述多柔体系统,则该矩阵是常数,便于高效计算; \mathbf{q} 是广义坐标向量, \mathbf{F} 是柔性构件的内力向量, \mathbf{D} 是阻尼力向量, Φ 是约束向量, Φ_q 是约束向量关于广义坐标向量 \mathbf{q} 的偏导数矩阵, λ 是拉格朗日乘子向量, \mathbf{Q} 是广义外力向量。 P_1 和 P_2 分别是为保持数值稳定而引入的约束方程比例因子和惩罚因子^[91,92]。

DAEs的复杂程度通常用其指标(index)或称微分指标(differentiation index)来衡量^[93],它表示为了把DAEs转换为一阶常微分方程组(Ordinary Differential Equations, ODEs)需要将式(1)中代数方程组的部分项或者全部项对时间微分的次数。根据此定义,式(1)为index-3的DAEs。许多学者投身于对DAEs求解算法的深入研究。潘振宽等^[80]系统地总结了求解DAEs方程的传统增广法、缩并法的特点。Shabana等^[94]系统总结了用于求解多体系统大变形动力学问题的算法。对于描述多体系统的DAEs,常用求解算法有:Baumgarte算法^[95],Newmark算法^[96],HHT算法^[97],广义-alpha算法^[98]等。张雄与王天舒^[99]比较了以上算法的效率、精度以及耗散特性。值得指出的是,带数值耗散Newmark

方法会使系统低频响应过分被耗散,导致求解精度大幅降低^[100]。另外,近年来提出的求解描述结构动力学问题的常微分方程组 (Ordinary Differential Equations, ODEs) 算法^[101-104] 也可以进行发展,用于多柔体系统动力学问题的 DAEs 求解。

图 1 给出了方程(1)的求解总体流程。DAEs 的求解算法方法总体上可分为两类:一是首先采用降指标方法^[105-108]、广义坐标分离方法^[109-111]、增广拉格朗日方法^[112,113]等,将 DAEs 转换为 ODEs,然后采用隐式或显式数值算法(如:Rung-Kutta 算法、BDF 算法)求解 ODEs。如果采用隐式算法,那么在迭代过程中需进一步采用 Newton-Raphson 迭代(以下简称牛顿迭代)来求解一高维非线性代数方程组,以获得未知变量的增量。二是可通过数值差分方法直接将 DAEs 离散为非线性代数方程组,进一步采用牛顿迭代解此高维非线性代数方程组,获得未知变量的增量。

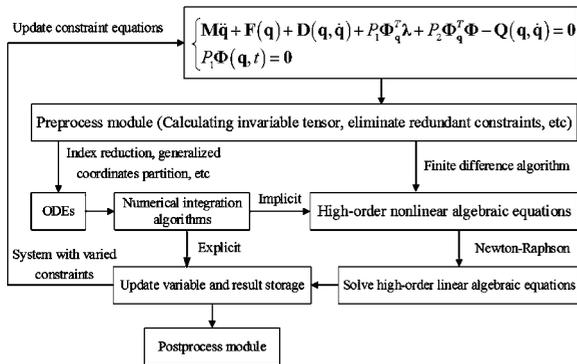


图 1 DAEs 求解的总体流程

Fig.1 Flowchart of the solution process for DAEs

在解非线性代数方程组的牛顿迭代过程中,需要计算残差向量对广义坐标的偏导数矩阵,即系统的 Jacobi 矩阵。推导便于高效计算的 Jacobi 矩阵解析公式需要具备扎实的连续介质力学与有限元基础^[114-116],张量代数的运算较为复杂^[117,118],有时甚至需要借助符号运算软件。当然,也可采用数值方法(如差分或自动微分方法^[119])计算上述 Jacobi 矩阵,甚至还可采用在迭代过程中不计算 Jacobi 矩阵的算法^[120,121]。但是这些方法在数值稳定性、计算精度与效率等方面均不如直接通过 Jacobi 矩阵的解析公式进行计算。刘铨等^[59,122,123]推导了多种绝对节点坐标有限元的弹性力及其 Jacobi 矩阵的高效解析计算格式,采用数值耗散可控的 generalized-

α 算法(属于上述第 2 类方法)求解多柔体系统动力学方程,其具体计算流程如图 2 所示。关于 generalized- α 算法的参数及详细迭代过程描述,可参见文献[98,118,123]。由图 2 可见,对于高维多柔体系统,牛顿迭代过程中的线性代数方程组求解效率决定着整个 DAEs 的求解效率。不同单元弹性力及其 Jacobi 矩阵的计算可采用简单的 OpenMP 指令并行化^[123,124]。需要指出的是,对于某些含可能发生屈曲构件的多柔体系统,采用经典的牛顿迭代法并不能正确追踪这些构件的动响应历程,而会产生“snap-through”问题。在求解 DAEs 的过程中,引入弧长法可以有效解决这类问题,但计算效率会大大降低^[125]。

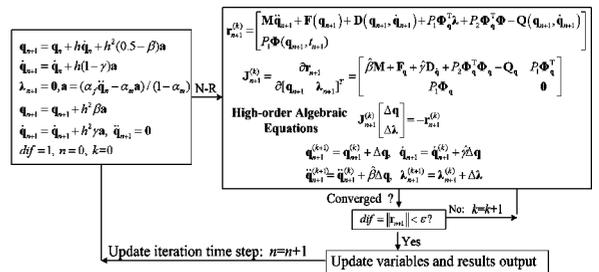


图 2 广义-alpha 算法计算流程

Fig.2 Flowchart of the calculation process for generalized-alpha algorithm

另外,相对于多刚体系统动力学方程,方程(1)中柔性构件的材料非线性(如弹塑性、粘弹性、超弹性等)^[114,115]会直接导致计算方程中 F 和 D 的困难。另外,随着工程问题的复杂化、大型化,方程(1)的维数一般非常高,可达数万甚至数十万阶。从总体上看,可从以下三个方面提高 DAEs 的求解效率:一是基于计算连续介质力学理论^[114,115]、有限元理论^[116]、张量分析^[117]等基础知识推导、建立方程各项的高效计算格式。二是利用现代并行计算技术^[123,126-128]、基于稀疏矩阵格式的数据操作(如查找、排序、四则运算等)技术^[129-131]等发展高效并行算法。三是发展高维多柔体系统的降维方法,如基于模态阶段的降维方法^[132-134]、基于本征正交分解(Proper Orthogonal Decomposition, POD)的降维方法^[135-137]、系统撕裂-拼装算法^[138,139]等。

2.2 高维线性代数方程组的降维与并行递归算法

为提高牛顿迭代过程中的线性代数方程组的求解效率, Li 等^[139]首先基于区域分解方法将高维多柔体系统拆分(可在运动副或者单元节点处实

施)为若干互相独立的子系统,然后采用静力缩聚法(又称 Schur 补方法)^[140,141]对每个子系统的内部广义坐标和拉格朗日乘子进行缩聚,仅保留边界变量(边界广义坐标和边界拉格朗日乘子),降低子系统本身的维数;然后,进一步采用多层区域分解方法将边界变量做进一步子系统划分、内部自由度缩聚,直到获得“界面问题”,即最简化的线性代数方程组,也称“interface problem”^[141],从而形成了一种高维线性代数方程组的多层递归并行算法。下面简述该并行递归算法的思想,详细过程可参见文献[139]。

(1) 静力缩聚法基本思想

对于任意子结构,其有限元静力平衡方程如下:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{ii} & \mathbf{K}^{ib} \\ \mathbf{K}^{bi} & \mathbf{K}^{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^i \\ \mathbf{U}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^i \\ \mathbf{R}^b \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中 \mathbf{U}^i 和 \mathbf{U}^b 分别是子结构内部节点(上标 i)和边界节点(上标 b)的位移向量。 \mathbf{K}^{ii} 、 \mathbf{K}^{ib} 、 \mathbf{K}^{bi} 和 \mathbf{K}^{bb} 分别是结构刚度矩阵 K 的子矩阵, \mathbf{R}^i 和 \mathbf{R}^b 分别是载荷向量的内部和边界分块向量。由于结构内部节点和其它结构无关,故这些节点的坐标可以缩聚掉。由式(2)可得到 \mathbf{U}^i 的缩聚变换:

$$\mathbf{U}^i = (\mathbf{K}^{ii})^{-1}(\mathbf{R}^i - \mathbf{K}^{ib}\mathbf{U}^b) \quad (3)$$

将式(3)代入式(2),得到缩聚后该子结构的静力平衡方程:

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{U}^b = \bar{\mathbf{F}} \quad (4)$$

其中,

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}^{bb} - \mathbf{K}^{bi}(\mathbf{K}^{ii})^{-1}\mathbf{K}^{ib} \\ \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{R}^b - \mathbf{K}^{bi}(\mathbf{K}^{ii})^{-1}\mathbf{R}^i \end{cases}$$

式中 $\bar{\mathbf{K}}$ 称为边界变量 \mathbf{U}^b 的 Schur 补,故静力缩聚法也称“Schur 补”方法。显然,式(4)的维数比式(2)要低很多,对于高维系统更是如此。因此,可先求解式(4)得到边界节点的位移 \mathbf{U}^b ,然后将计算结果回代入式(3),得到内部节点的位移 \mathbf{U}^i 。显然,对于图 2 所示求解 DAEs 过程中的线性代数方程组,也可采用该方法进行降维处理,从而大幅提高计算效率。

(2) 多体系统内部变量的缩聚

复杂的多柔体系统可在单元节点或运动副处人为拆分,形成多个子系统。对于图 2 所示牛顿迭代过程中的系统线性代数方程组,可由拆分后的所有子系统拼装为如下方程:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_2 \Lambda_k^T \Lambda_k & P_1 \Lambda_k^T \\ P_1 \Lambda_k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_k \\ \Delta \lambda_k \end{bmatrix} = -\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k^r \\ \mathbf{F}_k^c \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中 \mathbf{A} 表示对系统进行组装,下标 k 表示子系统号, $\Delta \mathbf{q}_k$ 和 $\Delta \lambda_k$ 分别表示第 k 个子系统的广义坐标增量与拉格朗日乘子增量。式(5)中的所有矩阵或向量都可由图 2 中线性代数方程组对应的各项表达出来,详见文献[139]。对于第 k 个子系统,将变量增量分为内部变量与边界变量增量变化方程的表达式,得到:

$$\begin{bmatrix} \Theta_k^{ii} & \Theta_k^{ib} \\ \Theta_k^{bi} & \Theta_k^{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{q}}_k^i \\ \Delta \bar{\mathbf{q}}_k^b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k^i \\ \mathbf{F}_k^b \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中 $\Delta \bar{\mathbf{q}}_k^i$ 和 $\Delta \bar{\mathbf{q}}_k^b$ 分别表示第 k 个子系统内部变量(包括内部广义坐标与内部拉格朗日乘子)的增量与边界变量(包括边界广义坐标与边界拉格朗日乘子)的增量。式(6)中所有矩阵及向量均可由式(5)对应的项通过推导表达出来。

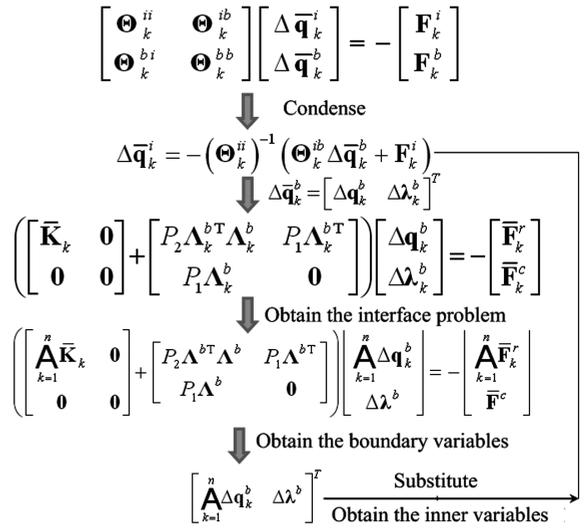


图 3 高维多体系统的变量缩聚、界面问题生成及求解流程
Fig.3 Variable condensation, interface problem generation and solution flow for high-dimension multibody system

如图 3 所示,按照静力缩聚思想对式(6)进行内部变量缩聚,可以得到第 k 个子系统边界变量的线性代数方程组。值得注意的是:各子系统是从最初的多体系统拆分而成,相互之间存在约束关系,故单个子系统的线性代数方程组无法独立求解。如图 3 所示,通过在拆分处引入各子系统之间的约束方程及对应的拉格朗日乘子,对所有子系统进行组

装,便可获得可求解的、仅含系统边界变量增量的线性代数方程组(也称界面问题).通过求解界面问题,可以获得各子系统边界变量的增量,将其进行并行回代,可获得各子系统内部变量的增量.这样就可获得图2所示原DAEs求解过程中高维线性代数方程组的全部解.对于界面问题,可利用多种开源求解器程序包来处理,如skyline求解包^[116]、HSL求解包^[142]、PARDISO求解包^[143]和IntelMKL^[144]等.

(3) 多层递归并行算法

为了降低图3中界面问题的维数,可进一步构建基于多层区域分解的递归算法.如图4所示,首先将高维多柔体系统划分为 n 个子系统,记为第一

层网格($h=1$).经过静力缩聚只留下每个子系统的边界变量,记为第二层网格($h=2$).对第二层网格,可进一步进行子系统划分,使每个子系统由第一层网格的若干子系统组成.故在第二层网格中,每个子系统的刚度矩阵可由第一层网格中相应子系统刚度矩阵的边界项组装得到.以此类推,可以创建第三层、第四层...第 m 层网格,从而使最后一层网格($h=m$)的界面问题维数大幅降低.许多线性代数方程求解器^[142-144]均可高效获得最后一层的界面问题的解,再将界面问题的结果进行并行回代,便可获得系统所有变量的增量.另外,不同层变量缩聚过程并不求解任何方程组,仅是矩阵或向量之间的运算,这些运算也很容易实现并行化.

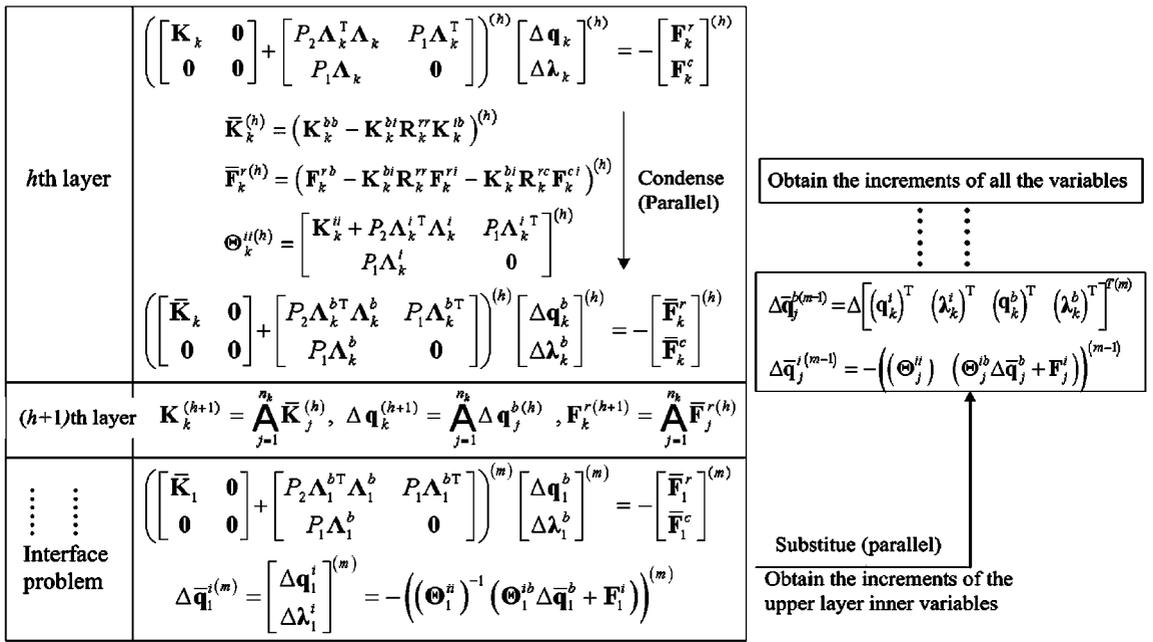


图4 基于多层区域分解的递归算法

Fig.4 The multi-level recursive domain decomposition algorithm

Li 等^[139]通过对该算法的复杂度分析研究表明,该多层网格并行递归算法的算法复杂度为 $O(N^{1.5})$,其中 N 为多柔体系统的单元节点坐标总数.如图5所示,针对同一算例,当系统的节点坐标数少于 10^8 时,该算法的计算效率比 Serban 等^[145]提出的 BiCGStab2-SPIKE 算法效率要高很多.

3 多柔体系统接触/碰撞动力学

3.1 接触/碰撞动力学模型研究

根据相互接触物体的动量变化情况,可将接触过程分为碰撞、连续接触两种状态.物体发生碰撞

时,其动量会出现瞬时突变;而物体发生连续接触时,其动量呈现连续变化^[146].对于某些多柔体系统,如空间网架式卫星展开天线、自旋展开太阳帆、柔性抓取机械臂、软体机器人等,为了实现特定功能,其部件不可避免地要与周围环境或自身发生接触/碰撞.多柔体系统碰撞动力学的主要研究方法及早研究进展可参见文献[17,56,63,70].对柔体进行接触碰撞动力学分析,首先要建立能反映碰撞过程的接触/碰撞力模型.主要采用两种方法计算多柔体间的接触/碰撞法向力^[147],即:罚函数方法和非光滑动力学方法.

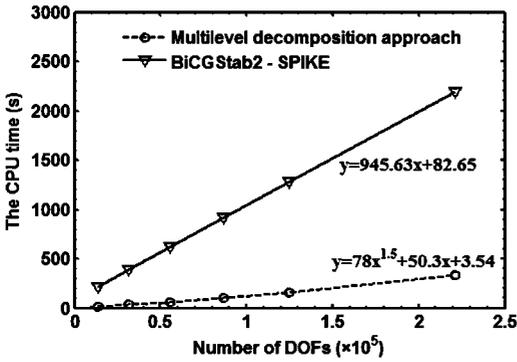


图5 对于具有不同节点坐标数的多柔体模型采用并行递归算法和并行 BiCGStab2-SPIKE 算法仿真 1s 所需的 CPU 时间对比
Fig.5 Computation CPU time comparison for flexible multibody systems with different DOFs using parallel recursive algorithm and BiCGStab2-SPIKE algorithm

罚函数方法通过建立能反映接触过程中接触界面相互嵌入、局部变形、能量耗散等特性的法向接触力罚函数,将其作为外力引入多柔体系统动力学方程(1)进行求解。罚函数方法假设,物体界面在接触过程中能相互穿透,需要在数值迭代过程中计算穿透量及穿透速度。但事实上,物体界面在接触过程中并不发生相互穿透。另外,已提出的法向接触力模型都有各自的适用范围^[148-150],对同一个问题选择不同的接触模型可能得到不同的计算结果,应用时需要特别注意接触模型的选择。

在非光滑动力学方法中^[56,151-155],假定接触界面不可穿透,接触过程瞬时完成,作用在物体上的接触力是系统运动状态变量的非光滑函数,即函数或其导函数是状态变量的非连续函数或分段连续函数。通过单边约束条件,可计算接触力以确保接触界面的不可穿透条件。对于非光滑多体系统接触/碰撞动力学模型,可采用线性或非线性互补问题 (Linear/Nonlinear Complementarity Problem, LCP/NCP) 和微分变分不等式 (Differential Variational Inequality, DVI) 描述。相对于 DVI 方法,互补问题公式推导与程序实现较为简单。Chen 等^[156]针对存在单边约束与双边约束的非光滑多柔体系统,提出了非光滑 generalized- α 求解算法。其研究表明,该方法比广泛应用于非光滑动力学补问题求解的 Moreau - Jean 算法具有更好的精度。Brüls 等^[157]将 Gear-Gupta-Leimkuhler (GGL) 条件引入 DAEs,进一步发展了非光滑 generalized- α 算法,并提出了 Nonsmooth- α GGL 算法,可使求解结果在位

置与速度水平上同时严格满足互补条件。DVI 方法计算效率较基于 LCP 的算法高,且易实现并行化。Tasora 等^[158,159]采用 DVI 方法建立了数十万个粒子的摩擦接触非光滑动力学模型,利用 GPU 并行计算技术实现了高效计算。关于 DVI 方法的更多复杂工程应用,可参见美国学者 Dan Negrut 教授实验室发布的信息 (<http://sbel.wisc.edu/>)

3.2 含间隙运动副的多柔体系统动力学

由于加工误差、装配需要、磨损等原因,多柔体系统的运动副含有不可避免的间隙。运动副间隙会引起系统的振动、冲击和噪声,加速磨损,降低效率和工作精度。基于 3.1 中的两类方法,众多学者开展了含间隙运动副的多柔体系统动力学建模、计算与实验研究^[50,51,56,160-164]。Web of Science 数据库统计显示:以“clearance joint”为主题的论文已有 1500 余篇。含运动副间隙的多柔体系统不仅呈现出柔体大范围运动和其变形的耦合特征,还呈现多时空尺度耦合特征,即系统的大尺度范围运动与间隙内运动副元件的微小尺度运动的相互耦合,以及系统的长时间尺度运动与含间隙运动副在极短时间尺度内的碰撞过程耦合。这些耦合特性致使对系统动力学方程求解只能用采用微小时间步长进行。所以,至今仅能对含少量间隙运动副的多柔体系统进行动力学分析。例如, Liu 等^[165]基于绝对节点坐标方法对具有 6 个含间隙转动副(4 个潜在碰撞点)的柔性空间机械臂进行时间为 20 秒的动力学仿真,计算时间超过 10 个小时。对于含数十个、甚至上百个间隙运动副的多柔体系统动力学问题,目前尚无好的计算方法。

为了减少运动副磨损、提高机构使用寿命,人们通常采用润滑剂来消除或减少间隙运动副内的直接碰撞或称为干碰撞(Dry Impact)。因此,考虑润滑特性的含间隙多柔体系统动力学研究对实际工程设计具有重要意义。在不考虑轴瓦变形的假设下,学者们已提出多种运动副液动力润滑力解析或数值模型^[166-169]。对含液动力润滑模型的多柔体系统动力学求解的主要思路是:通过求解多柔体系统的 DAEs,获得润滑运动副元件的相对位置、速度结果,代入解析或数值润滑模型计算获得润滑力,再转换为广义外力回代到多柔体系统的 DAEs 求解,进而获得多柔体系统的动力学响应。与干碰撞问题的研究不同,考虑润滑条件以后的运动副元件可在

完全润滑状态、干碰撞状态、边界润滑状态之间相互切换.因此,在求解 DAEs 过程中还需嵌入描述运动副润滑状态的切换模型^[170,171].Daniel 等^[172]研究发现,润滑剂压力积分边界(轴瓦坐标系下润滑剂压力为零的角度)对于液动力润滑模型计算结果的影响极大;基于 Sommerfeld 或者 Gumbel 边界条件的液动力润滑力解析模型计算结果,不能与润滑剂 Reynolds 方程的数值解吻合.

对于高速、重载机械设备,运动副润滑剂的油膜压力会导致运动副轴瓦变形,而轴瓦变形又会进一步降低润滑剂油膜压力,最终导致轴承的承载能力降低^[173].因此,考虑轴瓦变形与润滑剂压力场耦合条件下的弹流润滑运动副研究是摩擦学领域的研究热点.例如,人们非常关注人工弹流润滑髋关节模型的研究^[174,175].由于摩擦学领域的研究主要针对单个运动副本身,不能得到多柔体系统与弹流润滑运动副之间的耦合动力学特性.因此,对弹流润滑多柔体系统动力学的主要求解思路类似于求解液动力润滑多柔体系统动力学问题.由于单个弹流润滑运动副的自由度非常高,且要在求解多柔体系统的 DAEs 过程中嵌入复杂的数值方法迭代求解润滑剂的压力场.因此,具有弹流润滑运动副的多柔体系统动力学的研究难点在于,提出便于高效计算的、考虑大范围运动的弹流润滑运动副模型.

田强等^[176,177]提出了基于 ANCF 的弹流润滑圆副与球铰模型,其中弹流润滑球铰模型可望应用于含弹流润滑人工髋关节的人体骨架动力学问题研究.事实上,目前绝大多数^[166-169,176,177]关于具有液动力润滑或弹流润滑运动副的多柔体系统动力学问题求解过程均是一种步进式、交互式过程,即在描述多柔体系统的 DAEs 与描述润滑剂的 Reynolds 方程联立求解过程中,单独求解其中一个方程,再将结果代入另一个方程后求解,反映润滑剂和运动副之间的“弱耦合”效应.Yang 和 Laursen^[178]基于 mortar 方法提出一种新颖的弹流润滑空间旋转运动副的“强耦合”模型,可使得润滑剂压力场与柔性轴瓦有限元模型能联立求解,为弹流润滑运动副的研究开辟了新途径.

3.3 软机器的接触/碰撞动力学

近年来,软体手术机器人、软体仿生机器人、软抓取机构等软机器引起人们广泛关注^[28,179-182].这类软机器对复杂环境具有很强的适应能力,可望成

功应用于医疗、装配、探测等领域.软机器的主要部件由杨氏模量小于 1GPa 的各种软材料组成^[180],可通过主动或被动(或者两者结合)变形,实现不同形态的运动、越过障碍物或者穿过比自身常态尺寸小的缝隙,进入传统刚性机器无法进入的空间.软机器在工作过程不仅会呈现出系统或部件的大范围运动与大变形的耦合,还会与周围物体甚至自身发生接触/碰撞,产生黏滑、缠绕、打结等复杂动力学行为.软机器的接触/碰撞动力学特性不仅会极大地影响其整体性能(如攀爬/穿越速度、抓取稳定性、定位精度等),还可能导致整个系统的失效(如卡死、打结等).然而,目前对软机器的研究主要集中于研发新材料和软机器原型设计,极少关注软机器与环境或自身的接触/碰撞动力学问题^[180,182].

现有的多体系统接触/碰撞动力学研究主要局限于多刚体系统或具有小变形的多柔体系统^[17,56,63,70,183].Wang 等对基于 ANCF 描述的大变形刚性截面绳索系统进行了接触、碰撞、缠绕与打结过程动力学研究,但计算结果尚未反映出绳索接触区域的截面变形、绳索打结后的摩擦自锁现象^[184,185].目前,软机器接触/碰撞动力学研究面临的主要挑战如下:一是软部件间的多区域接触界面会产生持续的大变形与大滑移现象,而已有的柔体法向接触力模型主要适应小变形柔体之间的接触力计算,能否应用于具有大变形柔体间的接触力计算需要进一步研究.二是传统有限元方法对低曲率、小变形接触界面可进行较为精确的逼近,但对于高曲率、大变形的柔体进行接触分析时,会造成接触界面的非光滑性,导致接触力计算产生伪振荡,计算结果误差过大、甚至完全错误.三是采用传统有限元方法进行接触分析时,需要追踪接触点在单元边界上的位置,一旦接触点进入一个新单元,就需要更新单元信息,这无疑会降低计算效率.四是采用传统有限元方法进行接触分析时,部件的大范围运动与大相对滑移会造成非协调离散单元之间的接触^[186],对保证接触力的计算精度、效率与稳定性带来很大困难.五是虽然人们已提出很多摩擦模型来刻画多体接触时的摩擦效应^[187,188],但至今对摩擦问题的认识仍不够深刻,很多摩擦机理尚未发现,乃至国际著名期刊《Nature》上还持续报道关于摩擦的研究进展^[189-191].因此,考虑摩擦效应的软机器接触动力学问题需要作进一步深入研究.

3.4 多柔体不确定性接触/碰撞动力学

由于制造和测量误差、材料的不均匀性、环境变化等因素均会导致多柔体系统动力学模型的参数具有不确定性。对于接触/碰撞动力学问题而言,摩擦系数、碰撞模型参数(刚度系数、恢复系数等)、材料本构参数、运动副间隙尺寸等均具有不确定性。研究表明^[192]:如果将这些不确定性参数人为地作为确定性参数,则对真实物理模型的极大简化与粗化,会得出不合理或矛盾的结果。2006年,美国能源部 Sandia 国家实验室就将不确定性结构动力学建模与量化分析作为结构动力学研究领域极具挑战的问题之一,邀请了相关领域著名学者进行了专题研究,成果集中发表在计算力学研究领域的顶级期刊《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》的专刊上^[193]。在这些不确定性结构动力学研究中,并不需要考虑结构的大范围运动与其变形之间的耦合问题,也没有考虑多柔体系统接触/碰撞动力学研究涉及的多尺度问题。如果多柔体系统的接触/碰撞动力学涉及到不确定性接触参数,其研究面临更多挑战。为发展不确定性多柔体系统动力学研究新方法,2014年 IUTAM 在德国斯图加特召开了“Dynamical Analysis of Multi-body Systems with Design Uncertainties”专题研讨会^[194]。

不确定性参数的描述方法主要包括^[195]:概率方法、模糊方法和凸集方法。概率方法是目前工程中进行不确定性问题分析的主流方法。该方法基于概率论将不确定性参数视为随机变量,对问题进行建模与分析,需要大量的观测数据以确定随机变量的概率密度。模糊方法基于模糊集理论来描述不确定性参数,需要知道不确定性参数的隶属度函数。隶属度函数的确定有时比概率密度函数的确定更为困难,主观选择性较强。因此,模糊方法获得的模糊解集可能并不唯一,易导致分析结果不可靠。另外,概率方法与模糊方法的计算效率均较低^[196]。凸集方法将不确定性参数视为在具有已知边界凸集合内取值的未知变量,得到的计算结果是包含可行解集的一个最小集。这类方法主要包括^[195]:凸模型方法与区间方法。当不确定参数的变化范围不是凸集时,凸模型方法将失去效用,故其适用范围有限。区间方法采用区间数描述不确定性参数,按照区间算术来计算系统的响应区间,计算效率比概率方法、

模糊方法要高,为研究不确定性问题开辟了新途径。但该方法适用于处理模型统计信息不足以描述不确定性参数的概率分布或隶属度函数,仅知道其边界值的不确定性问题^[197],是概率方法与模糊方法的一种很好的补充方法。区间方法的主要不足是^[198]:区间数的相关性(Interval Dependency)会导致经区间算术运算得到的区间比真实结果范围要大,及发生区间扩张,甚至还会造成误差爆炸(Error Explosion)问题,得到没用的结果。此外,随着不确定性区间参数的增加,计算所需的不确定性信息较多,计算效率也会随之大幅降低。

很多学者已对具有不确定性参数的多体系统动力学问题进行了研究,例如,Sandu 等^[199,200]利用多项式混沌理论分析了含不确定参数的多刚体系统动力学问题。Wasfy 等^[199]将系统的材料属性和外载荷定义为具有三角形隶属函数的模糊参数,用 α -截集法对这些模糊参数进行处理,获得了柔性航天器的动响应。Wu 等^[202]提出了不确定性区间函数的 Chebyshev 扩展形式,研究了具有区间参数的简单平面多刚体系统(如单摆、曲柄滑块机构)的动力学问题。Wang 等^[203]研究了具有6个不确定性区间长度参数的六连杆柔性空间机械臂动力学问题,这是区间方法首次在多柔体系统动力学问题上的应用。当然,上述研究尚未涉及接触/碰撞动力学问题。在多柔体系统动力学框架下考虑不确定性接触参数的接触/碰撞动力学研究,至今鲜有文献报道^[204]。

4 柔性空间结构展开动力学研究

近年来,我国航天科技发展迫切需要掌握柔性空间结构在轨展开技术,以满足卫星通信、天基对地观测、深空探测等重大需求^[58,205]。这类空间结构展开尺度大、柔软部件多、构形复杂,其展开过程会呈现系统大范围运动与柔软部件大变形之间的非线性耦合动力学。美国、俄罗斯等国在其航天任务中,曾发生多起结构展开失败。由于这类结构的展开动力学地面实验难度大、无法完全抵消重力影响,故其展开过程的动力学数值模拟是确保结构在轨展开成功的关键技术。

基于 ANCF 的非线性有限元能精确描述柔体大范围运动和大变形的相互耦合动力学。采用 ANCF 对具有不同构形的空间结构柔性部件进行描

述,需要建立相应的 ANCF 有限元.Liu 等基于连续介质力学理论分别建立了薄膜^[59]、ANCF 曲梁/壳^[122]、复合材料层合板单元^[123],拓展了基于 ANCF 描述柔性部件的类型,为研究空间结构展开动力学奠定了基础.目前,ANCF 有限单元已经较为丰富与完善^[11-13].

基于 ANCF 描述含柔软部件的大型空间结构展开过程,其 DAEs 的维数极高,可达数十万个自由度;而需要模拟的时间历程可长达数十分钟,现有的多体系统动力学商业软件无法对这类问题进行动力学模拟.因此,我国航天研究院所长期缺少有效的柔性空间结构展开动力学模拟软件.因此,高维多柔体系统动力学方程 DAEs 的高效、精确求

解和工程化软件成为解决柔性空间结构在轨展开动力学模拟的关键.

如图6所示,Li 等^[139]采用所提出的并行递归算法研究了一个基于 ANCF 描述的、具有近 20 万个广义坐标的卫星环形天线反射器的展开动力学问题.展开过程的时间为 500 秒,计算时间近 78 小时.详细的建模与计算过程可参见文献[139].如图7^[204]所示,Yu 等^[206,207]对 ANCF 描述的 87 跨空间索杆铰接式伸展臂的伸展过程动力学进行了模拟.该模型具有 1 万多个广义坐标,整个伸展过程为 1210 秒且伴随复杂的接触动力学问题,计算耗时近 60 小时.Tang 等^[208]提出了一种变长度 ANCF 绳索单元,利用该单元研究了绳系多星系统动力学问题.

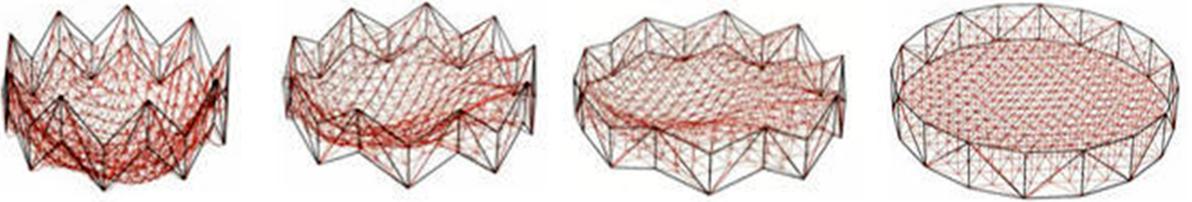


图6 环形桁架天线反射器展开过程的动力学模拟

Fig.6 Simulation of the hoop truss antenna deployment process

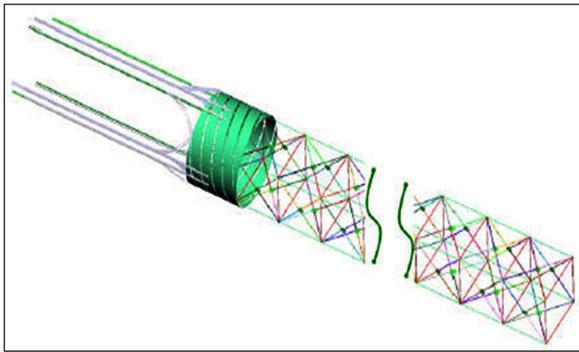


图7 具有 87 跨的空间索杆式伸展臂的动力学模型

Fig.7 The able deployable articulated mast (ADAM) model with 87-bay

Liu 等^[59]对图8所示的六边形太阳帆自旋展开过程进行了 ANCF 建模和动力学模拟.与图6所示的环形桁架式结构相比,薄膜结构只有微小的抗弯曲刚度,其运动过程非常容易产生褶皱,而褶皱会极大地影响薄膜结构的静力学与动力学特性.因此,在 ANCF 单元中必须考虑薄膜结构的褶皱与松弛特性,才能获得正确的模拟结果.有趣的是,如果对褶皱的描述不准确,将直接影响太阳帆展开过程模拟的结果,即微小尺度的褶皱与宏观尺度的展开动力学呈现出跨尺度耦合效应.

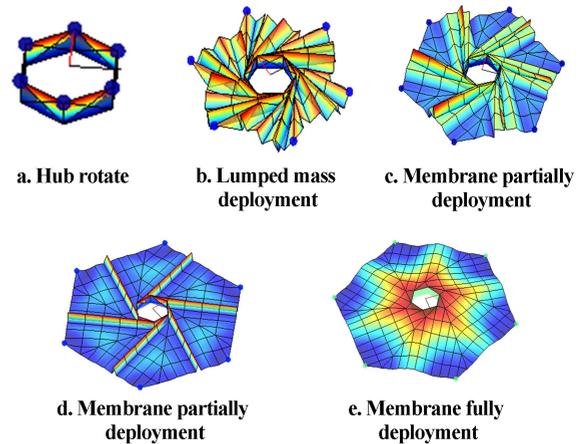


图8 太阳帆薄膜结构自旋展开动力学模拟

Fig.8 Simulation of a solar sail spinning deployment process

Adler 等^[209]将褶皱分为两类:材料褶皱与结构褶皱.前者是材料初始缺陷造成的永久性褶皱,后者是薄膜结构局部屈曲导致的褶皱.他们指出,采用薄壳单元对薄膜结构进行建模分析时,需要划分非常精细的网格才能反映出褶皱变形,但这将导致计算效率低下.因此,采用该方法很难研究大型薄膜结构的展开过程.为了提高计算效率,分析薄膜褶皱时可采用张力场理论(Tension Field Theory)^[210,211],

通过修正褶皱单元的本构关系或者变形梯度来模拟褶皱.虽然该方法不能得到褶皱的波长、幅值及数量等信息,但可高效地预测薄膜结构的褶皱区域,因此被广泛应用于薄膜结构的褶皱分析.

事实上,薄膜结构会展现出非常复杂的力学行为,至今仍是固体力学研究领域的热点问题,在著名物理期刊《Physical Review Letter》也持续有研究报道^[212-214].若将这方面的研究与多柔体系统动力学相结合,不仅可发现新的科学规律,还能促进多柔体系统动力学去解决实际工程问题.

随着航天科技的进步,人们已逐步开始探索尺度达数百米的拼装式柔性空间结构^[215]、尺度达数公里的空间太阳能发电站^[216]、电磁连接可重构空间结构^[217,218]等新型空间结构.这些空间结构的动特性与控制设计需求无疑为多柔体系统动力学研究带来许多新的挑战,但同时也带来了新的发展空间.

5 结语

综上所述,近年来世界范围内的多柔体系统动力学取得了长足的进步,不仅在理论和方法研究中已形成了体系,而且成功解决了一批过去无法解决的工程问题,为工程师提供了可以信赖的数值仿真结果.

在该领域的未来研究中,应充分注意到多柔体系统动力学的学科交叉属性和学科应用属性.对于以“科学为导向”的学者而言,其未来研究需要充分借鉴固体力学、流体力学、控制理论、应用数学、计算数学等领域的最新研究成果,从该学科所重点关注的“柔体大范围运动与变形相互耦合”出发,积极探索新的建模方法、计算方法和实验方法,发现新机理、新规律,推动学科发展.对于“以问题为导向”的学者而言,高端工程装备、生物医学仪器甚至生活产品^[219]的研制都对多柔体动力学提出许多新的挑战,不仅要求发展解决问题的新方法,还需要不断积累和完善可处理工程问题的软件系统,并开展充分的实验研究.当然,对于具有较好研究积累的学术团队而言,更应该两者并重,使自己的研究成果既能“顶天”又能“立地”.

6 致谢

感谢多体系统动力学同行专家为此文提供的大量参考数据与修改建议!

参 考 文 献

- Müller P C. Kurt Magnus: a pioneer of multibody system dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2013, 30(2): 199~207
- http://www.nsf.gov.cn/publish/portal0/tab405/info50064.htm#_Toc442082189
- Shabana A A. Flexible multibody dynamics review of past and recent developments. *Multibody System Dynamics*, 1997, 1(2): 189~222
- Shabana A A. Uniqueness of the Geometric Representation in Large Rotation Finite Element Formulations. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2010, 5(4): 044501
- Ding J L, Wallin M, Wei C, et al. Use of independent rotation field in the large displacement analysis of beams. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 76: 1829~1843
- Shabana A A. ANCF Consistent Rotation-Based Finite Element Formulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016, 11(1): 014502
- Wasfy T M, Noor A K. Computational strategies for flexible multibody systems. *Applied Mechanics Reviews*, 2003, 56(6): 553~613
- Eberhard P, Schiehlen W. Computational dynamics of multibody systems history, formalisms, and applications. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2006, 1(1): 3~12
- Shabana A A. An absolute nodal coordinates formulation for the large rotation and deformation analysis of flexible bodies. Technical Report. No. MBS96-1-UIC, University of Illinois at Chicago, 1996
- Shabana A A. Definition of ANCF Finite Elements. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2015, 10(5): 054506
- 田强, 张云清, 陈立平等. 柔性多体系统动力学绝对节点坐标方法研究进展. *力学进展*, 2010, 40(2): 189~202 (Tian Q, Zhang Y Q, Chen L P, et al. Advances in the absolute nodal coordinate method for the flexible multibody dynamics. *Advances in Mechanics*, 2010, 40(2): 189~202 (in Chinese))
- Nachbagauer K. State of the art of ANCF elements regarding geometric description, interpolation strategies, definition of elastic forces, validation and the locking phenomenon in comparison with proposed beam finite elements. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2014, 21

- (3):293~319
- 13 Gerstmayr J, Sugiyama H, Mikkola A. Review on the absolute nodal coordinate formulation for large deformation analysis of multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2013,8(3):031016
 - 14 Bauchau O A, Laulusa A. Review of contemporary approaches for constraint enforcement in multibody Systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2007,3(1):011005
 - 15 洪嘉振,蒋丽忠. 柔性多体系统刚-柔耦合动力学. 力学进展, 2000,30(1):15~20 (Hong J Z, Jiang L Z. Flexible multibody dynamics with coupled rigid and deformation motions. *Advances in Mechanics*, 2000,30(1):15~20 (in Chinese))
 - 16 杨辉,洪嘉振,余征跃. 动力刚化问题的实验研究. 力学学报, 2004,36(1):118~124 (Yang H, Hong J Z, Yu Z Y. Experimental investigation on dynamic stiffening phenomenon. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2004,36(1):118~124 (in Chinese))
 - 17 刘才山,陈滨. 多柔体系统碰撞动力学研究综述. 力学进展, 2000,30(1):7~14 (Liu C S, Chen B. A global review for the impact dynamic research of flexible multibody systems. *Advances in Mechanics*, 2000,30(1):7~14 (in Chinese))
 - 18 芮筱亭,戎保. 多体系统传递矩阵法研究进展. 力学进展, 2012,42(1):4~17 (Rui X T, Rong B. Advances in transfer matrix method for multibody system dynamics. *Advances in Mechanics*, 2012,42(1):4~17 (in Chinese))
 - 19 Laflin J, Anderson K S, Khan I M, et al. Advances in the application of the divide-and-conquer algorithm to multibody system dynamics. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2014,9(4):041003
 - 20 Orlandea, N V. Multibody systems history of ADAMS. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016,11(6):060301
 - 21 <http://www.mscsoftware.com/product/adams>
 - 22 <http://www.functionbay.org/>
 - 23 Magnus K. Drehbewegungen starrer Körper im zentralen Schwerfeld. In: Proceedings of the 11th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 1964, Munich, Germany.
 - 24 陈杰,刘洋,汤亚南等. IUTAM 和 ICTAM 的起源和历程. 力学进展, 2012,42(1):100~108 (Chen J, Liu Y, Tang Y N, et al. The origin and progress of IUTAM and ICTAM. *Advances in Mechanics*, 2012,42(1):100~108 (in Chinese))
 - 25 Pfeiffer F. Multibody dynamics with multiple unilateral contacts. In: Proceedings of the 19th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 1996, Kyoto, Japan
 - 26 Ambrósio J. Multibody dynamics: bridging for multidisciplinary applications. In: Proceedings of the 21th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 2004, Warsaw, Poland
 - 27 Eberhard P. Particles: bridging the gap between solids and fluids. In: Proceedings of the 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 2012, Beijing, China
 - 28 Hu H Y, Tian Q, Liu C. Soft machines: challenges to computational dynamics. In: Proceedings of the 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, Montreal, Canada
 - 29 Hu H Y. Dynamic modeling and analysis of rigid-flexible multibody systems via absolute coordinate based method. In: Proceedings of the 6th Asian Conference on Multibody Dynamics, 2012, Shanghai, China
 - 30 Liu J Y, Liu Z Y, Hong J Z. Dynamic modeling and experiment investigation of rigid-flexible coupling multi-body systems. In: Proceedings of Thee 3rd Joint International Conference on Multibody System Dynamics & The 7th Asian Conference on Multibody Dynamics, 2014, Busan, Korea
 - 31 http://www.multibody2015.org/frontal/img/Ebook_Multibody_2015.pdf
 - 32 https://community.asme.org/ded_multibody_systems_nonlinear_dynamics/default.aspx
 - 33 <http://proceedings.asmedigitalcollection.asme.org/volume.aspx?volumeid=15712>
 - 34 Uicker J J. History of Multibody Dynamics in the U.S. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016,11(6):060302
 - 35 Shabana A A. An important chapter in the history of multibody system dynamics. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016,11(6):060303
 - 36 http://www.itm.uni-stuttgart.de/imsd/steering_committee.html
 - 37 <http://iutam.org/a-propos/iutam-general-assembly/>
 - 38 朱明. 多体系统动力学理论及应用研究动态. 南京航空航天大学学报, 1987,19(1):135~141 (Zhu M. Recent developments in the theories and applications of dynamics of multibody systems. *Journal of Nanjing Aeronautical Institute*, 1987,19(1):135~141 (in Chinese))
 - 39 刘延柱,洪嘉振. 多刚体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1989 (Liu Y Z, Hong J Z. Dynamics of rigid

- multibody systems. Beijing: Higher Education Press, 1989 (in Chinese))
- 40 洪嘉振. 计算多体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1999 (Hong J Z. Computational dynamics of multibody systems. Beijing: Higher Education Press, 1999 (in Chinese))
- 41 黄克累. 关于陀螺系统动力学. 力学情报, 1974, 4(2): 53~59 (Huang K L. On gyroscopic system dynamics. *Advances in Mechanics*, 1974, 4(2): 53~59 (in Chinese))
- 42 J. 维滕伯格(著), 谢传峰(译). 多刚体系统动力学. 北京: 北京航空学院出版社, 1986 (Wittenburg J, Xie C F. Dynamics of systems of rigid bodies. Beijing: Beijing Aeronautical Institute Press, 1986 (in Chinese))
- 43 休斯敦 R L, 刘又午. 多体系统动力学. 天津: 天津大学出版社, 1987 (Huston R L, Liu Y W. Dynamics of multibody systems. Tianjin: Tianjin University Press, 1987 (in Chinese))
- 44 刘又午. 多体动力学的休斯敦方法及其发展. 中国机械工程, 2000, 11(6): 601~607 (Liu Y W. Development of Huston's method on multibody dynamics. *China Mechanical Engineering*, 2000, 11(6): 601~607 (in Chinese))
- 45 陆佑方. 柔性多体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1996 (Lu Y F. Dynamics of flexible multibody systems. Beijing: Higher Education Press, 1996 (in Chinese))
- 46 陈滨. 分析动力学. 北京: 北京大学出版社, 1987 (Chen B. Analytical dynamics. Beijing: Peking University Press, 1987 (in Chinese))
- 47 周起钊. 柔性系统力学中的主要课题. 力学进展, 1989, 19(4): 464~476 (Zhou Q Z. Main topics of dynamics of flexible system. *Advances in Mechanics*, 1989, 19(4): 464~476 (in Chinese))
- 48 洪嘉振. 多体系统动力学—理论、计算方法和应用. 上海: 上海交通大学出版社, 1992 (Hong J Z. Dynamics of multibody systems: theory, computational method and application. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1992 (in Chinese))
- 49 洪嘉振, 贾书惠. 多体系统动力学与控制. 北京: 北京理工大学出版社, 1996 (Hong J Z, Jia S H. Multibody system dynamics and control. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996 (in Chinese))
- 50 阎绍泽, 向吴维凯, 黄铁球. 计及间隙的运动副和机械系统动力学的研究进展. 北京大学学报(自然科学版), 2016, 52(4): 741~755 (Yan S Z, Xiang W W K, Huang T Q. Advances in modeling clearance joints and dynamics of mechanical systems with clearances. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2016, 52(4): 741~755 (in Chinese))
- 51 Yan S Z, Xiang W W K, Zhang L. A comprehensive model for 3D revolute joints with clearances in mechanical systems. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 80: 309~328
- 52 沈文厚, 赵治华, 任革学等. 拦阻索冲击的多体动力学仿真研究. 振动与冲击, 2015, 34(5): 73~77 (Shen W H, Zhao Z H, Ren G X, et al. Multi-body dynamic simulation of impact on cross deck pendant. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(5): 73~77 (in Chinese))
- 53 Hong D F, Tang J L, Ren G X. Dynamic modeling of mass-flowing linear medium with large amplitude displacement and rotation. *Journal of Fluids and Structures*, 2011, 27(8): 1137~1148
- 54 胡景晨, 王天舒. 一种 $O(n)$ 算法复杂度的递推绝对节点坐标法研究. 力学学报, 2016, 48(5): 1172~1183 (Hu J C, Wang T S. A recursive absolute nodal coordinate formulation with $O(n)$ algorithm complexity. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(5): 1172~1183 (in Chinese))
- 55 Zhao Z, Liu C S. Contact constraints and dynamical equations in Lagrangian systems. *Multibody System Dynamics*, 2016, 38(1): 77~99
- 56 王琪, 庄方方, 郭易圆等. 非光滑多体系统动力学数值算法的研究进展. 力学进展, 2013, 43(1): 101~111 (Wang Q, Zhuang F F, Guo Y Y, et al. Advances in the research of numerical methods for non-smooth dynamics of multibody systems. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1): 101~111 (in Chinese))
- 57 Zhang J, Wang Q. Modeling and simulation of a frictional translational joint with a flexible slider and clearance. *Multibody System Dynamics*, 2016, 38(4): 367~389
- 58 胡海岩, 田强, 张伟等. 大型网架式可展开空间结构的非线性动力学与控制. 力学进展, 2013, 43(4): 390~414 (Hu H Y, Tian Q, Zhang W, et al. Nonlinear dynamics and control of large deployable space structures composed of trusses and meshes. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(4): 390~414 (in Chinese))
- 59 Liu C, Tian Q, Yan D, et al. Dynamic analysis of membrane systems undergoing overall motions, large deformations and wrinkles via thin shell elements of ANCF. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 258: 81~95
- 60 戈新生, 陈凯捷. 自由漂浮空间机器人路径优化的 Legendre 伪谱法. 力学学报, 2016, 48(4): 823~831 (Ge X S, Chen K J. Path planning of free floating space robot using Legendre pseudospectral method. *Chinese Journal of*

- Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(4): 823~831 (in Chinese))
- 61 黄文虎,邵成勋. 多柔体系统动力学. 北京: 科学出版社, 1996 (Huang W H, Shao C X. Dynamics of flexible multibody systems. Beijing: Science Press, 1996 (in Chinese))
- 62 黄文虎,曹登庆,韩增尧. 航天器动力学与控制的研究进展与展望. 力学进展, 2012, 42(4): 367~394 (Huang W H, Cao D Q, Han Z Y. Advances and trends in dynamics and control of spacecrafts. *Advances in Mechanics*, 2012, 42(4): 367~394 (in Chinese))
- 63 白争锋,赵阳,田浩. 柔性多体系统碰撞动力学研究. 振动与冲击, 2009, 28(6): 75~78 (Bai Z F, Zhao Y, Tian H. Study on contact dynamics for flexible multi-body system. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, 28(6): 75~78 (in Chinese))
- 64 兰朋,於祖庆,赵欣. Bézier 和 B-spline 曲线的绝对结点坐标列式有限元离散方法. 机械工程学报, 2012, 48(17): 128~134 (Lan P, Yu Z Q, Zhao X. Using absolute nodal coordinate formulation elements to model Bézier and B-spline curve for finite element analysis. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(17): 128~134 (in Chinese))
- 65 齐朝晖. 多体系统动力学. 北京: 科学出版社, 2008 (Qi Z H. Dynamics of multibody systems. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese))
- 66 Wang G, Qi Z H, Wang J. A differential approach for modeling revolute clearance joints in planar rigid multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 2016, DOI: 10.1007/s11044-016-9552-5
- 67 赵国威,吴志刚. 细长柔性空间结构几种动力学模型比较. 动力学与控制学报, 2016, 14(2): 122~130 (Zhao G W, Wu Z G. A comparison of several dynamic models for slender flexible space structure. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(2): 122~130 (in Chinese))
- 68 徐小明,钟万勰. 基于四元数表示的多体动力学系统及其保辛积分算法. 应用数学和力学, 2014, 35(10): 1071~1080 (Xu X M, Zhong W X. Symplectic integration for multibody dynamics based on quaternion parameters. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(10): 1071~1080 (in Chinese))
- 69 洪嘉振,潘振宽. 柔性多体航天器单向递推组集建模方法. 宇航学报, 1994, 15(4): 85~90 (Hong J Z, Pan Z K. A forward recursive and combinative formulation of dynamics for flexible multibody spacecrafts. *Journal of Astronautics*, 1994, 15(4): 85~90 (in Chinese))
- 70 董富祥,洪嘉振. 多体系统动力学碰撞问题研究综述. 力学进展, 2009, 39(3): 352~359 (Dong F X, Hong J Z. Review of impact problem for dynamics of multibody system. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(3): 352~359 (in Chinese))
- 71 洪嘉振,刘锦阳. 机械系统计算动力学与建模. 北京: 高等教育出版社, 2011 (Hong J Z, Liu J Y. Computational dynamics and modeling of mechanical systems. Beijing: Higher Education Press, 2011 (in Chinese))
- 72 Liu J Y, Lu H. Rigid-flexible coupling dynamics of three-dimensional hub-beams system. *Multibody System Dynamics*, 2007, 18(4): 487~510
- 73 潘科琪,刘锦阳. 柔性曲梁多体系统的研究现状和展望. 力学进展, 2011, 41(6): 711~721 (Pan K Q, Liu J Y. Review and prospect of researches on flexible curved beam systems. *Advances in Mechanics*, 2011, 41(6): 711~721 (in Chinese))
- 74 Li H Q, Duan L C, Liu X F, et al. Deployment and control of flexible solar array system considering joint friction. *Multibody System Dynamics*, 2017, 39(3): 249~265
- 75 刘延柱,潘振宽,戈新生. 多体系统动力学(第二版). 北京: 高等教育出版社, 2014 (Liu Y Z, Pan Z K, Ge X S. Dynamics of multibody systems (2nd Edition). Beijing: Higher Education Press, 2014 (in Chinese))
- 76 芮筱亭. 多体系统传递矩阵法及其应用. 北京: 科学出版社, 2008 (Rui X T. Transfer matrix method and application for multibody systems. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese))
- 77 彼得·艾伯哈特,胡斌. 现代接触力学. 南京: 东南大学出版社, 2003 (Eberhard P, Hu B. Advanced contact dynamics. Nanjing: Southeast University Press, 2003 (in Chinese))
- 78 范纪华,章定国. 基于变形场不同离散方法的柔性机器人动力学建模与仿真. 力学学报, 2016, 48(4): 843~856 (Fan J H, Zhang D G. Dynamic modeling and simulation of flexible robots based on different discretization methods. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(4): 843~856 (in Chinese))
- 79 Zhang X S, Zhang D G, Chen S J, et al. Modal characteristics of a rotating flexible beam with a concentrated mass based on the absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dynamics*, 2016, DOI: 10.1007/s11071-016-3230-2
- 80 潘振宽,赵维加,洪嘉振等. 多体系统动力学微分/代数方程组数值方法. 力学进展, 1996, 26(1): 28~40 (Pan Z K, Zhao W J, Hong J Z, et al. On numerical algorithms for differential/algebraic equations of motion of multibody

- systems. *Advances in Mechanics*, 1996, 26(1): 28~40 (in Chinese))
- 81 Ding J Y, Pan Z K, Chen L Q. Parameter identification of multibody systems based on second order sensitivity analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, 47(10): 1105~1110
- 82 陈志勇,陈力. 带有柔性补偿的柔性关节空间机器人的增广自适应控制及关节振动抑制. 宇航学报, 2013, 34(12): 1599~1604 (Chen Z Y, Chen L. Augmented adaptive control and joint vibration suppression for flexible-joint space robot with flexibility compensation. *Journal of Astronautics*, 2013, 34(12): 1599~1604 (in Chinese))
- 83 董焜煌,陈力. 柔性空间机械臂捕获卫星碰撞动力学分析、镇定运动神经网络控制及抑振. 机械工程学报, 2014, 50(9): 34~42 (Dong Q H, Chen L. The impact dynamics analysis of flexible space manipulator capturing a satellite and neural network calming motion control and vibration suppression. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 50(9): 34~42 (in Chinese))
- 84 陈立平,张云清,任卫群等. 机械系统动力学分析及ADAMS应用教程. 北京:清华大学出版社, 2005 (Chen L P, Zhang Y Q, Ren W Q, et al. Dynamic analysis of mechanical system and application tutorial of ADAMS. Beijing: Tsinghua University Press, 2005 (in Chinese))
- 85 黄永安,尹周平,邓子辰等. 多体动力学的几何积分方法研究进展. 力学进展, 2009, 39(1): 44~57 (Huang Y A, Yin Z P, Deng Z C, et al. Progress in geometric integration method for multibody dynamics. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(1): 44~57 (in Chinese))
- 86 邓子辰,郑焕军,赵玉立等. 基于精细积分法的伸展悬臂结构动态特征的计算. 宇航学报, 2001, 22(6): 110~113 (Deng Z C, Zheng H J, Zhao Y L, et al. On computation of dynamic properties for deploying cantilever beam based on precision integration method. *Journal of Astronautics*, 2001, 22(6): 110~113 (in Chinese))
- 87 王新栋,邓子辰,王艳等. 基于时间有限元方法的旋转柔性叶片动力学响应分析. 应用数学和力学, 2014, 35(4): 353~363 (Wang X D, Deng Z C, Wang Y, et al. Dynamic behavior analysis of rotational flexible blades based on time-domain finite element method. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(4): 353~363 (in Chinese))
- 88 闫业毫,和兴锁,邓峰岩. 空间柔性梁的刚-柔耦合动力学特性分析与仿真. 西北工业大学学报, 2016, 34(3): 480~484 (Yan Y H, He X S, Deng F Y. Analyzing and imitation of dynamic properties for rigid-flexible coupling systems of a spatial flexible beam. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2016, 34(3): 480~484 (in Chinese))
- 89 Shabana A A. Computational dynamics. Singapore: John Wiley & Sons, 2010
- 90 Jalón J G D, Bayo E. Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: The real time challenge. New York: Springer-Verlag, 1994
- 91 Bauchau O A. Parallel computation approaches for flexible multibody dynamic simulations. *Journal of the Franklin Institute*, 2010, 347(1): 53~68
- 92 Cardona A. An integrated approach to mechanism analysis [PhD Thesis]. Belgium: University of Liège, 1989
- 93 Brenan K E, Campbell S L, Petzold L R. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. Classics in Applied Mathematics, SIAM, 1996.
- 94 Shabana A A, Bauchau O A, Hulbert G M. Integration of large deformation finite element and multibody system algorithms. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2007, 2(4): 351~359
- 95 Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1972, 1(1): 1~16
- 96 Newmark N M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1959, 85(1): 67~94
- 97 Negrut D, Rampalli R, Ottarsson G, et al. On an implementation of the Hilber-Hughes-Taylor method in the context of index 3 differential-algebraic equations of multibody dynamics. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2007, 2(1): 73~85
- 98 Chung J, Hulbert G. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, 60(2): 371~375
- 99 张雄,王天舒. 计算动力学. 北京:清华大学出版社, 2007 (Zhang X, Wang T S. Computational dynamics. Beijing: Tsinghua University Press, 2007 (in Chinese))
- 100 Fung T C. Complex-time-step Newmark methods with controllable numerical dissipation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 41(1): 65~93
- 101 Liu T, Zhao C B, Li Q B, et al. An efficient backward Euler time-integration method for nonlinear dynamic analysis of structures. *Computers and Structures*, 2012, 106~107: 20~28
- 102 Noh G, Bathe K J. An explicit time integration scheme for the analysis of wave propagations. *Computers and Structures*

- tures, 2013,129:178~193
- 103 Wen W B, Luo S M, Jian K L. A novel time integration method for structural dynamics utilizing uniform quintic B-spline functions. *Archive of Applied Mechanics*, 2015, 85 (12):1743~1759
- 104 Wen W B, Duan S Y, Yan J, et al. A quartic B-spline based explicit time integration scheme for structural dynamics with controllable numerical dissipation. *Computational Mechanics*, 2016, DOI: 10.1007/s00466-016-1352-5
- 105 Sørensen K, Houbak N, Condra T. Solving differential-algebraic equation systems by means of index reduction methodology. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 2006,14:224~236
- 106 Borri M, Trainelli L, Croce A. The embedded projection method: A general index reduction procedure for constrained system dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006,195:6974~6992
- 107 Altmann R, Betsch P, Yang Y P. Index reduction by minimal extension for the inverse dynamics simulation of cranes. *Multibody System Dynamics*, 2016,36(3):295~321
- 108 Mattsson S E, Söderlind G. Index reduction in differential-algebraic equations using dummy derivatives. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1993,14(3):677~692
- 109 Wehage R A, Haug E, Beck R R. Generalized coordinate partitioning in dynamic analysis of mechanical systems. Center and Laboratory Technical Report, U.S. Army tank-automotive command research and development center, 1981
- 110 Wehage K T, Wehage R A, Ravani B. Generalized coordinate partitioning for complex mechanisms based on kinematic substructuring. *Mechanism and Machine Theory*, 2015,92:464~483
- 111 Carpinelli M, Gubitosa M, Mundo D, et al. Automated independent coordinates' switching for the solution of stiff DAEs with the linearly implicit Euler method. *Multibody System Dynamics*, 2016,36(1):67~85
- 112 Bayo E, Jalon G D J, Serna M A. A modified Lagrangian formulation for the dynamic analysis of constrained mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988,71:183~195
- 113 Tian Q, Zhang Y Q, Chen L P, et al. An efficient hybrid method for multibody dynamics simulation based on absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2009,4(2):021009
- 114 Shabana A A. *Computational continuum mechanics*. New York: Cambridge University Press, 2008
- 115 Bonet J, Wood R D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- 116 Bathe K J. *Finite element procedures*. New Jersey: Prentice-Hall, 1996
- 117 黄克智,薛明德,陆明万. 张量分析(第2版). 北京:清华大学出版社, 2003 (Huang K Z, Xue M D, Lu M W. *Tensor analysis (2nd Edition)*. Beijing: Tsinghua University Press, 2003 (in Chinese))
- 118 刘铖,田强,胡海岩. 基于绝对节点坐标的多柔体系统动力学高效计算方法. *力学学报*, 2010,42(6):1197~1205 (Liu C, Tian Q, Hu H Y. Efficient computational method for dynamics of flexible multibody systems based on absolute nodal coordinate. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010,42(6):1197~1205 (in Chinese))
- 119 Biggs M B, Brown S, Christianson B, et al. Automatic differentiation of algorithms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000,124(1-2):171~190
- 120 Knoll D A, Keyes D E. Jacobian-free Newton-Krylov methods;a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*, 2004,193:357~397
- 121 Melanz D, Khude N, Jayakumar P, et al. A matrix-free Newton-Krylov parallel implicit implementation of the absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2014,9(1):011006
- 122 Liu C, Tian Q, Hu H Y. New spatial curved beam and cylindrical shell elements of gradient deficient absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 70:1903~1918
- 123 Liu C, Tian Q, Hu H Y. Dynamics of large scale rigid-flexible multibody system composed of composite laminated plates. *Multibody System Dynamics*, 2011, 26: 283 ~ 305
- 124 Hermanns M (2002) Parallel Programming in Fortran 95 using OpenMP. http://www.openmp.org/presentations/miguel/F95_OpenMPv1_v2.pdf
- 125 Luo K, Liu C, Tian Q, et al. An efficient model reduction method for buckling analyses of thin shells based on IGA. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016,309:243~268
- 126 Negrut D, Tasora A, Mazhar H, et al. Leveraging parallel computing in multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2012,27: 95~117
- 127 http://www.nvidia.com/object/cuda_home.html
- 128 <http://www.openacc-standard.org>

- 129 Davis T A. Direct methods for sparse linear systems. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2006,33(3):420~460
- 130 George A, Liu J W H. Computer solution of large sparse positive definite systems. *Prentice-Hall*, 1981,39(159):1~177
- 131 Cuthill E, McKee J. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. *Acm Conference Meeting: National Conference*, 1969:157~172
- 132 Markovic D, Park K C, Ibrahimbegovic A. Reduction of substructural interface degrees of freedom in flexibility-based component mode synthesis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007,70(2):163~180.
- 133 Naets F, Desmet W. Super-element global modal parameterization for efficient inclusion of highly nonlinear components in multibody simulation. *Multibody System Dynamics*, 2014,31(1):3~25
- 134 Kim J G, Lee P S. An enhanced Craig-bampton method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015,103(2):79~93
- 135 Kerschen G, Golinval J C, Vakakis A F, et al. The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems; An overview. *Nonlinear Dynamics*, 2005,41(1):147~169
- 136 Ebert F. A note on POD model reduction methods for DAEs. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 2010,16(2):115~131
- 137 Masoudi R, Uchida T, McPhee J. Reduction of multibody dynamic models in automotive systems using the proper orthogonal decomposition. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2015,10(3):031007
- 138 Laffin J, Anderson K S, Khan I M, et al. Advances in the application of the divide-and-conquer algorithm to multibody system dynamics. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2014,9(4):041003
- 139 Li P, Liu C, Tian Q, et al. Dynamics of a deployable mesh reflector of satellite antenna: parallel computation and deployment simulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016,11(6):061005
- 140 Kocak S, Acay H U. Parallel Schur complement method for large-scale systems on distributed memory computers. *Applied Mathematical Modelling*, 2001,25(10):873~886
- 141 Farhat C. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991,32(6):1205~1227
- 142 <http://www.hsl.rl.ac.uk/index.html>
- 143 <http://www.pardiso-project.org/>
- 144 <https://software.intel.com/en-us/intel-mkl>
- 145 Serban R, Melanz D, Li A, et al. A GPU-based preconditioned Newton-Krylov solver for flexible multibody dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015,102(9):1585~1604.
- 146 Sharf I, Zhang Y. A contact force solution for non-colliding contact dynamics simulation. *Multibody System Dynamics*, 2006,16(3):263~290
- 147 Gilardi G, Sharf I. Literature survey of contact dynamics modeling. *Mechanism and Machine Theory*, 2002,37(10):1213~1239
- 148 Pereira C, Ramalho A, Ambrosio J. A critical overview of internal and external cylinder contact force models. *Nonlinear Dynamics*, 2011,63:681~697
- 149 Flores P, Machado M, Silva M T, et al. On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2011,25:357~375
- 150 Pereira C, Ramalho A, Ambrósio J. Applicability domain of internal cylindrical contact force models. *Mechanism and Machine Theory*, 2014,78:141~157
- 151 Pfeiffer F. On non-smooth multibody dynamics. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part K Journal of Multi-body Dynamics*, 2012,226(2):147~177
- 152 Pfeiffer F, Foerg M, Ulbrich H. Numerical aspects of non-smooth multibody dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006,195(50~51):6891~6908
- 153 Pfeiffer F, Glocker C. *Multibody dynamics with unilateral constraints*. Wiley, 1996
- 154 Gao H P, Wang Q, Wang S M, et al. A linear complementarity model for multibody systems with frictional unilateral and bilateral constraints. *Acta Mechanica Sinica*, 2011,27(4):587~592
- 155 Zhuang F F, Wang Q. Modeling and analysis of rigid multibody systems with driving constraints and frictional translation joints. *Acta Mechanica Sinica*, 2014,30(3):437~446
- 156 Chen Q Z, Acary V, Virlez G, et al. A nonsmooth generalized- α scheme for flexible multibody systems with unilateral constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013,96:487~511.
- 157 Brüls O, Acary V, Cardona A. Simultaneous enforcement of constraints at position and velocity levels in the nonsmooth generalized- α scheme. *Computer Methods in Applied*

- Mechanics and Engineering*, 2014,281:131~161
- 158 Tasora A, Negrut D, Anitescu A. Large-scale parallel multi-body dynamics with frictional contact on the graphical processing unit. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part K Journal of Multi-body Dynamics*, 2008,222(4):315~326
- 159 Tasora A, Anitescu M. A matrix-free cone complementarity approach for solving large-scale, nonsmooth, rigid body dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013,200(5-8):439~453
- 160 Flores P, Ambrósio J, Claro J C P, et al. Kinematics and dynamics of multibody systems with imperfect joints: models and case studies, In: *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, vol. 34. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2008
- 161 Flores P, Leine R, Glocker C. Modeling and analysis of planar rigid multibody systems with translational clearance joints based on the non-smooth dynamics approach. *Multibody System Dynamics*, 2010,23:165~190
- 162 Bauchau O A, Ju C K. Modeling friction phenomena in flexible multi-body dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006,195(50-51):6909~6924
- 163 Liu C, Zhang K, Yang L. Normal force-displacement relationship of spherical joints with clearances. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2006,1(2):160~167
- 164 Qi Z H, Luo X M, Huang Z H. Frictional contact analysis of spatial prismatic joints in multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 2011,26:441~468
- 165 Liu C, Tian Q, Hu H Y. Dynamics and control of a spatial rigid-flexible multibody system with multiple cylindrical clearance joints. *Mechanism and Machine Theory*, 2012,52(52):106~129
- 166 Tian Q, Zhang Y, Chen L, et al. Simulation of planar flexible multibody systems with clearance and lubricated revolute joints. *Nonlinear Dynamics*, 2010,60:489~511
- 167 Tian Q, Liu C, Machado M, et al. A new model for dry and lubricated cylindrical joints with clearance in spatial flexible multibody system. *Nonlinear Dynamics*, 2011,64:25~47
- 168 Flores P, Ambrósio J, Claro J C P, et al. Lubricated revolute joints in rigid multibody systems. *Nonlinear Dynamics*, 2009,56:277~295
- 169 Zhao B, Zhang Z N, Fang C C, et al. Modeling and analysis of planar multibody system with mixed lubricated revolute joint. *Tribology International*, 2016,98:229~241
- 170 Flores P, Ambrósio J, Claro J P. Dynamic analysis for planar multibody mechanical systems with lubricated joints. *Multibody System Dynamics*, 2004,12:47~74
- 171 Li P, Chen W, Li D S, et al. A novel transition model for lubricated revolute joints in planar multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 2016,36:279~294
- 172 Daniel G B, Machado T H, Cavalca K L. Investigation on the influence of the cavitation boundaries on the dynamic behavior of planar mechanical systems with hydrodynamic bearings. *Mechanism and Machine Theory*, 2016,99:19~36
- 173 Lugt P M, Morales-Espejel G E. A review of Elasto-Hydrodynamic lubrication theory. *Tribology Transactions*, 2010,54(3):470~496
- 174 Mattei L, Puccio D F, Piccigallo B, et al. Lubrication and wear modelling of artificial hip joints: A review. *Tribology International*, 2011,44:532~549
- 175 Costa J, Peixoto J, Moreira P, et al. Influence of the hip joint modeling approaches on the kinematics of human gait. *Journal of Tribology*, 2015,98(3):212a
- 176 Tian Q, Xiao Q F, Sun Y L, et al. Coupling dynamics of a geared multibody system supported by ElastoHydroDynamic lubricated cylindrical joints. *Multibody System Dynamics*, 2015,33:259~284
- 177 Tian Q, Lou J, Mikkola A. A new elasto-hydrodynamic lubricated spherical joint model for rigid-flexible multibody dynamics. *Mechanism and Machine Theory*, 2017,107:210~228
- 178 Yang B, Laursen T A. A mortar-finite element approach to lubricated contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009,198(47-48):3656~3669
- 179 Majidi C. Soft Robotics: A perspective-current trends and prospects for the future. *Soft Robotics*, 2013,1(1):5~11
- 180 Rus D, Tolley M T. Design, fabrication and control of soft robots. *Nature*, 2015,521:467~475
- 181 Laschi C, Mazzolai B, Cianchetti M. Soft robotics: Technologies and systems pushing the boundaries of robot abilities. *Science Robotics*, 2016,1(1):3690
- 182 李铁风,李国瑞,梁艺鸣等. 软体机器人结构机理与驱动材料研究综述. *力学学报*, 2016,48(4):756~766 (Li T F, Li G R, Liang Y M, et al. Review of materials and structures in soft robotics. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016,48(4):756~766 (in Chinese))
- 183 刘锦阳,马易志. 柔性多体系统多点碰撞的理论和实验研究. *上海交通大学学报*, 2009,43(10):1667~1671

- (Liu J Y, Ma Y Z. Investigation on modeling theory and experiment technique for flexible multi-body system with multiple-point impact. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2009,43(10):1667~1671 (in Chinese))
- 184 Wang Q T, Tian Q, Hu H Y. Dynamic simulation of frictional contacts of thin beams during large overall motions via absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dynamics*, 2014,77:1411~1425
- 185 Wang Q T, Tian Q, Hu H Y. Dynamic simulation of frictional multi-zone contacts of thin beams. *Nonlinear Dynamics*, 2016,83:1919~1937
- 186 Wriggers P, Fischer K A. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006,195:5020~5036
- 187 丁千,翟红梅. 机械系统摩擦动力学研究进展. 力学进展, 2013,43(1):112~131 (Ding Q, Zhai H M. The advance in researches of friction dynamics in mechanics system. *Advances In Mechanics*, 2013,43(1):112~131 (in Chinese))
- 188 Pennestri E, Rossi V, Salvini P, et al. Review and comparison of dry friction force models. *Nonlinear Dynamics*, 2016,83(4):1785~1801
- 189 Urbakh M, Klafter J, Gourdon D, et al. The nonlinear nature of friction. *Nature*, 2004,430:525~528
- 190 Mo Y, Turner K T, Szułufarska I. Friction laws at the nanoscale. *Nature*, 2009,457:1116~1119
- 191 Li S Z, Li Q Y, Carpick R W, et al. The evolving quality of frictional contact with graphene. *Nature*, 2016,539:541~545
- 192 王光远. 论不确定性结构力学的发展, 力学进展, 2002,32(2):205~211 (Wang G Y. On the development of uncertain structural mechanics. *Advances in Mechanics*, 2002,32(2):205~211 (in Chinese))
- 193 Paez T L, Red-Horse J. Structural dynamics challenge problem: summary. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008,197(29~32):2660~2665
- 194 <http://www.itm.uni-stuttgart.de/iutam2014/>
- 195 邱志平,王晓军. 不确定性结构力学问题的集合理论凸方法. 北京: 科学出版社, 2008 (Qiu Z P, Wang X J. Convex set theory for uncertain structural mechanics problems. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese))
- 196 王睿星,王晓军,王磊等. 几种结构非概率可靠性模型的研究. 应用数学和力学, 2013,34(8):871~880 (Wang R X, Wang X J, Wang L, et al. Comparisons of several non-probabilistic models for structural reliability. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013,34(8):871~880 (in Chinese))
- 197 苏静波,邵国建. 基于区间分析的工程结构不确定性研究现状与展望. 力学进展, 2005,35(3):338~344 (Su J B, Shao G J. Current research and prospects on interval analysis in engineering structure uncertainty analysis. *Advances in Mechanics*, 2005,35(3):338~344 (in Chinese))
- 198 Moore R E, Kearfott R B, Cloud M J. Introduction to interval analysis. SIAM Philadelphia, 2009
- 199 Sandu A, Sandu C, Ahmadian M. Modeling multibody systems with uncertainties. Part I: Theoretical and computational aspects. *Multibody System Dynamics*, 2006,15(4):369~391
- 200 Sandu C, Sandu A, Ahmadian M. Modeling multibody systems with uncertainties. Part II: Numerical applications. *Multibody System Dynamics*, 2006,15(3):241~262
- 201 Wasfy T M, Noor A K. Finite element analysis of flexible multibody systems with fuzzy parameters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998,160(3~4):223~243
- 202 Wu J L, Luo Z, Zhang Y Q, et al. Interval uncertain method for multibody mechanical systems using chebyshev inclusion functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013,95(7):608~630
- 203 Wang Z, Tian Q, Hu H Y. Dynamics of flexible multibody system with interval parameters. *Nonlinear Dynamics*, 2016,84:527~548
- 204 Wang Z, Tian Q, Hu H Y, et al. Nonlinear dynamics and chaotic control of a flexible multibody system with uncertain joint clearance. *Nonlinear Dynamics*, 2016,86:1571~1597
- 205 孟光,周徐斌,苗军. 航天重大工程中的力学问题. 力学进展, 2016,46:267~322 (Meng G, Zhou X B, Miao J. Mechanical problems in momentous projects of aerospace engineering. *Advances in Mechanics*, 2016,46:267~322 (in Chinese))
- 206 Yu L, Zhao Z H, Tang J L, et al. Integration of absolute nodal elements into multibody system. *Nonlinear Dynamics*, 2010,62:931~943
- 207 虞磊. 基于绝对节点坐标的柔性多体系统建模与计算方法研究[博士学位论文]. 北京: 清华大学, 2010 (Yu L. Research on modeling and computational method of flexible multibody system based on the absolute nodal coordinate formulation [PhD Thesis]. Beijing: Tsinghua University, 2010 (in Chinese))
- 208 Tang J L, Ren G X, Zhu W D, et al. Dynamics of varia-

- ble-length tethers with application to tethered satellite deployment. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16:3411–3424
- 209 Adler A L, Mikulas M M, Hedgpehth J M. Static and dynamic analysis of partially wrinkled membrane structures. In: Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, 2000
- 210 Reissner E. On tension field theory. In: Fifth International Congress on Applied Mechanics, 1938:88~92
- 211 Miyazaki Y. Wrinkle/slack model and finite element dynamics of membrane. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 66(66):1179~1209
- 212 Cerda E, Mahadevan L. Geometry and physics of wrinkling. *Physical Review Letter*, 2003, 90(7):074302
- 213 Chopin J, Kudrolli A. Helicoids, wrinkles, and loops in twisted ribbons. *Physical Review Letter*, 2013, 111(17):174302
- 214 Morigaki Y, Wada H, Tanaka I Y. Stretching an elastic loop: Crease, helicoid, and pop out. *Physical Review Letter*, 2016, 117(19):198003
- 215 Meguro A, Shintate K, Usui M, et al. In-orbit deployment characteristics of large deployable antenna reflector on-board Engineering Test Satellite VIII. *Acta Astronautica*, 2009, 65(9–10):1306~1316.
- 216 侯欣宾, 王立. 空间太阳能电站技术发展现状及展望. *中国航天*, 2015(2):12~15 (Hou X B, Wang L. Development and prospect of space solar power station technology. *Aerospace China*, 2015(2):12~15 (in Chinese))
- 217 Shoer J. Dynamics of reconfigurable multibody space systems connected by magnetic flux pinning [PhD Thesis]. New York: Cornell University, 2011
- 218 Shoer J, Peck M. Reconfigurable spacecraft as kinematic mechanisms based on flux-pinning interactions. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2009, 46(2):466~469
- 219 Kooijman J D G, Meijaard J P, Papadopoulos J M, et al. A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effects. *Science*, 2011, 332(6027):339–342

ADVANCES AND CHALLENGES IN DYNAMICS OF FLEXIBLE MULTIBODY SYSTEMS *

Tian qiang[†] Liu Cheng Li Pei Hu Haiyan

(Department of Mechanics, School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract In this review article, the growth and related academic communications in the dynamics of multibody system are firstly surveyed. Then, the recent advances in the numerical algorithms for solving the dynamic equations of flexible multibody systems, the contact/impact dynamics of flexible multibody systems and the deployment dynamics of flexible space structures are systematically reviewed, together with several open problems of concern. Finally, some suggestions are made for the prospective researches on the dynamics of flexible multibody systems.

Key words flexible multibody system, numerical algorithm, contact/impact, flexible space structure

Received 27 February 2017, revised 1 March 2017.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11290151, 11472042, 11672034) and by National Defense Basic Scientific Research Program of China (B2220133017)

[†] Corresponding author E-mail: tianqiang_hust@aliyun.com