

Rocking Block 线碰撞离散化研究*

张宏剑^{1†} 庄方方² 王辰¹ 季宝锋¹ 石玉红¹

(1.北京宇航系统工程研究所,北京 100076) (2.中国运载火箭技术研究院研究发展中心,北京 100076)

摘要 针对 Rocking Block 中的线碰撞问题,首先采用离散化思想将线碰撞问题离散为多点碰撞系统,而后基于 LZB 方法对所建多点碰撞系统进行动力学建模.仿真结果表明随着离散点数的增加,基于 LZB 方法的多点碰撞模型能够很好地刻画 Rocking Block 中的相关线碰撞问题,且精度与离散程度紧密相关.

关键词 线碰撞, 多点碰撞, 非光滑动力学, Rocking Block

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-058

引言

多尺度耦合现象是客观世界复杂性的主要特征,即在不同的尺度上拟序结构和随机涨落的同时或交替出现并互相耦合.物体之间含摩擦的碰撞、接触问题是力学系统中多尺度耦合现象的典型范例.线碰撞现象大量存在于自然界与工程应用当中,如航天器的对接,卫星太阳帆板的展开,航天器的着陆,航天分离装置,双足机器人的行走等,相关问题不论在理论分析和建模,还是在数值计算等方面都受到不同学科的关注.目前,由于尚没有有效准确的线碰撞处理模型,通过离散化方法将线碰撞转化为多点碰撞问题是处理此类问题的有效途径之一.

国内外许多学者对线碰撞问题进行了深入的研究,Housner^[1]于 1960 年基于地震中建筑物安全性分析提出 Rocking Block 动力学问题,并指出此问题是解决地震房屋安全性分析的关键技术,并基于离散化思想用两点接触碰撞模型刻画了 Block 与地面之间的线接触碰撞过程.基于运动学约束假设,Housner 对 Rocking Block 问题进行了简化分析处理,其提出模型要求物块碰撞前后皆为接触粘滞状态,这一状态假设很难与实际情况相符.Lipscombe^[2]实验中发现实际物块运动过程中会出现伴随滑动与粘滞的 rocking, half-rocking 多种运动状态.Shenton^[3], Pompei^[4]等人对物块多运动状态出

现进行了系统的理论分析.Brogliato^[5]基于运动学条件对物块的不同运动状态进行了系统分析,提出 Rocking Block 问题是物块与水平支撑面之间的含摩擦线碰撞,指出 Housner 模型处理物块实际运动的局限性.Hurmuzlu^[6]利用其提出的冲量分配比方法对 Rocking Block 问题进行了理论与实验研究.由于其模型没有考虑碰撞过程中界面非光滑导致的切向冲击,其理论结果与实验结果不符.Pena^[7]对 Rocking Block 问题进行了系统的实验研究,发现传统弹簧粘壶力元方法不得不调节多个物理参数,其中两离散点之间距离大于物块实际宽度.Liu, Zhao, Brogliato^{[8][9]}提出新的处理含摩擦多点碰撞方法(LZB),并有效处理了 Dimer^[10],牛顿栏^[11]等相关问题.Zhang^[12]将 LZB 方法引入到 Rocking Block 动力学研究,并与 Pena 相关实验结果进行了对比.但在研究过程中发现,选取的两个离散点必须满足距离小于物块实际宽度,才能使计算结果与 Pena 实验结果一致.LZB 方法可以有效处理 Dimer^[13],牛顿栏等含摩擦多点碰撞问题,并在球-盘系统对盘与基座之间的线接触碰撞进行了三点离散化处理^[14].本文选取 Rocking Block 为研究对象,基于 LZB 方法对线碰撞离散化过程可行性进行研究,对离散化处理方式精确性进行分析评估.

1 Rocking Block 平面线碰撞动力学描述

Rocking Block 系统如图 1 所示,质量均匀的物

2016-07-13 收到第 1 稿,2016-09-11 收到修改稿.

* 国家高技术研究发展计划资助项目(2015AA7021076)、国家自然科学基金资助项目(11402033)、中国科协青年人才托举工程(2016QNRC001-YESS20160107)

† 通讯作者 E-mail: zhanghj@pku.edu.cn

块高度为 H , 宽度为 W , 质量为 M . 初始状态下, 物块与水平桌面以夹角 θ 左侧单点接触.

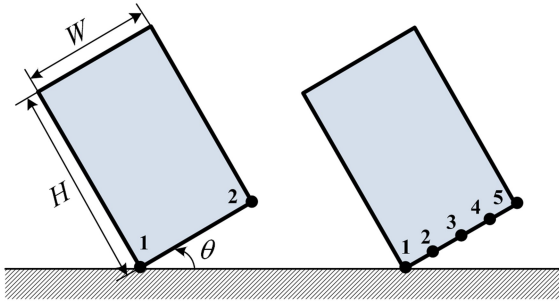


图1 Rocking Block 离散化模型

Fig. 1 Discretization model of Rocking Block

为简化分析, 本文假设水平桌面静止不动, 只考虑物块图示位置释放后与桌面之间的第一次线碰撞过程. 设物块系统坐标为: $q = \{x, y, \theta\}^T$, 其中 x, y 分别为物块质心在惯性坐标系中的位置坐标, θ 为物块底线与水平桌面之间的夹角. 则平面内系统的动能可表示为:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (1)$$

其中 $J = \frac{m}{12}(H^2 + W^2)$ 为物块在水平面内的转动惯量. 取水平粗糙接触面为零势面, 物块的势能为: U

$$= mgsin\theta \frac{\sqrt{H^2 + W^2}}{2}.$$

物块系统动力学方程可表示为:

$$M\ddot{q} = W_n F^n + W_\tau F^\tau + G + h \quad (2)$$

其中 G 为重力矩阵, h 为向心力矩阵, M 为质量矩阵, W_n, W_τ 为雅克比矩阵. 各矩阵维数取决于物块与支撑面之间线碰撞区域离散化出的离散点数 N ($N \geq 2$). 若 N 为偶数, 则离散过程中先取边界两点, 再取两点之间均匀分布的 $N-2$ 个点; 若 N 为奇数, 则离散过程中先取边界与质心在底边投影的点, 再取投影点两侧各均匀分布 $\frac{N-3}{2}$ 个点.

2 含摩擦多点碰撞步进冲量法 (LZB)

在碰撞冲击过程中, 物块系统动力学方程仍然由公式(2)所给出的动力学方程来控制系统的运动. 设系统的碰撞过程历经时间间隔为 $[t_0, t_f]$. 相对于物块的整体宏观运动, 碰撞过程所经历的时间间隔在时间尺度上的一个瞬时事件. 因此, LZB 方法引入冲击动力学中的两个假设:

(1) 系统的构型在碰撞微小的时间尺度内可认为保持不变;

(2) 接触点处由于碰撞引起的冲击力远大于系统的惯性力与常规力.

这一瞬态冲击事件虽然不会引起系统构型的变化, 但碰撞后将极大改变系统的运动速度. 方程(2)可写为如下形式:

$$Mdq = W_n F^n dt + W_\tau F^\tau dt + (G+h) dt \quad (3)$$

依据冲击动力学, 假设存在:

$$\lim_{(t_f-t_0) \rightarrow 0} q(t_f) = q(t_0), \quad \lim_{(t_f-t_0) \rightarrow 0} (G+h) dt = 0$$

$$\lim_{(t_f-t_0) \rightarrow 0} W_n(t_f) = W_n(t_0), \quad \lim_{(t_f-t_0) \rightarrow 0} W_\tau(t_f) = W_\tau(t_0)$$

根据冲量与接触力之间的微分关系, 可定义法向和切向冲量:

$$dP^n = F^n dt, \quad dP^\tau = F^\tau dt \quad (4)$$

因此可以得到只考虑速度变化的如下冲量微分方程:

$$Mdq = W_n dP^n + W_\tau dP^\tau \quad (5)$$

在接触点两接触体的材料性质在接触面法向上总可以表示成如下弹性关系:

$$F_i^n = f_i(\delta_i) \quad (6)$$

其中: $f_i(\delta_i)$ 为一个连续函数, F_i^n 为由于发生局部接触变形 δ_i 所导致的局部法向力. 命 E_i^n 为接触点 i 处的弹性势能. 则微小的弹性变形 $d\delta_i$ 所引起的势能变化为:

$$dE_i^n = F_i^n d\delta_i = \frac{dP_i^n}{dt} d\delta_i = \delta_i dP_i^n \quad (7)$$

对完全弹性碰撞来说, 从碰撞开始到碰撞结束的时间段内, 外部力所做功经过弹性势能的变换, 将全部转化为系统的有效动能. 然而由于塑性变形及其它能量耗散因素, 在压缩阶段, 外部力所做的负功转化外弹性势能的过程中, 必定耗散部分能量. 而在恢复阶段, 接触点 i 处储存的弹性势能能全部转化为外力的功. 定义能量转换效率为 η_i . 则方程可表示为:

$$dE_i^n = \eta_i \delta_i dP_i^n \quad (8)$$

Stronge 定义能量恢复系数表示在接触点 i 处的能量转换效率.

$$\eta_i = \begin{cases} e_i^2, & \delta_i \leq 0 \\ 1, & \delta_i > 0 \end{cases} \quad (9)$$

由式与相关推导可知, 不同点处的法向冲量与各点所集聚的势能成函数关系. 即可以利用各点处

积蓄势能找出不同点处法向力或法向冲量关系:

$$\frac{F_j^n}{F_i^n} = \frac{dP_j^n}{dP_i^n} = \frac{g_j(E_j^n)}{g_i(E_i^n)},$$

$$i \neq j, E_i^n = \max\{E_j^n | j=1, 2, \dots, n\} \quad (10)$$

由于各点处切向力与法向力之间满足库伦摩擦定律,碰撞过程中各点处的切向冲量与法向冲量也满足库伦摩擦定律.即滑动状态下 j 点法向冲量与切向冲量之间满足 $dP_j^t = -\mu dP_j^n \text{sign}(v_j^t)$, 粘滞状态下满足 $\left| \frac{dP_j^t}{dP_j^n} \right| \leq \mu_s, \mu, \mu_s$ 分别为动摩擦系数与静摩擦系数.

3 仿真计算分析

如图1所示,物块以一定夹角 θ 放置在水平桌面上,自由释放,在重力作用下,物块下落与水平支撑面之间发生一次线碰撞过程.仿真参数如表1所示. N 为物块与支撑面之间线碰撞区域的离散点数.为简化过程,仿真中物块与水平支撑面之间碰撞前角速度为: $\dot{\theta} = -2 \text{rad/s}$.离散点代码由左至右依次由1增至 N .碰撞前1点与支撑面之间保持接触,即1点法向初始速度为零.

表1 仿真中的物理参数

Table 1 Physical parameters in LZB model

M (g)	H (mm)	W (mm)	e_i	Friction coefficient
209.69	75	6	0.9	$\mu = 0.14, \mu_s = 0.15$

如图2所示,离散点数为五个点时,各个离散点碰撞过程集聚势能与法向速度.由于#1点碰撞前与水平支撑面为接触状态,且碰撞过程中,其法向速度一直大于等于零.即#1点一直不参与碰撞过程, #1点处集聚势能一直为零.其它参与碰撞点在碰撞过程中其法向速度都会由负值减至零,再增至非负值.当碰撞点法向速度为负值时,其经历碰撞过程中的压缩阶段,对应点处所集聚的势能不断增加,直至法向速度为零.法向速度为零后,碰撞在点处的压缩过程将转变为恢复阶段,点在压缩阶段所集聚的势能释放转化为物块的动能.由于各点碰撞前入射速度不同,在相同恢复系数下,各点依次接触碰撞过程中的压缩阶段与整个碰撞阶段.最右侧点(#5)入射速度最大,碰撞过程中集聚势能最多,也最后完成碰撞过程.由图2(a)可见,在离散点为

五个的情况下,物块与支撑面一次线碰撞过程,先是#2,3,4,5四点碰撞过程,随着各点碰撞过程的结束,四点碰撞逐渐转变为在#5点处的单点碰撞过程.

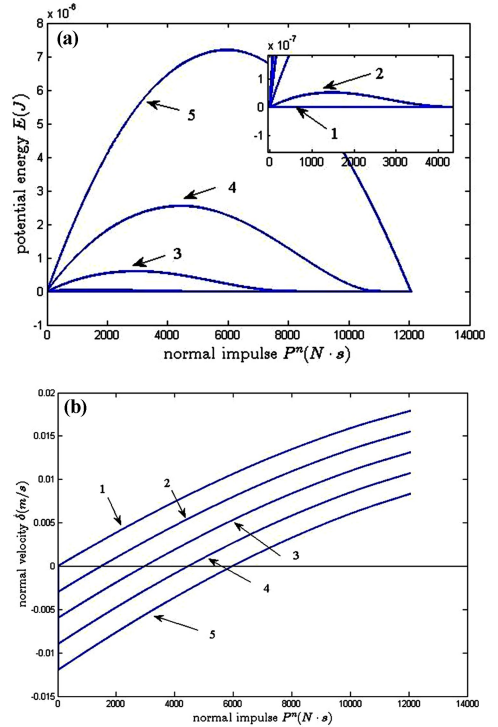


图2 $N=5$ 时,物块与支撑之间碰撞过程中各点集聚势能(a)与法向速度(b)

Fig. 2 Agglomeration potential energy (a) and normal speed (b) for every point during the impact between the block and the support when $N=5$

在同样的初始条件与恢复系数下,将离散点由5个变成7个与9个,碰撞过程如图3所示.由图3(a)可见,随着物块与支撑面离散点数的增加,碰撞过程中各点所集聚的势能也相应减少.碰撞过程仍先为 $N-1$ 各点的多点碰撞过程,点数依次减少,逐渐转变为最右点# N 的单点碰撞过程直至碰撞结束.离散点的改变不但影响碰撞过程中各点所集聚的势能过程,还改变各点碰撞后的法向速度,如图3(b)所示.即物块与水平支撑面之间线碰撞后的状态,不但与恢复系数等物理参数有关,还以多点碰撞处理中离散过程有关.为研究离散对物块线碰撞后状态的影响,进行 $N=3$ 至 $N=401$ 点的系统仿真计算.令不同离散点数 n 与最大值 N 之间的角速度计算值绝对相对误差为: $\beta = \left| \frac{\dot{\theta}_n - \dot{\theta}_N}{\dot{\theta}_N} \right|$.仿真中进行三种物块厚度的计算 $H=6, 18, 30 \text{mm}$,以找出离散

程度误差与物块几何尺寸相应关系. Rocking Block 相关工作中发现两离散点刻画线碰撞在“细长”物块中有效,而在相对“扁平”物块中往往需要进行更多的诸如等效宽度与恢复系数等人为参数调整.

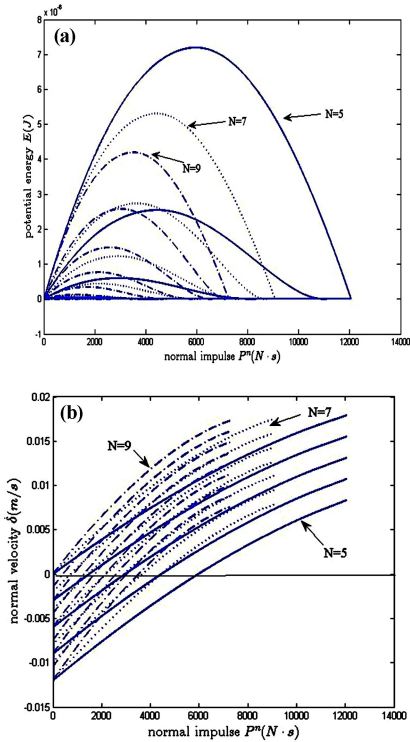


图 3 $N=5, 7, 9$ 时,物块与支撑之间碰撞过程中各点集聚势能 (a) 与法向速度对比 (b)

Fig. 3 Comparison of agglomeration potential energy (a) and normal speed (b) for every point during the impact between the block and the support when $N=5, 7, 9$, respectively

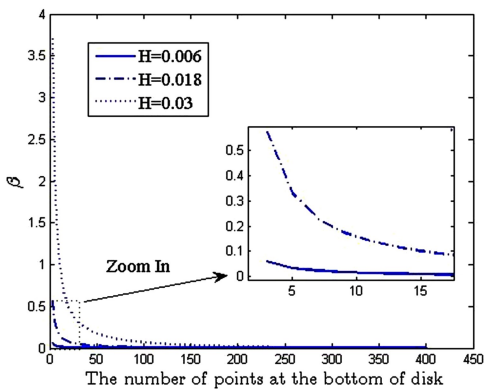


图 4 不同厚度与不同离散点数下物块碰撞角速度相对误差值

Fig. 4 Relative error of impact speeds for the blocks with different thickness and different number of discrete points

由图 4 可见,随着离散点数的不断增多.由于离散点数不同所引起的物块碰撞后角速度相对误差差值 β 不断减小,趋近于零.相对误差衰减速度

随着物块厚度的不断增加而不断减小.即随着物块厚度的不断增加,离散化处理线碰撞对应离散点数应相应增加,以保证计算结果对离散点数的稳定性.对于文献[14]中的圆盘,其三个点离散情况下的相对误差在 5% 以内,即其相关仿真结果在三个点数下是满足稳定离散化要求的.

4 结论

本文基于 LZB 方法,对 Rocking Block 中将线碰撞离散化成多点碰撞分析方式进行了系统研究.利用物块底边与支撑面之间这一典型线碰撞问题,进行不同离散点数的系统仿真分析.分析结果发现离散点数的选取会影响对应线碰撞后物块的运动状态,但相对误差随着点数的不断增加而不断减少.研究证明离散化处理方法在处理线碰撞问题的稳定性和有效性,LZB 方法能够有效合理地描述线碰撞后物体的准确状态.但对于实际工程中其他复杂系统,线碰撞离散成多点的处理过程,本文结果表明需进行离散化点数校核,离散化点数量将直接影响计算结果的精确性.

参 考 文 献

- 1 Housner G W. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1963,53(2): 403~417
- 2 Lipscombe P R, Pellegrino S. Free rocking of prismatic blocks. *Journal of Engineering Mechanics*, 1993,119:1387~1410
- 3 Shenton H W. Criteria for initiation of slide, rock, and slide-rock rigid-body modes. *Journal of Engineering Mechanics*, 1996,122(7): 690~693
- 4 Pompei A, Scalia A, Sumbatyan M A. Dynamics of rigid block due to horizontal ground motion. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998,124(7):713~717
- 5 Brogliato B, Zhang H J, Liu C S. Analysis of a generalized kinematic impact law for multibody-multicontact systems, with application to the planar rocking block and chains of ball. *Multibody System Dynamics*, 2012,27(3):351~382
- 6 Yilmaz C, Gharib M, Hurmuzlu Y. Solving frictionless rocking block problem with multiple impacts. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2009,465:3323~3339

- 7 Pena F, Prieto F, Lourenco P B, Campos Costa A, Lemos J V. On the dynamics of rocking motion of single rigid-block structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2007,36(15):2383~2399
- 8 Liu C S, Zhao Z, Brogliato B. Frictionless multiple impacts in multibody systems. II, Numerical algorithm and simulation results. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2009,465(2101):1~23
- 9 Liu C S, Zhao Z, Brogliato B. Frictionless multiple impacts in multibody systems. I, Theoretical framework. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2008,464(2100):3193~3211
- 10 Dorbolo S, Volfson D, Tsimring L. Dynamics of a bouncing dimer. *Physical Review Letters*, 2005,95:44101
- 11 Zhao Z, Liu C S, Brogliato B. Energy dissipation and dispersion effects in a granular media. *Physical Review E*, 2008,78(1):031307
- 12 Zhang H J, Brogliato B, Liu C S. Dynamics of planar rocking-blocks with Coulomb friction and unilateral constraints: Comparisons between experimental and numerical data. *Multibody System Dynamics*, 2014,32(1):1~25
- 13 Zhao Z, Liu C S, Brogliato B. Planar dynamics of a rigid body system with frictional impacts. II. Qualitative analysis and numerical simulations. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2009,465:2267~2292
- 14 Liu C S, Brogliato B. Impact-contact dynamics in a disc-ball system. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2013, 469(2152):1~20

RESEARCH ON DISCRETIZATION OF LINE IMPACT IN ROCKING BLOCK*

Zhang Hongjian^{1†} Zhuang Fangfang² Wang Chen¹ Ji Baofeng¹ Shi Yuhong¹

(1. Beijing Institute of Aerospace Systems Engineering, Beijing 10076, China)

(2. Research & Development Center, China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 10076, China)

Abstract Modeling the dynamics of line impact with the friction in Rocking Block has attracted the attention of scientists for a long time. Firstly, this paper converts the line impact to multi-point impact using discretization principle. Secondly, the multi-point dynamic model is then constructed based on the LZB method. Simulation results show that the LZB method and discretization principle are effective in modeling line impact, and the precision are improved with the increasing number of discrete points.

Key words line impact, multi-point impact, non-smooth dynamics, Rocking Block

Received 13 July 2016, revised 11 September 2016.

* The project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (2015AA7021076), the National Natural Science Foundation of China (11402033), the Young Elite Scientists Sponsorship Program by CAST (2016QNRC001-YESS20160107)

† Corresponding author E-mail: zhanghj@pku.edu.cn