

# 二维离散 Duffing-Holmes 系统的分支与混沌研究

陈志强<sup>†</sup> 王进良 李由

(北京航空航天大学数学与系统科学学院,北京 100191)

**摘要** 通过欧拉方法可将 Duffing-Holmes 方程变换为离散非线性动力学系统,得到标准 Holmes 映射.研究该映射不动点的存在性与稳定性条件,并运用中心流形定理分析映射的 Pitchfork 分支,Flip 分支和 Hopf 分支的存在性,具体给出了发生相应分支所满足的参数条件.此外,证明了映射存在 Marotto 意义下的混沌,最后用数值模拟验证了所得理论结果.

**关键词** Duffing-Holmes 系统, 不动点, 分支, Marotto 混沌, 数值模拟

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-011

## 引言

G.Duffing 在研究具有非线性恢复力项的受迫振动系统时,引入了具有立方恢复力项的非线性振子方程来描述力学问题中的加硬弹簧效应,它的标准化动力学方程就是著名的 Duffing 系统<sup>[1]</sup>.随着分支、混沌理论不断进步与发展,以及计算机应用的深入,出现了许多试验模型来描述这个方程.其中,美国数学家 P.Holmes 提出了一种 Holmes 型 Duffing 方程<sup>[2]</sup>,它的形式如下:

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-\delta y+ax-\beta x^3+I(t) \end{cases} \quad (1)$$

该连续系统的非线性动态,包括稳定性、分支及混沌等,已进行了广泛的研究<sup>[3-5]</sup>.然而在对 Duffing 方程进行 MATLAB 仿真时均采用了离散化的方法,鉴于目前对于离散的 Holmes 型 Duffing 方程的研究工作甚少,因此直接研究离散的 Holmes 型 Duffing 方程的动态行为具有很重要的意义.

本文选取  $I(t) = 0, \beta = 1$ ,利用欧拉方法可得:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t y_n \\ y_{n+1} = (1 - \delta \Delta t) y_n + \alpha \Delta t x_n - \beta \Delta t x_n^3 \end{cases} \quad (2)$$

令  $z_n = x_n + \Delta t y_n$ ,并经过尺度变换上式可化为标准 Holmes 映射<sup>[6]</sup>,其具体形式为:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = ax_n - x_n^3 - by_n \end{cases} \quad a \in R, b \in R \quad (3)$$

本文将针对该映射不动点的存在性、稳定性,局

部分支,包括 Pitchfork、Flip、Hopf 分支(或 Naimark-Sacker 分支)等<sup>[7]</sup>,以及混沌存在性进行理论分析和数值模拟,得到了类似连续系统的复杂动态.所采用的方法与研究 Hénon 映射<sup>[8,9]</sup>类似,但 Hénon 映射只有一个混沌吸引子,而 Holmes 映射由于具有立方项,会同时形成两个对称的混沌吸引子,因此,Holmes 映射的动态将更为复杂.

## 1 系统不动点的存在性与稳定性

首先,映射(3)的不动点  $z^*(x^*, y^*)$  满足如下方程:

$$\begin{cases} x = y \\ y = ax - x^3 - by \end{cases} \quad (4)$$

解得  $Z^* = (0, 0)$  或  $(x^\pm, y^\pm)$ , 其中  $x^\pm = y^\pm = \pm\sqrt{a-b-1}$ .记  $a_0 = b+1$ ,可得如下定理:

### 定理 1.1

(1) 当  $a > a_0$  时,映射(3)有三个不动点:

$$Z^+(x^+, y^+), Z^-(x^-, y^-) \text{ 和 } (0, 0);$$

(2) 当  $a = a_0$  时,映射(3)有三重不动点:

$$Z^+ = Z^- = (0, 0);$$

(3) 当  $a < a_0$  时,映射有唯一不动点  $(0, 0)$ .

下面讨论映射(3)的不动点  $Z^*$  的稳定性.映射(3)在  $Z^*$  点的 Jacobian 矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3x^{*2} + a & -b \end{pmatrix}$$

其特征方程为:

$$\lambda^2 + b\lambda + 3x^{*2} - a = 0 \quad (5)$$

显然,  $|\lambda| < 1$  当且仅当  $\begin{cases} 1 - (3x^{*2} - a) > 0 \\ 1 + 3x^{*2} - a > \pm b \end{cases}$ .

通过对该条件的分析, 可得如下定理:

### 定理 1.2

(1) 映射(3)的不动点  $Z^*$  稳定, 当且仅当  $|b| < 2$  且  $1 + \frac{3b + |b|}{2} < a < 2 + \frac{3}{2}b$ ;

$$2 \text{ 且 } 1 + \frac{3b + |b|}{2} < a < 2 + \frac{3}{2}b;$$

(2) 映射(3)的不动点  $(0, 0)$  稳定, 当且仅当  $|b| < 2$  且  $-1 < a < 1 - |b|$ .

## 2 系统分支的类型与稳定性

本节以  $a$  为分支参数, 分别给出映射(3)在不动点  $Z^*$  处的 Pitchfork 分支, Flip 分支和 Hopf 分支的充分条件.

### 2.1 Pitchfork 分支

当  $a = a_0$  时,  $(0, 0)$  处的 Jacobian 矩阵的特征方程为:

$$\lambda^2 + b\lambda - b - 1 = 0 \quad (6)$$

其特征值为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -(b+1)$ . 显然  $|\lambda_2| \neq 1$  当且仅当  $b \neq 0, -2$ , 并且当  $-2 < b < 0$  时,  $|\lambda_2| < 1$ .

$$\text{令 } \begin{cases} \bar{x} = x - 0 \\ \bar{y} = y - 0 \\ \bar{a} = a - a_0 \end{cases}, \text{ 映射(3)变为:}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{a} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ b+1 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{a} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(\bar{x}, \bar{a}, \bar{y}) \end{pmatrix}$$

其中  $f(\bar{x}, \bar{a}, \bar{y}) = \bar{a}\bar{x} - \bar{x}^3$ .

$$\text{作变换 } \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{a} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = T_p \begin{pmatrix} u \\ \mu \\ v \end{pmatrix}, \text{ 其中 } T_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -b-1 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

上述映射变为:

$$\begin{pmatrix} u \\ \mu \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \mu \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{g(u, \mu, v)}{b+2}$$

其中  $g(u, \mu, v) = \mu(u+v) - (u+v)^3$ .

设  $(u, \mu, v) = (0, 0, 0)$  处的中心流形为:  $W^c(0) = \{(u, \mu, v) | v = h(u, \mu), h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0\}$ .

不妨设  $h(u, \mu) = \alpha u^2 + \beta \mu u + \gamma \mu^2 + O(3)$ ,  $O(3)$  表示所有次数高于的余项和. 由中心流形的不变性

知:

$$\begin{aligned} & \alpha \left( u + \frac{g}{b+2} \right)^2 + \beta \mu \left( u + \frac{g}{b+2} \right) + \gamma \mu^2 + O(3) \\ & = (-b-1)h - \frac{g}{b+2} \end{aligned} \quad (7)$$

比较两边系数可得  $\alpha = \gamma = 0, \beta = -\frac{1}{(b+2)^2}$ .

将上述映射限制到中心流形为:

$$u \rightarrow F(u, \mu) \quad (8)$$

其中  $F(u, \mu) = u + \frac{g(u, \mu, h(u, \mu))}{b+2}$ .

经计算可得:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0, 0) = 1$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \mu}(0, 0) = \frac{1}{b+2} \neq 0$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial u^3}(0, 0) = \frac{-6}{b+2} \neq 0$$

特别地, 当  $-2 < b < 0$  时,  $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \mu}(0, 0) > 0$ .

于是得到如下定理:

**定理 1.3** 如果  $b \neq 0, -2$  且  $a = a_0$ , 则映射(3)在不动点  $(0, 0)$  处经历 Pitchfork 分支. 当  $a > a_0$  且  $-2 < b < 0$  时, 映射(3)出现两个新的稳定不动点  $Z^+$  和  $Z^-$ .

### 2.2 Flip 分支

首先以  $Z^+$  为例讨论 Flip 分支, 类似可讨论  $Z^-$  处与  $(0, 0)$  处的 Flip 分支.

当  $a = 1 + 2b \equiv a^*$  时,  $Z^+$  处的 Jacobian 矩阵的特征方程为:

$$\lambda^2 + b\lambda + b - 1 = 0 \quad (9)$$

其特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 - b$ . 显然  $|\lambda_2| \neq 1$  当且仅当  $b \neq 0, 2$ , 并且当  $0 < b < 2$  时,  $|\lambda_2| < 1$ .

$$\text{令 } \begin{cases} \bar{x} = x - x^+ \\ \bar{y} = y - y^+ \\ \bar{a} = a - a^* \end{cases}, \text{ 记 } T_F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2\sqrt{b} & 0 \\ 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix},$$

$$\text{作变换 } \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{a} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = T_F \begin{pmatrix} u \\ \mu \\ v \end{pmatrix}, \text{ 则映射(3)变为:}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ \mu \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \mu \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{g(u, \mu, v)}{2-b}$$

其中,  $g(u, \mu, v) = 2\sqrt{b}\mu(-u+\mu+v) - (-u+\mu+v)^3 - 3\sqrt{b}(-u+\mu+v)^2$ . 采取上节中的类似方法可将上述系统约简到中心流形上, 得到映射:

$$u \mapsto F(u, \mu) \quad (10)$$

其中,

$$F(u, \mu) = -u + \frac{g(u, \mu, h(u, \mu))}{2-b}$$

$$h(u, \mu) = \frac{3}{(b-2)\sqrt{b}}u^2 - \frac{4\sqrt{b}}{(b-2)^2}\mu u + \frac{1}{(b-2)\sqrt{b}}\mu^2 + O(3)$$

经计算可得:

$$k_1 = \frac{\partial F}{\partial \mu}(0, 0) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(0, 0) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \mu}(0, 0)$$

$$= -\frac{8\sqrt{b}}{b-2} \neq 0$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(0, 0) \right]^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 F}{\partial u^3}(0, 0)$$

$$= \frac{16}{b-2} \neq 0$$

特别地, 当  $0 < b < 2$  时,  $k_1 > 0, k_2 < 0$ .

综上, 可以得到如下定理:

**定理 1.4** 如果  $b \neq 0, 2$  且  $a = a^*$ , 则映射(3)在不动点  $Z^+$  处经历 Flip 分支. 当  $a > a^*$  且  $0 < b < 2$  时, 从  $Z^+$  处分支出不稳定的二周期轨.

### 2.3 Hopf 分支

首先以  $Z^+$  为例讨论 Hopf 分支(Naimark-Sacker 分支), 类似可讨论  $Z^-$  处与  $(0, 0)$  处的 Hopf 分支.

当  $a = \frac{3}{2}b + 2 \equiv a_h$  时, 特征方程(5)在不动点  $Z^+$  处的特征值为:

$$\lambda_{1,2}(a_h) = \frac{-b \pm i\sqrt{4-b^2}}{2} \quad (11)$$

显然, 当  $|b| < 2$  时,  $|\lambda_{1,2}(a_h)| = 1, \lambda_{1,2}$  是一对共轭复根.

$$\text{令 } \lambda_{1,2}(a_h) = \rho \pm i\omega, \text{ 其中 } \rho = -\frac{b}{2}, \omega = \frac{\sqrt{4-b^2}}{2},$$

$$|b| < 2. \text{ 易求知 } d = \frac{d|\lambda_{1,2}(a_h)|}{da} = 1 > 0.$$

$$\text{当 } \rho \neq \pm 1, -\frac{1}{2}, 0 \text{ 时, } \lambda_{1,2}^n(a_h) \neq 1, n = 1, 2, 3, 4,$$

即  $b \neq 0, 1, \pm 2$ .

$$\text{令 } \begin{cases} \bar{x} = x - x^+ \\ \bar{y} = y - y^+ \end{cases}, \text{ 记 } T_H = \begin{pmatrix} \rho & \omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 作变换 } \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} =$$

$T_H \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , 则映射(3)变为:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho & -\omega \\ \omega & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix}$$

其中,

$$f(u, v) = -(\omega v + \rho u)^3 - 3\sqrt{\frac{b}{2} + 1}(\omega v + \rho u)^2$$

$$g(u, v) = \frac{\rho}{\omega} \left[ (\omega v + \rho u)^3 + 3\sqrt{\frac{b}{2} + 1}(\omega v + \rho u)^2 \right]$$

经计算可得:

$$k = -\text{Re} \left[ \frac{(1-2\lambda)\bar{\lambda}^2}{1-\lambda} \xi_{11}\xi_{20} \right] - \frac{1}{2} |\xi_{11}|^2 - |\xi_{02}|^2 +$$

$$\text{Re} |\bar{\lambda}\xi_{21}| = -3 - \frac{9}{8}b < 0$$

其中,

$$\xi_{20} = \frac{1}{8} [(f_{uu} - f_{vv} + 2g_{uv}) + i(g_{uu} - g_{vv} - 2f_{uv})]$$

$$\xi_{11} = \frac{1}{4} [(f_{uu} + f_{vv}) + i(g_{uu} + g_{vv})]$$

$$\xi_{02} = \frac{1}{8} [(f_{uu} - f_{vv} - 2g_{uv}) + i(g_{uu} - g_{vv} + 2f_{uv})]$$

$$\xi_{21} = \frac{1}{16} [(f_{uuu} + f_{uvv} + g_{uuv} + g_{vvv}) +$$

$$i(g_{uuu} + g_{vvv} - f_{uvv} - f_{vuu})]$$

以上各导数均为在  $(0, 0)$  处的取值.

综上, 可以得到如下定理:

**定理 1.5** 如果  $|b| < 2$  且  $b \neq 0, 1, a = a_h$ , 则映射(3)在不动点  $Z^+$  处经历超临界 Hopf 分支. 当  $a > a_h$  时, 从  $Z^+$  处分支出一个稳定不变环.

### 3 Marotto 混沌的存在性

本节以  $Z^+$  为例给出映射(3)存在 Marotto 混沌<sup>[10]</sup>的条件, 即给出  $Z^+$  为 snap-back-repeller 的条件, 类似可讨论  $Z^-$ .

要求  $Z^+$  为 repeller, 即  $Z^+$  处 Jacobian 矩阵的特征值模大于 1. 对该条件分析整理可得如下引理:

**引理 1.1** 若下列条件之一成立:

$$(1) |b| \leq 2, \text{ 且 } x^+ \in D = \left( \sqrt{\frac{a+1}{3}}, +\infty \right);$$

$$(2) |b| > 2, \text{ 且 } x^+ \in D = \left( \sqrt{\frac{a+|b|-1}{3}}, +\infty \right).$$

则  $Z^+$  为映射 (3) 的 repeller.

下面需要找到一点  $\hat{Z}(x_0, y_0) \in U_{Z^+}$ , 其中  $U_{Z^+} = \{(x, y) \mid x \in D, y \in R\}$ ,  $\hat{Z} \neq Z^+$ , 满足  $F^M(\hat{Z}) = Z^+$  且  $|DF^M(\hat{Z})| \neq 0$ . 现构造映射将该点迭代两次后映射到点  $Z^+$ .

由迭代方程可得:

$$\begin{cases} x_1 = y_0 \\ y_1 = ax_0 - x_0^3 - by_0 \end{cases} \quad (12a)$$

$$\begin{cases} x^+ = y_1 \\ y^+ = ax_1 - x_1^3 - by_1 \end{cases} \quad (12b)$$

其中  $Z_1(x_1, y_1)$  为  $\hat{Z}(x_0, y_0)$  经过 1 次迭代得到的点. 注意到  $Z_1 \neq Z^+$ , 整理可得:

$$\begin{cases} x_0^3 - ax_0 + bx_1 + x^+ = 0 \\ x_1^2 + x^+x_1 + x^{+2} - a = 0 \end{cases} \quad (13)$$

由 (13) 第二式可解得  $x_1 = \frac{1}{2}(-\sqrt{a-b-1} \pm$

$\sqrt{a+3b+3})$ , 其中  $a \geq -3b-3$ . 令  $H(x) = x^3 - ax + bx_1 + x^+$ , 由 (13) 第一式可得  $H(x_0) = 0$ .

不妨设  $x_1 = \frac{-\sqrt{a-b-1} - \sqrt{a+3b+3}}{2}$ , 则  $x_1 \notin D$ . 令

$x_0 = x^+ + \varepsilon$ , 代入 (3) 中第一式可得:

$$\varepsilon^3 + 3x^+\varepsilon^2 + (3x^{+2} - a)\varepsilon + \frac{b}{2}(-\sqrt{a+3b+3} - 3\sqrt{a-b-1}) = 0 \quad (14)$$

所以, 当  $|b|$  充分小且  $3x^{+2} - a = 2a - 3(b+1) \neq 0$  时, 方程 (14) 有绝对值充分小的解  $\varepsilon$ , 从而  $(x_0, y_0) \in D$  且  $(x_0, y_0) \neq (x^+, y^+)$ . 显然, 引理 1.1 中条件 (2) 无法满足  $|b|$  充分小. 由引理 1.1 中的条件 (1) 可得  $a > \frac{3}{2}b + 2$ , 容易验证此时  $3x^{+2} - a \neq 0$  且  $|DF^2(\hat{Z})| = (3x_0^2 - a)(3x_1^2 - a) \neq 0$ .

综上, 存在充分小的  $\delta > 0$ , 当  $|b| < \delta$  且  $a > \max\{\frac{3}{2}b + 2, -3b - 3\} = \frac{3}{2}b + 2$  时, 不动点  $Z^+$  构成 snap-back-repeller. 于是得到如下定理:

**定理 1.6** 如果  $a > \frac{3}{2}b + 2$ , 则存在充分小的  $\delta > 0$

时, 当  $|b| < \delta$  时, 不动点  $Z^+$  构成 snap-back-repeller. 映射 (3) 存在 Marotto 意义下的混沌.

## 4 数值模拟

### 4.1 对不动点的稳定性及其分支的数值模拟

本节给出一些数值模拟验证定理的结论.

(1) 令  $b = -0.5, a_0 = 0.5, a_h = 1.25$ . 由定理 1.2 知, 当  $a \in (-1, 0.5)$  时, 不动点  $(0, 0)$  是稳定的; 当  $a \in (0.5, 1.25)$  时, 不动点  $Z^+$  是稳定的; 由定理 1.3 知, 当  $a = a_0$  时, 映射在不动点  $(0, 0)$  处经历 Pitchfork 分支. 由定理 1.5 知, 当  $a = a_h$  时, 映射在不动点  $Z^+$  处经历 Hopf 分支. 如图 1 所示.

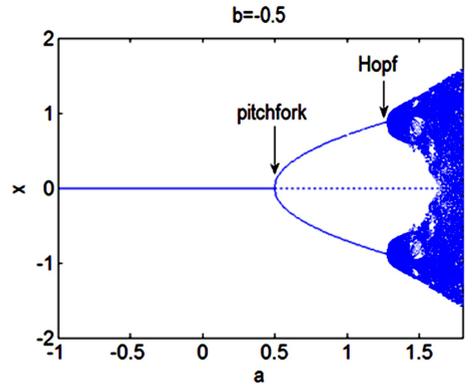


图 1  $b = -0.5$  分支图

Fig.1 Bifurcation diagram when  $b = -0.5$

(2) 令  $b = 0.5, a_0 = 1.5, a^* = 2, a_h = 2.75$ . 由定理 1.2 知, 当  $a \in (-1, 0.5)$  时, 不动点  $(0, 0)$  是稳定的; 当  $a \in (2, 2.75)$  时, 不动点  $Z^+$  是稳定的; 由定理 1.3 知, 当  $a = a_0$  时, 映射在不动点  $(0, 0)$  处经历 Pitchfork 分支. 由定理 1.4 知, 当  $a \in (2, 2.75)$  时, 映射在不动点  $Z^+$  处经历不稳定的 Flip 分支. 由定理 1.5 知, 当  $a = a_h$  时, 映射在不动点  $Z^+$  处经历 Hopf 分支. 如图 2 所示.

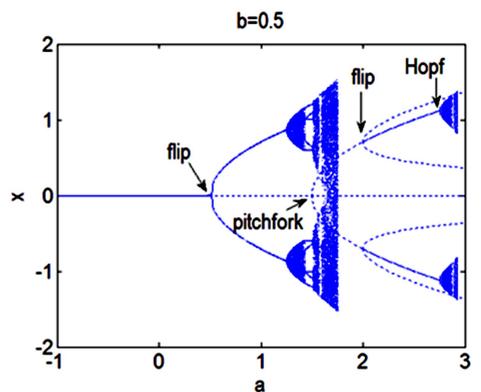


图 2  $b = 0.5$  分支图

Fig.2 Bifurcation diagram when  $b = 0.5$

### 4.2 对混沌的数值模拟

本节利用分支图、最大 Lyapunov 指数图和相图来显示 Marotto 混沌的存在性, 从而验证定理 1.6 的理论结果.

取  $b=0.01, a=2.8 > \frac{3}{2}b+2$ , 则引理 1.1 中(1)的

$D = (1.1255, +\infty)$ . 通过简单的计算可得  $x^+ = 1.3379, x_0 = 1.3502, x_1 = -1.8762$ , 满足  $F^2(\hat{Z}) = Z^+$ ,  $|DF^2(\hat{Z})| = 20.7134 \neq 0$ , 显然  $x^+, x_0 \in D, x_1 \notin D$ , 所以  $Z^+$  为一个 snap-back-repeller. 如图 3, 4, 5 所示.

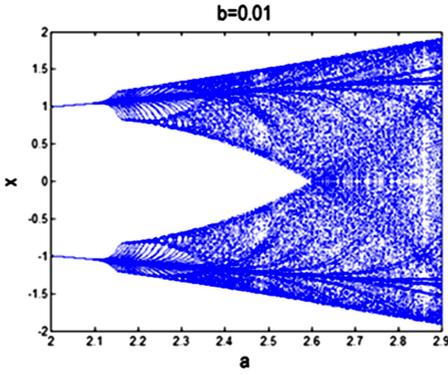


图3  $b=0.01$  混沌分支图

Fig.3 Bifurcation diagram of chaos when  $b=0.01$

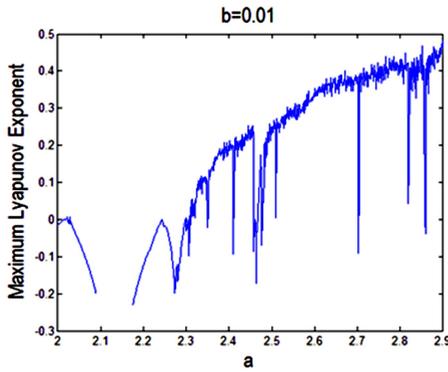


图4  $b=0.01$  最大 Lyapunov 指数图

Fig.4 Maximum Lyapunov exponent diagram when  $b=0.01$

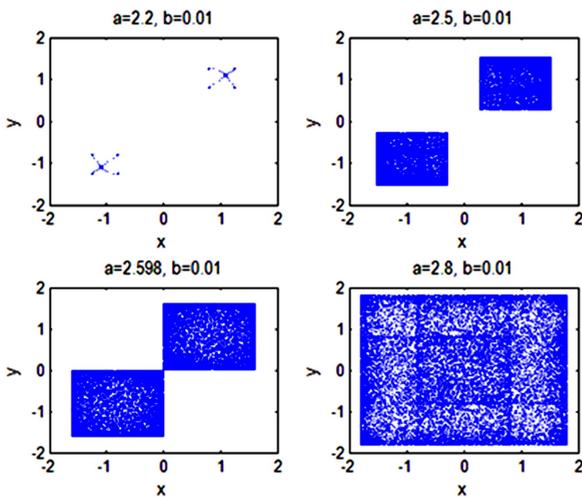


图5 混沌相图

Fig.5 Chaotic phase diagram

## 5 小结

本论文基于 Duffing-Holmes 方程的研究, 首先将方程转换为二维离散非线性动力学系统, 即标准 Holmes 映射, 然后对该映射不动点的存在性进行分析, 找出其稳定域. 之后又详细分析了系统的 Pitchfork、Flip、Hopf 分支和 Marotto 混沌存在性, 最后通过数值模拟验证了所得定理的结论. 结果表明, Holmes 映射最终会同时形成两个对称的混沌吸引子, 其动态比 Hénon 映射更为复杂.

## 参考文献

- 1 Cai M X, Yang J P, Deng J. Bifurcations and chaos in Duffing equation with damping and external excitations. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2014, 30(2):483~504
- 2 王晓东. 基于改进型 Duffing 振子的微弱信号检测研究. *动力学与控制学报*, 2016, 14(3):283~288 (Wang X D. Study of stochastic resonance based on Duffing oscillator. *Journal of Dynamics and Control*, 2016, 14(3):283~288 (in Chinese))
- 3 Li Y, Yang B J, Lin H B, et al. Simulation and theoretical analysis on detection of the frequency of weak harmonic signals based on a special chaotic system. *Acta Physica Sinica-Chinese Edition*, 2005, 54(5):1994~1999
- 4 赵志宏, 杨绍普, 刘永强. 基于 Duffing 振子的随机共振研究. *动力学与控制学报*, 2014, 12(2):160~164 (Zhao Z H, Yang S P, Liu Y Q. Study of stochastic resonance based on Duffing oscillator. *Journal of Dynamics and Control*, 2014, 12(2):160~164 (in Chinese))
- 5 郭太银. 随机激励下 Holmes-Duffing 系统的随机分形与分岔研究[硕士学位论文]. 杭州: 浙江大学航空航大天学院, 2007 (Guo T Y. H Studies on the fractals and bifurcations of a Holmes-Duffing system under random excitations [Master Thesis]. Hangzhou: Zhejiang University of Aeronautics and Astronautics, 2007 (in Chinese))
- 6 王双连. 动力系统中的混沌行为及其控制[博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 2003 (Wang S L. Chaotic motions and controlling chaos in dynamical systems [Ph.D Thesis]. Hangzhou: Zhejiang University, 2003 (in Chinese))
- 7 Wiggins. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Springer-Verlag, 1990
- 8 Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange at-

- tractor. *Communications in Mathematical Physics*, 1976, 50(1): 69~77
- 9 Jensen, Erik. A new construction of the unstable manifold for the measure-preserving Hénon map. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2008, 136(1): 181~193
- 10 Marotto F R. Snap-back repellers imply chaos in  $R^n$ . *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 1978, 63(1): 199~223

## ANALYSIS ON BIFURCATION AND CHAOS OF TWO-DIMENSIONAL DISCRETE DUFFING-HOLMES SYSTEM \*

Chen Zhiqiang<sup>†</sup> Wang Jinliang Li You

(School of Mathematics and Systems Science and LMIB, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract** Duffing-Holmes equation can be transformed into discrete nonlinear dynamical system by means of Euler's method, and the standard Holmes map can be then obtained. The main purpose of this paper is to study the existence and stability of the fixed points of this Holmes map and to analyze the existence of Pitchfork bifurcation, Flip bifurcation and Hopf bifurcation of the map by using the center manifold theorem, and the conditions of the parameters corresponding to specific bifurcations are also given. In addition, it proves that the system is chaotic in the sense of Marotto. Finally, numerical simulations verify these theoretical results.

**Key words** Duffing-Holmes system, fixed point, bifurcation, Marotto's chaos, numerical simulation