第 15 卷第 4 期 2017 年 8 月
1672-6553/2017/15(4)/295-12
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol.15 No.4
Aug. 2017

时滞耦合系统动力学的研究进展*

茅晓晨†
(河海大学力学与材料学院工程力学系, 南京 211100)

摘要 综述了近年来时滞耦合系统动力学的研究进展,重点阐述了稳定性与分岔、同步以及复杂动力学等方面的一些理论和方法的研究结果,对进一步的研究工作提出了若干展望.

关键词 时滞, 耦合系统, 非线性, 稳定性, 分岔, 同步, 复杂动力学

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-034

引言

近年来,航空航天、车辆机械、动力控制、生物医药以及社会学等诸多不同领域中的耦合问题受到了广泛的关注[1-5].例如,绳系卫星是由卫星与航天飞机、宇宙飞船或空间站之间通过绳或链的相互耦合连接组成.又如,高度发达的人类大脑包含着数以亿计的神经细胞,它们通过广泛的耦合连接而构成极为庞大而复杂的生物神经系统.此外,编队飞行、车辆跟驰、砂轮磨床、动力吸振器、汽车悬挂系统、机器人协同控制、激光系统、传染病以及动物种群迁移等方面也都存在着耦合作用[6-13].在许多领域中,耦合系统已成为重要的研究对象.

鉴于信号的采集和有限传输时间、记忆效应以及物理和化学性质等,时滞现象普遍存在于自然科学和工程实际中[1,7,14-17].在耦合系统中,各个子系统之间耦合因素(如:力、电、光、磁以及化学等)通常存在着作用或者传递过程中的时间滞后.例如,生物神经网络是灵巧而复杂的信息处理系统,它接受生物系统内外环境的输入信息,再加以综合分析处理,然后调节控制机体对环境做出适当反应.这些过程中不可避免地存在着细胞时滞、传递时滞和突触时滞等现象.又如,单向车辆跟驰时,当前车辆的速度与前面若干车辆过去一段时间的速度密切相关,过去的一段时间就是时滞,并直接影响着车流的通畅情况.这意味着交通流车辆跟驰过程本质上应包含时滞[9,18].时滞系统的根本特点在于其状态演化趋势(变化率)不仅依赖于系统当前的状态,也依赖于系统过去某一时刻或一段时间的状态.也就是说,系统过去某一段时间的状态对当前状态的影响存在一个时间上的滞后(时滞).这是一类通常由时滞微分方程描述的无穷维动力系统,不论时滞多么短,系统状态空间是无穷维的,解空间是无穷维的,特征方程有无穷多个根等.时滞系统既不同于常微分方程描述的有限维系统,也不同于偏微分方程描述的无限维系统,会产生一些新的性质[7,15].例如,单变量一阶线性时滞系统会出现周期、概周期运动等,而用常微分方程所描述的无时滞系统只有三种最终状态:恒为常数、唯一平衡点或者发散到无穷.如果系统是非线性的,还会发生混沌现象.由于时滞系统的复杂性,人们试图通过忽略时滞来处理实际问题.然而,已有研究表明:尽管时滞量很小,这种不计时滞的做法仍然会导致极其严重的错误结论.例如,在悬臂梁中引入速度负反馈以增大系统的阻尼时,并非反馈增益愈大,系统的稳定性愈好,当反馈增益达到一定的量值时,在一定的初始扰动下系统会出现强烈的自激振动,若不计时滞的影响这种现象根本无法解释[19].

耦合系统的动力学行为既依赖于各个子系统本身的动力特性,又与子系统间的相互作用密切相关.耦合作用可明显改变单个子系统的行为,直接影响耦合后系统的运动特征及运动状态的变化,导致新运动结构的形成.例如,在声学系统中,当相距不远的两架管风琴同时演奏时,会出现各种意想不

2017-02-22 收到第 1 稿,2017-07-10 收到修改稿.
* 国家自然科学基金项目(11472097)、国家留学基金项目、中央高校基本科研业务费专项资金项目(2015B18214)
† 通讯作者 E-mail: maochen@hhu.edu.cn

到的有趣现象:有时一架管风琴的演奏会使另一架的声音减弱甚至消失,有时尽管演奏不同曲目但它们的声调却完全一致.在耦合系统中考虑时滞效应后,其动力学行为变得更为新奇有趣.例如,系统的特征方程会出现一对、两对甚至更多对纯虚根,从而导致 Hopf 分岔、Hopf-Hopf 分岔、Hopf-Hopf-Hopf 分岔等等,在这些分岔相互作用下会诱发诸如周期、概周期、多稳态甚至混沌等运动[16].这些丰富而有趣的动力学现象有着重要的应用价值.例如,时滞耦合神经网络在用于保密通信时,要求网络是混沌的,这样可以利用混沌的高度复杂的伪随机性进行加密.另外,神经网络还能以周期振荡或混沌振荡的方式储存记忆,而人类大脑也有这类现象.

时滞耦合系统动力学是多学科交叉、具有重要研究意义的领域.本文主要介绍近年来时滞耦合系统动力学取得的研究成果,并对进一步的研究展望提出看法.

1 稳定性与分岔

1.1 稳定性

在动力学领域中,稳定性是最基本和最活跃的问题,具有重要的研究价值.例如,用于全局优化的时滞耦合神经网络应该只有一个平衡点,它对应于待求解的目标.为避免伪平衡点和局部最小化的危险,还要求网络的所有状态都趋近于该平衡点,即要求该平衡点必须是全局稳定的.

研究稳定性的方法很多,主要有两类:Lyapunov 泛函法和特征根分析法.Lyapunov 泛函方法主要用于分析全局稳定性,其关键在于 Lyapunov 泛函的构造.随着求解线性矩阵不等式的内点算法的提出以及 MATLAB 软件中 LMI 工具箱的推出,Lyapunov 泛函结合线性矩阵不等式方法得到了大量的应用.然而,虽然 Lyapunov 泛函法对于某些系统可以给出很好的结论,但是构造方法无规律可循,且沿着系统轨线的全导数估计依赖于不等式技巧,所得结果往往过于保守.特征根分析法考察特征根在复平面的分布情况,主要用于确定平衡点的局部稳定性.其主要思路在于:如果平衡点处线性化时滞微分方程的所有特征根都具有负实部,则该方程的零解是渐近稳定的,原方程的零解也是渐近稳定的.然而,由于特征方程含有超越函数,通常具有无穷多个根,难以获得所有特征根的信息.早在1942年,Pontryagin 开始研究超越方程问题,但所提出的原则性方法离实用很远.此后,人们开展了大量研究工作,取得了很多成果,如 Rouché 定理、Cooke 和 Grossman 方法以及 Nyquist 准则等[7,16].胡海岩和王在华及其团队长期从事时滞系统的非线性动力学与控制研究,在稳定性及其失稳机制等领域开展了大量的理论与实验研究,取得了一系列显著的研究进展[7,15,19,20].关于稳定性研究还可参阅文献[6,8,9,21,22].

稳定性的研究工作特别多,其中有一些方法对参数完全确定的系统的稳定性检验是有效的,但对含有待定参数的系统,简单而实用的稳定性判别法还相当少.稳定性切换分析法为简单有效处理这类问题提供了新思路.稳定性切换是指随着参数变化系统平衡点的稳定性可能会由稳定变为不稳定,或者由不稳定变为稳定[7,23].其分析思路在于:当某参数在一给定区间取值时,首先将所有临界稳定(有一支特征根曲线到达虚轴)对应的参数值求出来,再确定在临界参数左右两边是否有不同的稳定性,从而判定两个相邻参数值之间的整个区间对应的稳定性.该方法避免了逐个检验每个参数值对系统的稳定性,可直接检验具有复系数的时滞动力系统的渐近稳定性,还可用于当微分方程的系数依赖于时滞的情形[24,25].作者研究了时滞耦合网络系统的稳定性切换、分岔和多稳态问题,揭示了子系统节点数的奇偶性对整体系统的动力学特性的影响.结果表明,当子系统节点数为偶数时,系统仅存在全时滞稳定区域;当子系统节点数为奇数时,则存在全时滞稳定区域和依赖时滞的稳定区域,并且随着节点数的增多,依赖时滞的稳定区域会不断减小.在依赖时滞的稳定区域中,系统特性与时滞量密切相关,并会出现同步/异步振荡、多稳态等现象[26,27].

1.2 Hopf 分岔

Hopf 分岔是系统失稳的主要原因之一.Hopf 分岔出现时,系统无需从外界获取能量,只由系统的内在反馈形成周期性的往复振动,它对应于工程中的一种"自激振动"现象.Hopf 分岔存在的必要条件是:存在某个系统参数值,使得系统特征方程除了一对简单的共轭纯虚根外,其余特征根均具有负实部;并且该参数值在对应的特征根曲线满足横截条件,则该参数值为 Hopf 分岔点.

Hopf 分岔的主要研究内容有:存在条件、分岔方向、分岔解的求解及其性质等.常用研究方法包

括:

(1)中心流形定理和规范型理论[28-30]:中心流形定理主要用于降维,规范型理论则是对所研究的问题尽可能在等价意义下予以简化.该方法不但可以得到分岔点邻域内解的分类动力学拓扑性质,还可以得到近似周期解的解析形式.这是一种经典方法,具有严密的理论基础,但涉及较深入的数学理论和繁杂的计算.由于需要采用多项式逼近中心流形这样的近似过程,其计算精度未必很高.

(2)多尺度法:无需进行繁琐的中心流形约化.但是,应用的前提必须是弱非线性,而且分岔参数的变化只能限制在分岔点的某个邻域内[31,32].

(3)Fredholm 择一法:该方法先将解在整个解空间展开,再向低维子空间约化.这不同于中心流形方法先降维,再在低维空间内研究约化系统分岔的做法.

(4)增量谐波平衡法:无需进行繁琐的中心流形约化,但需要解一组非线性代数方程,能否得到解强烈依赖于初始迭代值的选取,这完全取决于研究者的经验.

(5)伪振子法:通过构造一个振子且作一次平均化获得在分岔点附近的周期解的主要部分并讨论周期解的稳定性.该方法的计算过程简单、精度很高,已成功应用于分析金属切削、磁悬浮车辆等问题,并推广至复系数时滞系统、高阶 Hopf 分岔问题以及更一般的多变量时滞系统中[7,33].不足之处在于:由于采用平均化过程,导致在求解有些问题时会平均掉某些非线性项的贡献而使方法失效.

(6)摄动-增量方法:在分岔点附近采用摄动法,然后对参数依次增加一个小量,利用“正交”条件得到一个代数方程组,求其解可得所求周期解的修正量.该方法继承了多尺度方法的优点,无需计算中心流形和规范型,并且克服了增量谐波平衡法的缺点,已成功用于计算不同维数耦合网络系统的周期解[34,35].

(7)频域法:采用反馈系统理论,在状态空间中作拉普拉斯变换后在复数域中进行分析,然后利用传递函数来表征原系统产生分岔的横截条件与分岔周期解的稳定性条件,借助频域中的图示 Hopf 分岔定理来确定分岔的性质.相比传统的时域方法而言,利用图示的方法可以避开复杂的数学计算和分析[36].

Hopf 分岔的研究方法还包括特征函数法[37]、弧长路径跟踪算法[38]、离散 Lyapunov 泛函和不变流形理论方法[39]等.

Hopf 分岔是一种局部性质,限制在平衡点附近,也要求在分岔点附近.在 Hopf 分岔点附近,系统动力学行为是简单的,常常出现周期运动.然而,在远离分岔点处,系统是保持原有运动抑或是出现新现象呢？这就需要研究分岔解在大范围的存在性及其特性.相对局部动力学而言,大范围 Hopf 分岔解的研究还处于起步阶段,其主要研究工具是摄动法、喷点不动点定理以及大范围 Hopf 分岔理论.其中,摄动法是一种经典方法,其计算过程和结果简洁且容易理解;喷点不动点定理的优点在于所需要的集合是凸闭集,易于构造,喷射的不动点不是喷点可以保证得到的周期解是非平凡的[40];大范围 Hopf 分岔理论则是建立在等变拓扑度理论基础上的,它依赖于纯拓扑性质,避开了算子和线性泛函微分方程的空间分解理论,适用于中立型和混合型泛函微分方程,并在时滞神经网络等领域中获得了很好的应用[41-43].

1.3　高余维分岔

在实际应用中,时滞耦合系统通常是由大量子系统组成的富含参数的复杂非线性动力系统.这意味着高余维分岔的存在.高余维分岔的研究方法主要有中心流形和规范型方法、摄动法、Lyapunov-Schmidt 方法以及频域法等[44,45].

高余维分岔常常导致复杂动力行为,如多稳态、概周期甚至奇怪吸引子等.徐鉴及其合作者采用中心流形法和摄动增量法针对多种时滞耦合系统开展了高余维分岔、复杂动力学机制以及同步运动等方面的研究,取得了丰硕的研究成果[16,46,49].Campbell 及其合作者研究了时滞耦合系统的余维 2 分岔和余维 3 分岔,揭示了分岔诱发的多种复杂现象,取得了有价值的研究成果[50-52].郭上江等研究了时滞耦合神经网络的 Fold-Hopf 分岔和 Hopf-Hopf 分岔,揭示了分岔导致的周期运动、概周期振荡以及 sphere-like 表面解[53].蒋卫华及其合作者研究了时滞耦合极限环振子和 FitzHugh-Nagumo 神经元的 Double Hopf 分岔和 Bogdanov-Takens 分岔,分析了余维 2 分岔的局部拓扑结构变化,发现了极限环、同宿轨以及三维环面等[54,55].作者研究了时滞耦合神经网络的 Bogdanov-Takens 分岔、Standard/Equivalent Hopf-Standard/Equivalent Pitchfork 分岔相互作用点,揭示了分岔导致的同步/异步振荡、多

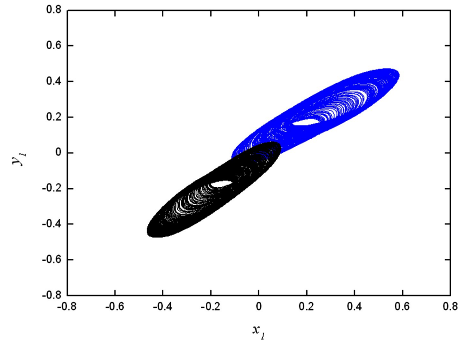
稳态等现象[56].He 等研究了两个耦合时滞神经网络的 Zero-Hopf 分岔特性,揭示了概周期振荡和不同平衡点之间的奇怪吸引子等现象[57].相关研究工作还可参阅文献[58-60].

鉴于时滞、高阶次、非线性等特点,高余维分岔及其导致的复杂动力学机制的研究难度很大,现有研究主要集中于较低余维数分岔,如余维 2 分岔和余维 3 分岔,更高余维数的分岔的研究鲜见报道.随着 DDE-BIFTOOL、XPPAUT 等软件的推陈出新,很多学者从数值模拟的角度研究高余维奇异性及其诱发的动力学现象.然而,仅仅采用数值方法来模拟研究,有时候很难解释模拟中出现的一些行为,比如多稳态.因此,必须运用和发展时滞微分方程理论分析方法来理解各种非线性现象产生的内在机制.

2 混沌及其控制

混沌是非线性动力系统所特有的一种响应形式,可视作是发生在确定性系统中的貌似随机的不规则响应.在现实生活和实际工程技术问题中,混沌现象是无处不在的.例如,在对大脑神经系统研究中,从微观的时滞非线性神经元和神经元耦合网络到宏观的脑电波和脑磁波都发现了混沌现象的存在.和常微分方程系统不同,一阶时滞非线性系统即可产生混沌现象.混沌的研究工作大都采用数值分析方法.时间历程、相图、功率谱、Poincaré 截面、Lyapunov 指数以及分数维等仍是刻划混沌的重要工具.Gilli 发现了具有 2 个神经元的时滞细胞神经网络的双蜗卷混沌现象[61].Addison 等研究了环形道路上交通均匀流模式的稳定性,发现当时滞等其他参数取某一定值时,随着车流密度的变化,会发生交通混沌振荡,导致车辆的运动不可预测.这与交通系统对初始条件极端敏感这一事实相一致[62,63].徐旭及其合作者发现了环状和小世界效应等情形下时滞耦合神经网络的多稳态、概周期振荡、混沌吸引子等现象,讨论了倍周期分岔和环面破裂通向混沌的道路[64-66].作者研究了大规模复杂时滞耦合 FitzHugh - Nagumo 神经元系统,揭示了各类共存的周期运动、混沌振荡共存及其演化过程,如图 1 所示[67].更多研究还可参阅文献[68,69].

混沌控制是近三十多年来兴起的研究领域,主要方法包括:OGY 方法、时滞反馈控制法、参数变分控制法、状态反馈控制法、自适应控制法、最优控制法、鲁棒控制法以及脉冲控制法等[70].其中,时滞反馈控制法直接将系统的输出信号取出一部分经过时间延迟后再反馈到混沌系统中作为控制信号.该方法不需要相空间的重构,而且控制的施加不必等待系统状态接近目标状态,省去了跟踪计算,因而受到广泛重视.20 世纪 90 年代,Pecora 和 Carroll 提出在不同初始条件下,相同的混沌子系统间可通过某种驱动以实现混沌轨道的同步化,并首次在电子实验中观察到了混沌同步现象.混沌同步可看作一类让被控系统混沌轨道按目标系统轨道运动的控制问题.Boccaletti 等综述了混沌同步的研究进展[71].Illing 等从实验中观测到具有时滞互耦合和自反馈的链式非线性光电振荡器的混沌同步[72].Banerjee 等研究了非线性时滞兴奋性耦合系统的混沌和超混沌的预测同步、完全同步以及滞后同步等问题,并通过电路实验验证了这些现象[73].Heiligenthal 等考察了时滞耦合半导体激光器网络,发现了通过增加耦合强度可使系统由弱混沌变为强混沌,再由强混沌变为弱混沌[74].Shahverdiev 等研究了不同时滞耦合系统(如 Mackey-Glass、jo-



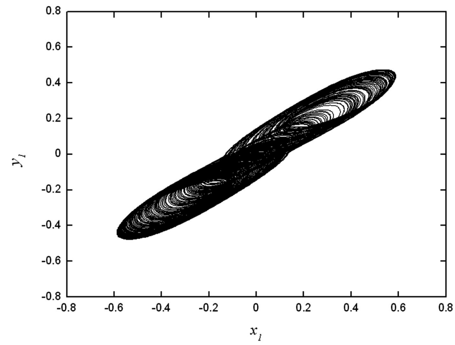


图 1 时滞耦合 FitzHugh - Nagumo 神经元系统的混沌现象[67]

(a)两个混沌吸引子共存;(b)混沌吸引子

Fig.1 Chaotic phenomena of time-delay coupled FitzHugh-Nagumo neurons

(a) Two coexisting separated chaotic attractors; (b) A chaotic attractor sephson junctions、激光器等)的多种混沌同步问题[4,75,76].相关研究还可参阅文献[77,78].混沌同步的主要方法有 Pecora 和 Carroll 方法、主动-被动同步法、反馈控制法、参数扰动法以及预测-反馈法等.许多混沌同步方法可以用于抑制混沌,反之亦然.也就是说,混沌控制和混沌同步的方法是相通的.

3　耦合系统的典型动力行为

在耦合系统中,尽管各个子系统有其自身的特性,但耦合作用可直接影响耦合后系统的运动特征及运动状态的变化,从而导致新运动结构的形成.例如,在一定条件下,耦合作用可使各个子系统的状态输出逐渐趋于相同,即出现了完全同步现象.已有研究表明,耦合系统有着许多有趣的动力学行为,如各类同步运动、不同同步状态的转迁、振幅死亡、螺旋波以及随机共振等.其中,同步及其转迁和振幅死亡现象最为常见.

3.1　同步及其转迁

同步活动是自然界和人类社会中常见的现象,如摆钟的同时摆动、萤火虫的集体闪光、夏日夜晚青蛙的齐鸣、心肌细胞和大脑神经网络的协调波动、观众鼓掌频率的渐趋一致等等[79].探究同步及其形成机制是一个极为值得研究的课题.例如,自 Gray 首次发现了猫的初生视觉皮层中神经元之间能呈现同步振荡行为以来,许多相关的生理实验也证实了神经系统中存在着群体同步和去同步及复杂放电模式转迁的动力学行为,这些行为的变化与神经系统正常和病态功能密切相关[80,81].广泛意义上的同步包括完全同步、相同步、频率同步以及状态同步等,而状态同步又包括广义同步、滞后同步、预测同步等.同步问题的理论分析思路主要是考察同步流形之差,将问题转化为对平凡平衡点稳定性分析.理论上较为成熟的方法仍然是 Krasovskii-Lyapunov 泛函分析法,但相当多的研究工作采用数值分析法.

在耦合系统中,耦合参数的变化可能会引起系统时空动力学的变化,这种现象称为同步转迁.同步转迁是指耦合系统从一种时空组织状态切换到另一种时空组织状态,即由不规则的时空激发模式转迁到几乎同时激发的时空模式[82].例如,Dhamala 等研究发现,电耦合的多尺度 Hindmarsh-Rose 神经元系统的同步转迁是由簇同步(慢子系统的同步)过渡到峰同步(快子系统的同步)[83].已有实验分析表明,同步模式的转迁可能与联想记忆或者某类疾病发作和消失存在着密切的关联.然而,从理论上分析同步转迁的产生机制仍然极具挑战性,已有工作大都采用数值分析方法.

同步及其转迁运动是耦合系统的重要动力学行为,也是近年来新兴的非常活跃的研究方向.从最简单的两耦合模型到大规模复杂耦合系统,从恒同系统到非恒同系统,人们已经开展了大量深入细致的研究,取得了许多重要成果.例如,Rossoni 等研究了具有时滞和类脉冲作用的两个耦合的 Hodgkin-Huxley 神经元,发现由耦合强度和时滞所组成的参数平面中有两个区域是同步的,另一个区域是不同步的[84].Gu 等分析了抑制性耦合神经元系统的放电行为,发现了时滞可诱发丰富的不同同步模式[85].Zheng 和 Wang 考察了快慢耦合 Hindmarsh-Rose 神经元系统,发现时滞可以抑制放电或导致其他复杂行为[86].作者研究了含有多个子系统的大规模复杂时滞耦合网络系统,发现时滞对于各类同步/异步振荡模式以及多稳态运动有显著影响[11,87,88].Selivanov 等针对时滞耦合 Stuart-Landau 振子网络系统,给出了自动调节耦合相位的自适应算法,并实现了不同同步状态的切换选择[89].Schöll 及其合作者在时滞耦合振子、神经元系统、半导体激光系统以及复杂网络等领域开展了关于各类同步运动、转迁机制、振幅死亡以及复杂动力学等方面的研究工作,取得了许多有价值的研究进展[1,12,90].陆启韶和王青云及其合作者持续多年研究耦合神经元系统的各种复杂放电同步行为及其转迁的机理,取得了一系列重要成果[3,82,91,92].曹进德及其合作者在时滞网络的各类稳定性、控制与优化、同步及其应用等领域开展了大量的研究工作[22,93].周进及其合作者深入研究了多种复杂时滞动力网络的同步动力学与脉冲控制等问题[95,96].马军及其合作者针对自突触、电磁效应、噪声等复杂条件下时滞耦合神经元系统的群体动力学、时空斑图优化控制等方面取得了众多成果[96,97].相关研究工作还可参阅文献[98-103].

3.2　振幅死亡

振幅死亡是指系统间通过相互作用演化到一个平衡点,并在耦合的作用下停止振荡,即系统被稳定到一个零振幅状态(平凡的平衡点).在耦合系

统中,当耦合强度较小时,系统可能出现各自独立的演化、同步、锁相等现象;但当耦合强度增大时,则可能出现振幅死亡.时滞和失配(频率或参数)是产生振幅死亡的两个主要条件.已有研究表明,振幅死亡的产生途径主要有 saddle node 分岔和 Hopf 分岔等[5,104,105].

在耦合系统中,振幅死亡现象经常出现,并在数学、物理学、生物学、化学等领域中得到了广泛的研究和应用,如心脏起搏器的心律失常、电路、化学反应等[5,104].Saxena 等综述了振幅死亡的研究进展[5].Reddy 等研究了时滞耦合的两个极限环系统,发现即使两个系统具有完全相同的频率,时滞耦合仍然能够导致振幅死亡的产生,并在耦合的非线性电路实验中观察到这一现象[106,107].Sharma 等研究了时滞和参数失配导致的耦合混沌系统的振幅死亡,并通过 Chua 电路进行了验证[104].Atay 发现分布时滞耦合能够扩大振幅死亡出现的参数空间,并且能将出现振幅死亡的参数空间连接起来[108].Gjurchinovski 等研究了变时滞的耦合 Stuart-Landau 极限环振子,比较分析了无自反馈、全部节点自反馈以及单节点自反馈这三种情形下的振幅死亡.有趣的是,在某些参数区间上,单节点自反馈也会导致规模不大的网络产生振幅死亡[109].Konishi 等给出了时滞耦合非线性振子的振幅死亡的存在条件,预测了死区边界,并通过电路实验得以验证[110].Huddy 等提出了采用主稳定岛研究时滞耦合混沌振子的振幅死亡问题,并发现了非零时滞是镇定振幅死亡的必要条件[111].Song 等揭示了时滞耦合 van del Pol 振子的振幅死亡、同步和锁相运动及其相互切换现象[112].更多相关研究还可参阅文献[113-115].

4 时滞对耦合系统动力学的影响

时滞对耦合系统的动态性质有很大的影响.在稳定性方面,时滞常常导致系统失稳,产生各种形式的分岔,诱发周期振荡、多稳态、概周期甚至混沌运动等.例如,无时滞 Hopfield 神经网络会向平衡点收敛,但是时滞的出现可导致稳定的非线性振动,产生不同的网络计算性能.在混沌运动方面,时滞会导致一阶非线性动力系统产生混沌现象,而对于无时滞系统而言,一阶系统和二阶自治系统都不可能产生混沌.时滞还能导致系统产生具有多个正 Lyapunov 指数的高维奇怪吸引子,而无需受系统维数的限制.在同步及其转迁动力学方面,时滞能增加或抑制耦合系统同步,不仅可以诱导耦合系统出现同相和反相同步的转迁,还能诱导不同耦合类型系统的相位同步转迁,以及不同类型同步之间的转迁等.此外,时滞还是振幅死亡现象产生的重要诱因.

利用时滞可以有效调控耦合系统的动态行为.例如,尽管在很多情况下,时滞对系统稳定性是不利因素,但适当大小的时滞却有利于改善系统的稳定性.不仅如此,巧妙的调节时滞量还可使系统产生各种同步/异步周期振荡、多稳态振荡以及混沌运动等,并可实现这些不同振动模式之间进行切换[26,67].在一定条件下,时滞可视作"开关"来调控系统行为以达到期望的动力学行为.另一方面,自从 Pyragas 提出的时滞状态反馈控制成功应用于混沌控制以来,主动利用时滞状态反馈已成为有效调控系统性能的重要途径.例如,在受简谐激励的单自由度振动系统上附加一个固有频率等于外激励频率的子系统(动力吸振器)可消除或抑制原有振动,而为了扩展动力吸振器的工作频带,需主动对其引入时滞状态反馈[6].

5 实验研究

时滞耦合系统动力学的研究大都集中在理论分析和数值计算上,实验研究较少.近年来,采用实验来佐证已有研究成果和发现新现象成为研究热点[21,30,72,104,116-120].例如,由于生物神经系统高度复杂,直接开展生理实验的难度很大,而采用电路模拟生物神经元和神经网络的做法为生命科学的发展提供了新途径.

在实验中,常常需要设计时滞电路,其构建方法主要有滤波法、信号处理法等.滤波法通常由滤波电路级联组成,如 T 型 LCL 滤波器级联电路、RC 滤波器级联电路等.以 T 型 LCL 滤波器为例,它主要由电感和电容构成,可使信号在选定的频带内无损通过,但通带外的其他信号会被很大程度的衰减.其不足之处在于:受信号频率限制,时滞量不易调节,精度差,且难以集成[118].信号处理法是将原始的模拟信号通过数模转换器(ADC)转换为数字信号,再由信号处理器(如单片机、DSP 等)进行延迟操作,最终通过数模转换器(DAC)输出.该方法

精度很高,可大范围实时调节多路时滞量,便于电路集成,适用范围广泛.

作者对时滞耦合神经网络系统开展了电路实验研究,实验结果与理论分析和数值计算的结果吻合得非常好[21,30,42].该实验平台基于 DSP 技术和非线性电路构建,主要包括时滞电路模块和神经网络电路模块,如图 2 所示[21,30,42].时滞电路采用 DEC2812 电路板中的 TMS320F2812(含 ADC 模块)芯片和 DAC57724 芯片构成,可实现在大范围内实时调控多路不同的时滞量.神经网络电路主要基于 Hopfield 神经元电路和神经元间非线性转换函数电路组成.

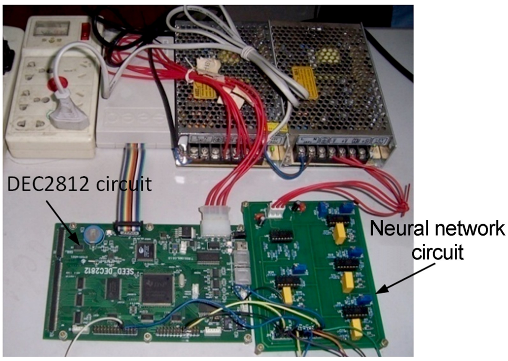


图 2　时滞神经网络的电路实验[21,30,42]

Fig.2　An electronic circuit implementation of a coupled neural network with time delays

6　展望

时滞耦合系统动力学是一门新兴的交叉学科,其理论涉及数学、力学、生命科学、信息科学以及社会学等诸多学科领域,其应用也不断渗透到模式识别、联想记忆、自动控制、智能检测以及组合优化等方面.

关于时滞耦合系统动力学的研究,人们已经开展了大量深入细致的工作,取得了许多有意义的研究成果,并在众多领域得到了应用.今后一个时期,时滞耦合系统动力学的发展前景广阔,以下一些问题和发展趋势是值得关注的.

(1)在研究对象方面:现有文献中很多研究简单模型,如两耦合、三耦合或少量耦合等情形,相应的时滞微分方程形式比较简单,多针对光滑、低阶次、单自变量、常系数、单时滞、弱非线性等.然而,真实系统并非如此,常常会出现高阶次、变时滞、强耦合、变参数、强非线性等情形.因此,必须将研究对象由简单模型向实际系统拓展.然而,由于研究方法难以直接采用离散系统(常微分方程)和连续体系统(偏微分方程)的已有成果,并且系统行为复杂独特,因而,现今该领域还没有形成研究手段或者方法上的理论框架.今后一个时期,很重要的研究方向是深入发掘时滞耦合动力系统的本质特征,发展有针对性、形式简单且便于应用的研究方法和工具.

(2)在研究内容方面:相比于稳定性和 Hopf 分岔而言,现有文献较少涉及多稳态、概周期甚至混沌等复杂行为及其形成机制的研究.然而,在实际应用中,时滞耦合系统通常是由大量子系统组成的复杂非线性动力系统,其动力学行为绝不仅限于简单运动(如平衡态、周期振荡等),必须着眼于探究复杂动力学特性及其形成机制.同时,研究应向大范围或全局动力学领域拓展,不能长期停留于局部动力行为.此外,发掘时滞耦合系统的独有动力学特性是一个很值得关注的课题.例如,时滞耦合系统还有哪些不为人知的新现象?产生的机制是什么?如何有效利用?因而,在今后的研究中,复杂动力行为和独特新现象及其内在机理的研究值得期待.

(3)在实验研究方面:现有文献主要集中在理论分析和数值计算上,实验研究偏少.开展实验研究不仅可以佐证理论分析和数值计算结果,而且能够改进和完善研究方法和手段.更重要的是,许多新现象都是通过实验率先发现的.因此,今后工作要重视实验研究,特别注重开展以发现新现象为目标的创新性实验.

致谢　在本文写作过程中,王在华教授提出了许多宝贵的建议,作者表示由衷的感谢.

参　考　文　献

1　Flunkert V, Fischer I, Schoell E. Dynamics, control and information in delay - coupled systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2013, 371(1999): 20120465

2　Strogatz S H. Exploring complex networks. *Nature*, 2001, 410(6825): 268~276

3　陆启韶, 刘深泉, 刘锋等. 生物神经网络系统动力学与功能研究. 力学进展, 2008, 38(6): 766~793 (Lu

Q S, Liu S Q, Liu F, et al. Research on dynamics and functions of biological neural network systems. *Advances in Mechanics*, 2008, 38(6): 766~793 (in Chinese))

4 Shahverdiev E A, Shore K A. Chaos synchronization regimes in multiple-time-delay semiconductor lasers. *Physical Review E*, 2008, 77(5): 057201

5 Saxena G, Prasad A, Ramaswamy R. Amplitude death: The emergence of stationarity in coupled nonlinear systems. *Physics Reports*, 2012, 521 (5): 205~228

6 Olgac N, Elmali H, Hosek M, et al. Active vibration control of distributed systems using delayed resonator with acceleration feedback. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1997, 119(3): 380~389

7 王在华, 胡海岩. 时滞动力系统的稳定性与分岔:从理论走向应用. 力学进展, 2013, 43(1): 3~20 (Wang Z H, Hu H Y. Stability and bifurcation of delayed dynamic systems: from theory to application. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1): 3~20 (in Chinese))

8 郑远广, 王在华. 含时滞的快-慢耦合系统的动力学研究进展. 力学进展, 2011, 41(4): 400~410 (Zheng Y G, Wang Z H. Advances in dynamics of slow-fast systems with time delay. *Advances in Mechanics*, 2011, 41(4): 400~410 (in Chinese))

9 徐鉴, 徐荣改. 时滞车辆跟驰模型及其分岔现象. 力学进展, 2013, 43(1): 29~38 (Xu J, Xu R G. Review of time-delayed car following models and bifurcation phenomena. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1): 29~38 (in Chinese))

10 Orosz G, Moehlis J, Bullo F. Robotic reactions: Delay-induced patterns in autonomous vehicle systems. *Physical Review E*, 2010, 81(2): 025204

11 Mao X C, Wang Z H. Stability, bifurcation, and synchronization of delay-coupled ring neural networks. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 84(2): 1063~1078

12 Kantner M, Yanchuk S. Bifurcation analysis of delay-induced patterns in a ring of Hodgkin-Huxley neurons. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2013, 371(1999): 20120470

13 Li C, Xu C, Sun W, et al. Outer synchronization of coupled discrete-time networks. *Chaos*, 2009, 19 (1): 013106

14 Stepan G. Delay effects in the human sensory system during balancing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2009, 367(1891): 1195~1212

15 胡海岩, 王在华. 论迟滞与时滞. 力学学报, 2010, 42(4): 740~746 (Hu H Y, Wang Z H. On hysteresis and retardation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(4): 740~746 (in Chinese))

16 徐鉴, 裴利军. 时滞系统动力学近期研究进展与展望. 力学进展, 2006, 36(1): 17~30 (Xu J, Pei L J. Advances in dynamics for delayed systems. *Advances in Mechanics*, 2006, 36(1): 17~30 (in Chinese))

17 蔡国平, 陈龙祥. 时滞反馈控制的若干问题, 力学进展, 2013, 43(1): 21~28 (Cai G P, Chen L X. Some problems of delayed feedback control. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1): 21~28 (in Chinese))

18 Sipahi R, Atay F M, Niculescu S. Stability of traffic flow behavior with distributed delays modeling the memory effects of the drivers. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2009, 68(3): 738~759

19 Hu H Y, Wang Z H. Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback. Heidelberg: Springer-Verlag, 2002

20 Hu H Y, Wang Z H. Singular perturbation methods for nonlinear dynamic systems with time delays. *Chaos Solitons and Fractals*, 2009, 40(1): 13~27

21 Mao X C, Hu H Y. Stability and Hopf bifurcation of a delayed network of four neurons with a short-cut connection. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, 18(10): 3053~3072

22 Cao J D, Song Q K. Stability in Cohen-Grossberg-type bidirectional associative memory neural networks with time-varying delays. *Nonlinearity*, 2006, 19(7): 1601~1617

23 Beretta E, Kuang Y. Geometric stability switch criteria in delay differential systems with delay dependent parameters. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2002, 33(5): 1144~1165

24 Li J, Zhang L, Wang Z. Two effective stability criteria for linear time-delay systems with complex coefficients. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2011, 24(5): 835~849

25 Wang Z H. A very simple criterion for characterizing the crossing direction of time-delay systems with delay-dependent parameters. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, 22(3): 1250048

26 Mao X C. Stability switches, bifurcation, and multi-stability of coupled networks with time delays. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218(11): 6263~6274

27 Mao X C. Stability and Hopf bifurcation analysis of a pair of three-neuron loops with time delays. *Nonlinear Dynam-*

ics, 2012, 68(1-2): 151~159

28 Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. Theory and application of Hopf bifurcation. Cambridge: Cambridge University Press, 1981

29 Faria T, Magalhaes L T. Normal forms for retarded functional differential equations with parameters and applications to Hopf bifurcation. *Journal of Differential Equations*, 1995, 122(2): 181~200

30 Mao X C, Hu H Y. Hopf bifurcation analysis of a four-neuron network with multiple time delays. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 55(1-2): 95~112

31 Nayfeh A. Order reduction of retarded nonlinear systems-the method of multiple scales versus center-manifold reduction. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 51(4): 483~500

32 Wang H L, Hu H Y. Bifurcation analysis of a delayed dynamic system via method of multiple scales and shooting technique. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, 15(2): 425~450

33 Wang Z H, Hu H Y. Pseudo-oscillator analysis of scalar nonlinear time-delay systems near a Hopf bifurcation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, 17(8): 2805~2814

34 Xu J, Chung K W, Chan C L. An efficient method for studying weak resonant double Hopf bifurcation in nonlinear systems with delayed feedbacks. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2007, 6(1): 29~60

35 Xu J, Chung K W. A perturbation-incremental scheme for studying Hopf bifurcation in delayed differential systems. *Science in China Series E*, 2009, 52(3): 698~708

36 Moiola J L, Chen G. Hopf bifurcation analysis: a frequency domain approach. Singapore: World Scientific Publishing, 1996

37 Ucar A. On the chaotic behaviour of a prototype delayed dynamical system. *Chaos Solitons and Fractals*, 2003, 16(2): 187~194

38 Raghothama A, Narayanan S. Periodic response and chaos in nonlinear systems with parametric excitation and time delay. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 27(4): 341~365

39 Chen Y, Wu J. Minimal instability and unstable set of a phase-locked periodic orbit in a delayed neural network. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1999, 134(2): 185~199

40 Nussbaum R D. Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1974, 101(1): 263~306

41 Wu J H. Symmetric functional differential equations and neural networks with memory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1998, 350(12): 4799~4838

42 Mao X C, Hu H Y. Dynamics of a delayed four-neuron network with a short-cut connection: analytical, numerical and experimental studies. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2009, 10(4): 523~538

43 Xu X. Local and global Hopf bifurcation in a two-neuron network with multiple delays. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, 18(4): 1015~1028

44 Faria T, Magalhaes L T. Normal forms for retarded functional differential equations and applications to Bogdanov-Takens singularity. *Journal of Differential Equations*, 1995, 122(2): 201~224

45 Jiang H, Song Y. Normal forms of non-resonance and weak resonance double Hopf bifurcation in the retarded functional differential equations and applications. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 266: 1102~1126

46 Xu J, Jiang S. Delay-Induced Bogdanov-Takens bifurcation and dynamical cassifications in a slow-fast flexible joint system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, 25(9): 1550121

47 Ge J H, Xu J. Double Hopf bifurcation in a four-neuron delayed system with inertial terms. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 82(4): 1969~1978

48 Zhen B, Xu J. Fold-Hopf bifurcation analysis for a coupled Fitzhugh-Nagumo neural system with time delay. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, 20(12): 3919~3934

49 Song Z G, Xu J. Codimension-two bursting analysis in the delayed neural system with external stimulations. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 67(1): 309~328

50 Shayer L P, Campbell S A. Stability, bifurcation, and multistability in a system of two coupled neurons with multiple time delays. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2000, 61(2): 673~700

51 Campbell S A, Ncube I, Wu J. Multistability and stable asynchronous periodic oscillations in a multiple-delayed neural system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2006, 214(2): 101~119

52 Campbell S A, Yuan Y. Zero singularities of codimension two and three in delay differential equations. *Nonlinearity*, 2008, 21(11): 2671~2691

53 Guo S J, Chen Y M, Wu J H. Two-parameter bifurcations

in a network of two neurons with multiple delays. *Journal of Differential Equations*, 2008, 244(2): 444~486

54 Li Y, Jiang W. Hopf and Bogdanov-Takens bifurcations in a coupled FitzHugh-Nagumo neural system with delay. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 65(1-2): 161~173

55 Li Y, Jiang W, Wang H. Double Hopf bifurcation and quasi-periodic attractors in delay-coupled limit cycle oscillators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, 387(2): 1114~1126

56 Mao X C, Hu H Y. Stability and bifurcation analysis of a network of four neurons with time delays. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2010, 5(4): 1~6

57 He X, Li C, Huang T, et al. Codimension two bifurcation in a delayed neural network with unidirectional coupling. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2013, 14(2): 1191~1202

58 Jiang H, Zhang T, Song Y. Delay-Induced double Hopf bifurcations in a system of two delay-coupled van der Pol-Duffing oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, 25(4): 1550058

59 Guo Y, Jiang W, Niu B. Multiple scales and normal forms in a ring of delay coupled oscillators with application to chaotic Hindmarsh-Rose neurons. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 71(3): 515~529

60 Peng M, Huang L, Wang G. Higher-codimension bifurcations in a discrete unidirectional neural network model with delayed feedback. *Chaos*, 2008, 18(2): 023105

61 Gilli M. Strange attractors in delayed cellular neural networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 1993, 40(11): 849~853

62 Addison P S, Low D J. A novel nonlinear car-following model. *Chaos*, 1998, 8(4): 791~799

63 Low D J, Addison P S. A nonlinear temporal headway model of traffic dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 16(2): 127-151

64 Xu X. Complicated dynamics of a ring neural network with time delays. *Journal of Physics A*, 2008, 41(3): 035102

65 Xu X, Hu H Y, Wang H L. Dynamics of a two-dimensional delayed small-world network under delayed feedback control. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2006, 16(11): 3257~3273

66 Xu X, Wang Z H. Effects of small world connection on the dynamics of a delayed ring network. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 56(1-2): 127~144

67 Mao X C. Complicated dynamics of a ring of nonidentical FitzHugh-Nagumo neurons with delayed couplings. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(4): 2395~2406

68 Lu H T. Chaotic attractors in delayed neural networks. *Physics Letters A*, 2002, 298(2-3): 109~116

69 Kinzel W. Chaos in networks with time-delayed couplings. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2013, 371(1999): 20120461

70 Schöll E, Schuster H G. Handbook of chaos control: Wiley-VCH, 2008

71 Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, et al. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 2002, 366(1-2): 1~101

72 Illing L, Panda C D, Shareshian L. Isochronal chaos synchronization of delay-coupled optoelectronic oscillators. *Physical Review E*, 2011, 84(1): 016213

73 Banerjee T, Biswas D, Sarkar B C. Anticipatory, complete and lag synchronization of chaos and hyperchaos in a nonlinear delay-coupled time-delayed system. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 72(1-2): 321~332

74 Heiligenthal S, Dahms T, Yanchuk S, et al. Strong and weak chaos in nonlinear networks with time-delayed couplings. *Physical Review Letters*, 2011, 107(23): 234102

75 Shahverdiev E M, Nuriev R A, Hashimov R H, et al. Chaos synchronization between the Mackey-Glass systems with multiple time delays. *Chaos Solitons and Fractals*, 2006, 29(4): 854~861

76 Shahverdiev E M, Hashimova L H, Bayramov P A, et al. Chaos synchronization between time delay coupled josephson junctions governed by a central junction. *Journal of Superconductivity and Novel Magnetism*, 2015, 28(12): 3499~3505

77 Martin M J, D´Huys O, Lauerbach L, et al. Chaos synchronization by resonance of multiple delay times. *Physical Review E*, 2016, 93(2): 022206

78 Ray A, Chowdhury A R, Ghosh D. Effect of noise on chaos synchronization in time-delayed systems: numerical and experimental observations. *Physica A*, 2013, 392(20): 4837~4849

79 Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001

80 Gray C M, Konig P, Engel A K, et al. Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties. *Nature*, 1989, 338(6213): 334~337

81 Steinmetz P N, Roy A, Fitzgerald P J, et al. Attention modulates synchronized neuronal firing in primate somatosensory cortex. *Nature*, 2000, 404(6774): 187~190

82 王青云, 张红慧. 生物神经元系统同步转迁动力学问题, 力学进展, 2013, 43(1): 151~162 (Wang Q Y, Zhang H H. Advances of synchronization transition in neuronal networks. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(1): 151~162 (in Chinese))

83 Dhamala M, Jirsa V K, Ding M. Transitions to synchrony in coupled bursting neurons. *Physical Review Letters*, 2004, 92(2): 028101

84 Rossoni E, Chen Y H, Ding M Z, et al. Stability of synchronous oscillations in a system of Hodgkin-Huxley neurons with delayed diffusive and pulsed coupling. *Physical Review E*, 2005, 71(6): 061904

85 Gu H, Zhao Z. Dynamics of time delay-induced multiple synchronous behaviors in inhibitory coupled neurons. *Plos One*, 2015, 10(9): e0138593

86 Zheng Y G, Wang Z H. Time-delay effect on the bursting of the synchronized state of coupled Hindmarsh-Rose neurons. *Chaos*, 2012, 22(4): 043127

87 Mao X C, Wang Z H. Stability switches and bifurcation in a system of four coupled neural networks with multiple time delays. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 82(3): 1551~1567

88 Mao X C. Switches of oscillations in coupled networks with multiple time delays. *Neurocomputing*, 2013, 110: 1~8

89 Selivanov A A, Lehnert J, Dahms T, et al. Adaptive synchronization in delay-coupled networks of Stuart-Landau oscillators. *Physical Review E*, 2012, 85(1): 016201

90 Wille C, Lehnert J, Schoell E. Synchronization-desynchronization transitions in complex networks: An interplay of distributed time delay and inhibitory nodes. *Physical Review E*, 2014, 90(3): 032908

91 Wang Q, Zheng Y, Ma J. Cooperative dynamics in neuronal networks. *Chaos Solitons and Fractals*, 2013, 56(SI): 19~27

92 Wang Q, Chen G, Perc M. Synchronous bursts on scale-free neuronal networks with attractive and repulsive coupling. *Plos One*, 2011, 6(1): e15851

93 Cao J D, Li L L. Cluster synchronization in an array of hybrid coupled neural networks with delay. *Neural Networks*, 2009, 22(4): 335~342

94 Zhou J, Cheng X, Xiang L, et al. Impulsive control and synchronization of chaotic systems consisting of Van der Pol oscillators coupled to linear oscillators. *Chaos Solitons and Fractals*, 2007, 33(2): 607~616

95 Zhou J, Wu Q, Xiang L, et al. Impulsive synchronization seeking in general complex delayed dynamical networks. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2011, 5(3): 513~524

96 Ma J, Xu J. An introduction and guidance for neurodynamics. *Science Bulletin*, 2015, 60(22): 1969~1971

97 Ma J, Tang J. A review for dynamics of collective behaviors of network of neurons. *Science China-Technological Sciences*, 2015, 58(12): 2038~2045

98 Song Y L, Xu J. Inphase and antiphase synchronization in a delay-coupled system With applications to a delay-coupled FitzHugh-Nagumo system. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, 23(10): 1659~1670

99 Tang J, Ma J, Yi M, et al. Delay and diversity-induced synchronization transitions in a small-world neuronal network. *Physical Review E*, 2013, 83(4): e80324

100 Mao X C. Bifurcation, synchronization, and multistability of two interacting networks with multiple time delays. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, 26(9): 1650156

101 Sun Z K, Yang X L. Generating and enhancing lag synchronization of chaotic systems by white noise. *Chaos*, 2011, 21(3): 033114

102 Adhikari B M, Prasad A, Dhamala M. Time-delay-induced phase-transition to synchrony in coupled bursting neurons. *Chaos*, 2011, 21(2): 023116

103 Sun X J, Lei J Z, Perc M, et al. Burst synchronization transitions in a neuronal network of subnetworks. *Chaos*, 2011, 21(1): 016110

104 Sharma A, Suresh K, Thamilmaran K, et al. Effect of parameter mismatch and time delay interaction on density-induced amplitude death in coupled nonlinear oscillators. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 76(3): 1797~1806

105 Herrero R, Figueras M, Rius J, et al. Experimental observation of the amplitude death effect in two coupled nonlinear oscillators. *Physical Review Letters*, 2000, 84(23): 5312~5315

106 Reddy D V R, Sen A, Johnston G L. Time delay induced death in coupled limit cycle oscillators. *Physical Review Letters*, 1998, 80(23): 5109~5112

107 Reddy D V R, Sen A, Johnston G L. Experimental evidence of time-delay-induced death in coupled limit-cycle

oscillators. *Physical Review Letters*, 2000, 85(16): 3381~3384

108 Atay F M. Distributed delays facilitate amplitude death of coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 2003, 91(9): 094101

109 Gjurchinovski A, Zakharova A, Schoell E. Amplitude death in oscillator networks with variable-delay coupling. *Physical Review E*, 2014, 89(3): 032915

110 Konishi K, Senda K, Kokame H. Amplitude death in time-delay nonlinear oscillators coupled by diffusive connections. *Physical Review E*, 2008, 78(5): 056216

111 Huddy S R, Sun J. Master stability islands for amplitude death in networks of delay-coupled oscillators. *Physical Review E*, 2016, 93(5): 052209

112 Song Y L, Xu J, Zhang T H. Bifurcation, amplitude death and oscillation patterns in a system of three coupled van der Pol oscillators with diffusively delayed velocity coupling. *Chaos*, 2011, 21(2): 023111

113 Bera B K, Hens C, Ghosh D. Emergence of amplitude death scenario in a network of oscillators under repulsive delay interaction. *Physics Letters A*, 2016, 380(31-32): 2366~2373

114 Sugitani Y, Konishi K, Hara N. Delay and topology-independent design for inducing amplitude death on networks with time-varying delay connections. *Physical Review E*, 2015, 92(4): 042928

115 Watanabe T, Sugitani Y, Konishi K, et al. Stability analysis of amplitude death in delay-coupled high-dimensional map networks and their design procedure. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2017, 338: 26~33

116 Nana B, Woafo P. Synchronization in a ring of four mutually coupled van der Pol oscillators: theory and experiment. *Physical Review E*, 2006, 74(4): 046213

117 Buscarino A, Fortuna L, Frasca M, et al. A concise guide to chaotic electronic circuits: Springer, 2014

118 Ablay G. Novel chaotic delay systems and electronic circuit solutions. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 81(4): 1795~1804

119 Sugitani Y, Konishi K, Hara N. Experimental verification of amplitude death induced by a periodic time-varying delay-connection. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 70(3): 2227~2235

120 Banerjee T, Biswas D. Amplitude death and synchronized states in nonlinear time-delay systems coupled through mean-field diffusion. *Chaos*, 2013, 23(4): 043101

ADVANCES IN DYNAMICS FOR COUPLED SYSTEM WITH TIME DELAYS*

Mao Xiaochen†

(*Department of Engineering Mechanics*, *College of Mechanics and Materials*, *Hohai University*, *Nanjing* 211100, *China*)

Abstract This paper surveys recent advances in the study on the dynamics of time-delay coupled systems. The review focuses mainly on the fundamental studies of stability, bifurcations, synchronizations, and complicated behaviors of time-delay coupled systems. Finally, the paper addresses some open problems for future investigations.

Key words time delay, coupled systems, nonlinearity, stability, bifurcations, synchronizations, complex dynamics

Received 22 February 2017, revised 10 July 2017.

* This work supported by the National Natural Science Foundation of China (11472097), China Scholarship Council, and Fundamental Research Funds for the Central Universities (2015B18214)

† Corresponding author E-mail: maochen@hhu.edu.cn