

# 一种基于等效线性化的非平稳随机动力响应分析的显式迭代算法\*

李雪平 王坤 魏鹏 苏成<sup>†</sup>

(华南理工大学土木与交通学院, 亚热带建筑科学国家重点实验室, 广州 510000)

**摘要** 提出了一种基于等效线性化法的非平稳随机动力响应分析的显式迭代算法. 首先根据等效线性化法把非线性系统转化为离散的线性系统, 然后应用 Newmark- $\beta$  积分方法, 推导出各个离散时刻的时域显式迭代公式, 进而可以快速得到非线性系统的随机动力响应, 最后用一个非线性的范德波尔系统和一个杜芬系统受非平稳随机荷载的算例验证了该算法的计算精度和计算效率.

**关键词** 非线性系统, 非平稳, 随机, 等效线性化, 显式迭代算法

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-032

## 引言

土木工程结构不可避免地会受到一些随机荷载的作用, 如地震、风和波浪等. 为了防止工程结构不受破坏, 设计时必须分析结构在随机荷载作用下的随机动力响应. 在工程实践领域, 线性系统的随机振动理论已经发展得较为成熟<sup>[1-4]</sup>. 实际结构往往呈现一定的非线性特性, 但实际情况只有少数的非线性系统可以得到精确解<sup>[5-8]</sup>, 其他情况都广泛采用数值积分的方法. 上述大部分情况, 非平稳随机荷载被简化为平稳随机荷载.

事实上, 很多随机荷载呈现非常明显的非平稳特征. 一直以来, 等效线性化法广泛应用于非线性系统在随机荷载下的随机响应分析<sup>[9-15]</sup>, 但是由于计算量大的原因, 只研究了自由度比较少的情況<sup>[16]</sup>. 对于多自由度非线性系统在非平稳随机激励下的响应分析一般还是采用蒙特卡罗模拟, 但是对于工程中大型结构而言, 其计算效率远远不够. 最近, 苏成等<sup>[17-20]</sup>提出了快速计算线性系统在非平稳随机荷载下的动力分析的时域显式法. 本文在此基础上, 将非线性系统采用等效线性化法转化为线性系统, 借助 Newmark- $\beta$  积分公式, 提出了一类基于等效线性化法的非线性系统在非平稳随机地

震动力响应分析的显式迭代算法.

## 1 非线性系统等效线性化

一个  $n$  自由度非线性系统在受地震荷载作用下的动力学方程如下:

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + KX + Q = -M\Gamma \ddot{x}_g \quad (1)$$

其中  $M, C$  和  $K$  分别为质量矩阵, 阻尼矩阵和刚度矩阵;  $Q$  是非线性恢复力;  $\Gamma$  是  $n$  维荷载定位向量;  $\ddot{x}_g$  表示地面加速度, 方程(1)在  $m\Delta t$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) 时刻可离散为:

$$M \ddot{X}_m + C \dot{X}_m + KX_m + Q_m = -M\Gamma \ddot{x}_{g_m} \quad (2)$$

根据等效线性化方法<sup>[11-12]</sup>, 离散的非线性系统(2)可以用以下的线性系统近似替代:

$$\begin{aligned} (M + M_m) \ddot{X}_m + (C + C_m) \dot{X}_m + (K + K_m) X_m \\ = -(M + M_m) \Gamma \ddot{x}_{g_m} \end{aligned} \quad (3)$$

这里  $M_m, C_m$  和  $K_m$  分别是  $m\Delta t$  时刻的等效质量矩阵、等效阻尼矩阵和等效刚度矩阵. 等效线性化的思想就是要找到最优的等效矩阵, 使  $E[e^T e]$  最小, 这里  $e$  的表达式为:

$$e = Q_m - M_m \ddot{X}_m - C_m \dot{X}_m - K_m X_m \quad (4)$$

为了使  $E[e^T e]$  最小, 需要下面的方程成立:

$$\frac{\partial E[e^T e]}{\partial [M_m]_{i,j}} = \frac{\partial E[e^T e]}{\partial [C_m]_{i,j}} = \frac{\partial E[e^T e]}{\partial [K_m]_{i,j}} = 0$$

2017-03-25 收到第1稿, 2017-4-18 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11002056)和中央高校基本科研业务费项目(2014ZZ0071)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: cvchsu@scut.edu.cn

$$(i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

经推导,式(5)可变为:

$$\left. \begin{aligned} [M_m]_{i,j} &= E[\partial q_i / \partial \ddot{X}_j] \\ [C_m]_{i,j} &= E[\partial q_i / \partial \dot{X}_j] \\ [K_m]_{i,j} &= E[\partial q_i / \partial X_j] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

要计算式(6),需要先计算系统(2)的统计响应,首次计算时非线性恢复力为零. 这样式(3)~(6)构成一个迭代循环,最终达到收敛时就得到了 $m\Delta t$ 时刻的随机响应,下一时刻依次推进,就可以得到非线性系统在非平稳荷载下的所有时刻的统计响应.

## 2 基于 Newmark- $\beta$ 积分的显式迭代算法

最常用的求解动力方程的方法是直接积分法,直接积分一般分为显式积分和隐式积分两种格式,显式积分格式是无条件稳定的,而隐式积分格式的稳定性和依赖于时间步长. 所以本文选用 Newmark- $\beta$  显式积分格式<sup>[21]</sup>,其主要的公式如下:

$$X_m = X_{m-1} + \Delta t \dot{X}_{m-1} + (0.5 - \beta)(\Delta t)^2 \ddot{X}_{m-1} + \beta(\Delta t)^2 \ddot{X}_m \quad (7)$$

$$\dot{X}_m = \dot{X}_{m-1} + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{X}_{m-1} + \gamma\Delta t \ddot{X}_m \quad (8)$$

式中 $\beta$ 和 $\gamma$ 为积分参数. 将方程(7)和方程(8)变形可以得到速度和加速度的表达式如下:

$$\dot{X}_m = a_1(X_m - X_{m-1}) + a_2\dot{X}_{m-1} + a_3\ddot{X}_{m-1} \quad (9)$$

$$\ddot{X}_m = b_1(X_m - X_{m-1}) + b_2\dot{X}_{m-1} + b_3\ddot{X}_{m-1} \quad (10)$$

式(9)和(10)中的参数为:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, \quad a_2 = 1 - \frac{\gamma}{\beta}, \quad a_3 = \Delta t(1 - \frac{\gamma}{2\beta}) \\ b_1 &= \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)^2}, \quad b_2 = -\frac{1}{\beta\Delta t}, \quad b_3 = 1 - \frac{1}{2\beta} \end{aligned} \quad (11)$$

将式(9)和(10)代入方程(3),可以得到位移的表示式如下:

$$X_m = D_1 X_{m-1} + D_2 \dot{X}_{m-1} + D_3 \ddot{X}_{m-1} + D_4 \ddot{x}_{g_m} \quad (12)$$

式(12)参数为:

$$\begin{aligned} D_1 &= D_4 [b_1(M + M_m) + a_1(C + C_m)] \\ D_2 &= -D_4 [b_2(M + M_m) + a_2(C + C_m)] \\ D_3 &= -D_4 [b_3(M + M_m) + a_3(C + C_m)] \\ D_4 &= -[b_1(M + M_m) + a_1(C + C_m) + K + K_m]^{-1} M \Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

引入向量 $Y_m = [X_m \quad \dot{X}_m \quad \ddot{X}_m]^T$ ,式(9),(10)和式(12)可以写成下列矩阵形式:

$$Y_m = E_{m-1} Y_{m-1} + F_{m-1} \ddot{x}_{g_m} \quad (14)$$

式(14)中系数为:

$$E_{m-1} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ a_1 D_1 - a_1 I & a_1 D_2 + a_2 I & a_1 D_3 + a_3 I \\ b_1 D_1 - b_1 I & b_1 D_2 + b_2 I & b_1 D_3 + b_3 I \end{bmatrix}$$

$$F_{m-1} = \begin{bmatrix} D_4 \\ a_1 D_4 \\ b_1 D_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式(15)中 $I$ 为单位矩阵.

当初始值 $Y_0$ 和非线性恢复力 $Q_m$ 为零时,矩阵 $E$ 和 $F$ 为常矩阵. 此时式(14)可以展开为如下形式:

$$\begin{aligned} Y_1 &= EY_0 + F\ddot{x}_{g_1} = F\ddot{x}_{g_1} \\ Y_2 &= EY_1 + F\ddot{x}_{g_2} = EF\ddot{x}_{g_1} + F\ddot{x}_{g_2} \\ Y_3 &= EY_2 + F\ddot{x}_{g_3} = E^2 F\ddot{x}_{g_1} + EF\ddot{x}_{g_2} + F\ddot{x}_{g_3} \\ Y_i &= EY_{i-1} + F\ddot{x}_{g_i} \\ &= E^{i-1} F\ddot{x}_{g_1} + E^{i-2} F\ddot{x}_{g_2} + \dots + EF\ddot{x}_{g_{i-1}} + F\ddot{x}_{g_i} \end{aligned} \quad (16)$$

引入变量

$$\begin{aligned} H_i &= [E^{i-1} F \quad E^{i-2} F \quad \dots \quad EF \quad F]^T, \\ P_i &= [\dot{X}_{g_1} \quad \dot{X}_{g_2} \quad \dots \quad \dot{X}_{g_i}]^T \end{aligned}$$

式(16)可以化简为:

$$Y_i = H_i P_i \quad (17)$$

式(17)就是线性动力系统瞬态响应的时域表达式. 如果 $\ddot{x}_g$ 是一个随机过程,那么该动力系统的随机响应均值和协方差分别为:

$$\mu_{Y_i} = \bar{E}(Y_i) = H_i \bar{E}(P_i) \quad (18)$$

$$\sigma_{Y_i} = \text{cov}(Y_i, Y_i) = H_i \text{cov}(P_i, P_i) H_i^T \quad (19)$$

式中 $\bar{E}(\cdot)$ 表示求期望,  $\text{cov}(\cdot)$ 表示求协方差.

当初始值 $Y_0$ 为零,非线性恢复力 $Q_m$ 不为零时,式(14)中的 $E$ 和 $F$ 为时变矩阵. 此时,非线性动力系统的随机响应可以通过时域显式迭代方法求解,具体流程如下:

当 $m=1$ 时, $\Delta t$ 时刻的初始协方差为:

$$\begin{aligned} Y_1^{(1)} &= H_1 P_1, \text{cov}(Y_1^{(1)}, Y_1^{(1)}) \\ &= H_1 \text{cov}(P_1, P_1) H_1^T \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)中 $H_1 = F_0^{-1}$ . 矩阵 $F_0^{-1}$ 可以通过式(15)计算,初始时令非线性恢复力为零. 假定经过 $i$ 次迭代满足收敛准则,那么 $\Delta t$ 时刻的解为:

$$Y_1^{(i)} = H_{11} P_1, \mu_{Y_1} = \bar{E}(Y_1^{(i)}) = H_{11} \bar{E}(P_1),$$

$$\sigma_{Y_1}^2 = \text{cov}(Y_1^{(i)}, Y_1^{(i)}) = H_{11} \text{cov}(P_1, P_1) H_{11}^T \quad (21)$$

式(21)中  $H_{11} = F_0^{(i)}$ . 当第  $i-1$  步的随机响应已经计算的情况下, 可以通过式(15)计算  $F_0^{(i)}$ .

当  $m=2$  时,  $2\Delta t$  时刻的初始随机响应为:

$$\begin{aligned} Y_2^{(1)} &= H_2 P_2, \text{cov}(Y_2^{(1)}, Y_2^{(1)}) \\ &= H_2 \text{cov}(P_2, P_2) H_2^T \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)中  $H_2 = [E_1^{(1)} H_{11} \quad F_1^{(1)}]$ ,  $E_1^{(1)}$  和  $F_1^{(1)}$  可以通过式(15)计算, 初始时非线性恢复力为零. 假定经过  $j$  次迭代满足收敛准则, 那么  $2\Delta t$  时刻的解为:

$$\begin{aligned} Y_2^{(j)} &= H_{22} P_2, \mu_{Y_2} = \bar{E}(Y_2^{(j)}) = H_{22} \bar{E}(P_2) \\ \sigma_{Y_2}^2 &= \text{cov}(Y_2^{(j)}, Y_2^{(j)}) = H_{22} \text{cov}(P_2, P_2) H_{22}^T \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)中  $H_{22} = [E_1^{(j)} H_{11} \quad F_1^{(j)}]$ . 当第  $j-1$  步的随机响应已经计算的情况下, 可以通过式(15)计算  $E_1^{(j)}$  和  $F_1^{(j)}$ .

当  $m=n$ ,  $n$  为 3, 5, 7... 等奇数时,  $n\Delta t$  时刻的初始随机响应为:

$$\begin{aligned} Y_n^{(1)} &= H_1 P_n, \text{cov}(Y_n^{(1)}, Y_n^{(1)}) \\ &= H_1 \text{cov}(P_n, P_n) H_1^T \end{aligned} \quad (24)$$

式(24)中  $H_1 = [E_{n-1}^{(1)} H_{22} \quad F_{n-1}^{(1)}]$ .  $E_{n-1}^{(1)}$  和  $F_{n-1}^{(1)}$  可以通过式(15)计算, 初始时令非线性恢复力为零. 假定经过  $k$  次迭代满足收敛准则, 那么  $n\Delta t$  时刻的解为:

$$\begin{aligned} Y_n^{(k)} &= H_{11} P_n, \mu_{Y_n} = \bar{E}(Y_n^{(k)}) = H_{11} \bar{E}(P_n) \\ \sigma_{Y_n}^2 &= \text{cov}(Y_n^{(k)}, Y_n^{(k)}) = H_{11} \text{cov}(P_n, P_n) H_{11}^T \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)中  $H_{11} = [E_{n-1}^{(k)} H_{22} \quad F_{n-1}^{(k)}]$ . 在第  $k-1$  步的随机响应已经计算的情况下, 可以通过式(15)计算  $E_{n-1}^{(k)}$  和  $F_{n-1}^{(k)}$ .

当  $m=n+1$ ,  $m$  为 4, 6, 8... 等偶数时,  $(n+1)\Delta t$  时刻的初始随机响应为:

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^{(1)} &= H_2 P_{n+1}, \text{cov}(Y_{n+1}^{(1)}, Y_{n+1}^{(1)}) \\ &= H_2 \text{cov}(P_{n+1}, P_{n+1}) H_2^T \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)中  $H_2 = [E_n^{(1)} H_{11} \quad F_n^{(1)}]$ .  $E_n^{(1)}$  和  $F_n^{(1)}$  可以通过式(15)计算, 初始时令非线性恢复力为零. 假定经过  $l$  次迭代满足收敛准则, 那么  $(n+1)\Delta t$  时刻的解为:

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^{(l)} &= H_{22} P_{n+1}, \mu_{Y_{n+1}} = \bar{E}(Y_{n+1}^{(l)}) = H_{22} \bar{E}(P_{n+1}) \\ \sigma_{Y_{n+1}}^2 &= \text{cov}(Y_{n+1}^{(l)}, Y_{n+1}^{(l)}) = H_{22} \text{cov}(P_{n+1}, P_{n+1}) H_{22}^T \end{aligned} \quad (27)$$

式(27)中  $H_{22} = [E_n^{(l)} H_{11} \quad F_n^{(l)}]$ . 当第  $k-1$  步的随机响应已经计算的情况下, 可以通过式(15)计算  $E_n^{(l)}$  和  $F_n^{(l)}$ .

上述算法流程中, 式(20)、(22)、(24)和(26)用来计算  $m\Delta t$  时刻系统(3)在初始非线性恢复力为零时的随机响应. 式(21)、(23)、(25)和(27)用来计算  $m\Delta t$  时刻系统分别经过  $i, j, k$  和  $l$  步迭代收敛时系统(3)的随机响应. 当  $m$  为奇数时, 当前时刻的迭代只需要保存  $H_1$  和  $H_{11}$  两个系数矩阵, 当  $m$  为偶数时, 当前时刻迭代只需保存  $H_2$  和  $H_{22}$  两个系数矩阵, 这样可以大量节省系统内存. 同时  $(n+1)\Delta t$  时刻与  $n\Delta t$  时刻的系数矩阵满足递推关系, 即:  $H_2 = [E_n^{(i)} H_{11} \quad F_n^{(i)}]$ ,  $H_{22} = [E_n^{(i)} H_{11} \quad F_n^{(i)}]$ .

$H_{11}$  是上一时刻经过迭代收敛后的矩阵, 这样经过少数几次迭代结果就能收敛. 同时随机荷载的协方差矩阵  $\text{cov}(P_n, P_n)$  可以提前计算并储存. 此外, 推导过程中采用的 Newmark- $\beta$  积分公式无条件稳定, 积分步长  $\Delta t$  可以取的相对大一些.

### 3 数值算例

#### 3.1 算例1: 六自由度范德波尔系统

考虑一个6自由度的范德波尔系统受非平稳随机荷载的作用, 其运动方程如下:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_i + (\beta_i + \sum_{j=1}^6 \beta_{ij} X_j^2) \dot{X}_i + \omega_i^2 X_i + \alpha_i X_i^3 &= W_i \\ (i = 1, \dots, 6) \end{aligned} \quad (28)$$

方程(28)中  $\ddot{X}_i, \dot{X}_i, X_i$  分别对应第  $i$  个自由度的无量纲加速度、速度和位移;  $\alpha_i, \beta_i, \beta_{ij}$  和  $\omega_i$  是系统参数, 为常量;  $W_i$  是经过均匀调制的非平稳随机过程, 具体形式为  $W_i = g(t)f(t)$ .  $f(t)$  是零均值平稳随机过程, 谱密度为 Kanai-Tajimi 谱, 形式如下:

$$S_f(\omega) = \frac{\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2} S_0 \quad (29)$$

式中,  $\omega_g = 15.708s^{-1}$ ,  $\zeta_g = 0.6$ ,  $S_0 = 0.01(m^2/s^3)$ .  $g(t)$  为均匀调制函数, 其形式为  $g(t) = 4(e^{-0.1t} - e^{-0.2t})$ . 为了验证计算精度, 用时域显式迭代算法计算的范德波尔系统的标准差的结果与 10000 个时程样本的蒙特卡罗模拟进行了对比. 具体参数如下:  $\beta_i = 0.02$ ,  $\omega_i^2 = i$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ), 时间步长  $\Delta t = 0.05$ , 迭代收敛相对误差取为 0.01%. 限于篇幅, 仅给出第一个自由度的位移标准差和加速度标准差的结果, 分别如图 1 和图 2 所示, EIA 表示本文

显式迭代算法的计算结果, MCS 表示蒙特卡罗模拟结果. 从图中可以看出, 当非线性参数  $\alpha_i$  和  $\beta_{ij}$  从 0.1 变化到 10 时, 二者结果都吻合非常好, 最大误差只有 3.98%. 为了对比计算效率, 在同一电脑上 (1.2HZ CPU, 8G RAM) 进行计算, 本文显式迭代算法的计算效率远远高于蒙特卡罗模拟, 具体结果见表 1.

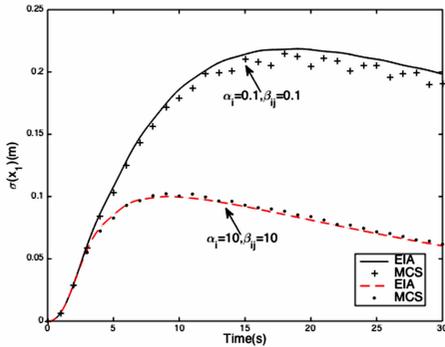


图1 位移  $X_1$  的标准差

Fig. 1 Standard deviation of displacement  $X_1$

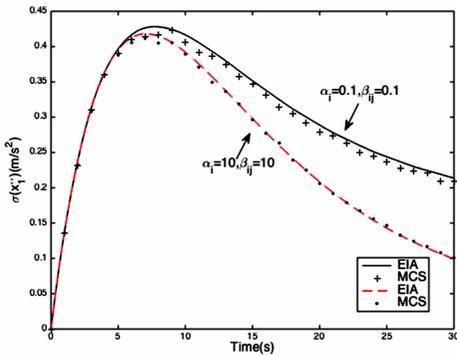


图2 加速度  $\ddot{X}_1$  的标准差

Fig. 2 Standard deviation of acceleration  $\ddot{X}_1$

表1 蒙特卡罗模拟与显式迭代算法的效率对比

Table 1 Comparison of efficiency between MCS and EIA for different nonlinear parameters

Nonlinear parameter	MCS (s)	EIA (s)	Relative Error
$\alpha_i = 0.1, \beta_{ij} = 0.1$	805	8.2	3.7%
$\alpha_i = 10, \beta_{ij} = 10$	828	9.9	2.1%

### 3.2 算例 2: 四十自由度杜芬系统

考虑如图 3 所示的一个 40 自由度的杜芬系统受非平稳随机地震荷载的作用, 其运动方程如下:

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + KX + G = -M\Gamma \ddot{x}_g(t) \quad (30)$$

式(30)中  $M, C$  和  $K$  分别对应质量矩阵, 阻尼矩阵和刚度矩阵;  $\ddot{X}, \dot{X}$  和  $X$  分别对应加速度, 速度和位

移向量;  $\Gamma$  为荷载定位向量;  $\ddot{x}_g(t)$  为非平稳随机过程, 具体形式与算例 1 相同; 振子质量分别为  $m_1 = \dots = m_{20} = 2500\text{kg}, m_{21} = \dots = m_{40} = 3000\text{kg}$ ; 振子刚度分别为  $k_1 = k_2 = \dots = k_{20} = 7.5 \times 10^8 \text{kN/m}, k_{21} = k_{22} = \dots = k_{40} = 8 \times 10^8 \text{kN/m}$ ;  $G$  为非线性恢复力, 其具体形式如下:

$$G = \begin{bmatrix} \eta_1 k_1 Y_1^3 \\ \eta_2 k_2 Y_2^3 - \eta_1 k_1 Y_1^3 \\ \vdots \\ \eta_{39} k_{39} Y_{39}^3 - \eta_{38} k_{38} Y_{38}^3 \\ \eta_{40} k_{40} Y_{40}^3 - \eta_{39} k_{39} Y_{39}^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{99} \\ Y_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \\ \vdots \\ X_{39} - X_{40} \\ X_{40} \end{bmatrix} \quad (31)$$

式(31)中  $\eta_1 = \dots = \eta_{20} = 500, \eta_{21} = \dots = \eta_{40} = 600$ .

$[Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n]^T$  表示相邻振子相对位移向量.

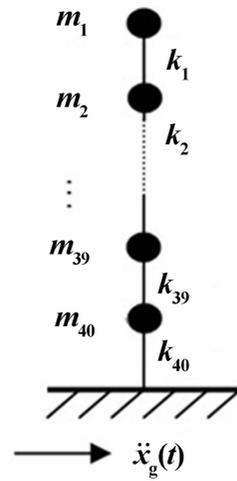


图3 剪切型杜芬系统

Fig. 3 Shear type MDOF Duffing system

为了验证计算精度, 采用本文提出的时域显式迭代算法的计算结果与 10000 个地震时程样本的蒙特卡罗模拟进行了对比. 时间步长取  $\Delta t = 0.05$ , 迭代收敛相对误差取为 0.001%. 限于篇幅, 仅给出第一个自由度的位移标准差和加速度标准差的结果, 分别如图 4 和图 5 所示, EIA 表示本文显式迭代算法的计算结果, MCS 表示蒙特卡罗模拟结果. 从图中可以看出, 当荷载强度因子  $S_0$  从 0.01 变化到 0.05 时, 二者吻合都非常好, 最大误差只有 1.22%. 此外, 当  $S_0 = 0.05$  时, 迭代收敛曲线如图 6 所示, 最大迭代步数只有三次. 为了对比计算效率, 与算例 1 相同配置的电脑上进行计算, 本文显式迭代算法的计算效率远远高于蒙特卡罗模拟, 具体结果见表 2.

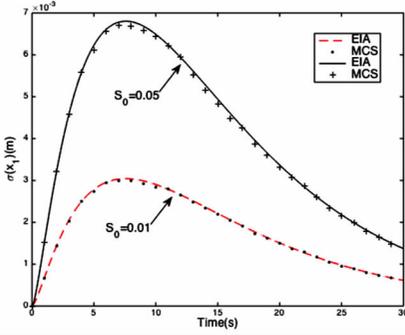


图4 位移  $X_1$  的标准差

Fig.4 Standard deviation of displacement  $X_1$

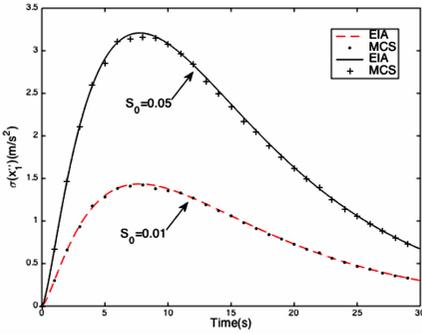


图5 加速度  $\ddot{X}_1$  的标准差

Fig.5 Standard deviation of acceleration  $\ddot{X}_1$

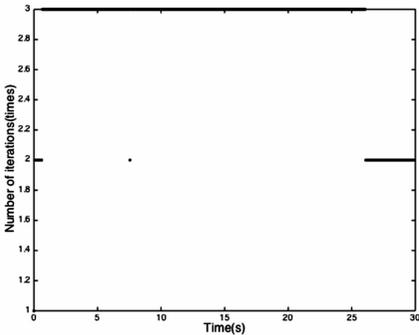


图6 收敛迭代次数曲线

Fig.6 Curve of iteration number

表2 蒙塔卡罗模拟与显式迭代算法的效率对比

Table 2 Comparison of efficiency between MCS and EIA for different nonlinear parameters

Nonlinear parameter	MCS(s)	EIA(s)	Relative Error
$S_0 = 0.01$	1652	18.5	1.13%
$S_0 = 0.05$	1656	18.8	1.22%

### 4 结论

本文基于等效线性化法,提出了一种求解非线性系统非平稳随机响应的时域显式迭代数值算法.该算法可以快速求解多自由度非线性系统在非平稳随机荷载下的均值和协方差.计算效率高是因为以下几方面原因:(1)荷载协方差可以提前计算和

储存;(2)当前时刻迭代过程中只需保存两个矩阵,且下一时刻矩阵更新时直接覆盖上一时刻的矩阵,大大节省计算内存.(3)当前时刻的迭代是基于上一时刻的收敛解,显著提高了收敛速度;(4)基于 Newmark- $\beta$  积分格式推导的显式表达式无条件稳定,积分步长可以取的相对较大.因此,该方法非常适合用来求解多自由度非线性系统在非平稳随机荷载下的随机响应.

### 参 考 文 献

- 1 Lin Y K. Probabilistic Theory of structural dynamics, Huntington, New York, 1976
- 2 Kiureghian A D, Neuenhofer A. Response spectrum method for multi-support seismic excitations. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1992,21(8):713 ~ 740
- 3 Soong T T, Grigoriu M. Random vibration of mechanical and structural systems. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993
- 4 林家浩,张亚辉. 随机振动中的虚拟激励法. 北京:科学出版社,2004 (Lin Jiahao, Zhang Yahui. Pseudo-excitation method of random vibration. Beijing: Science Press, 2004 (in Chinese))
- 5 Caughey T K, Ma F. The excite steady-state solution of a class non-linear stochastic systems to stochastic excitations. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1982,17:137 ~ 142
- 6 Zhu W Q, Yang Y Q. Exact stationary solutions of stochastically excited and dissipated integrable Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1996,63(2):493 ~ 500
- 7 Zhu W Q. Exact solutions for stationary responses of several classes of nonlinear systems to parametric and/or external white noise excitations. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1990,11(2):165 ~ 175
- 8 Li J, Chen J B. The probability density evolution method for analysis of dynamic nonlinear response of stochastic structures. *ACTA Mechanic Sonica*, 2003,35(6):716 ~ 722
- 9 Roberts J B, Spanos P D. Random vibration and statistical linearization. John Wiley & Sons, 1990
- 10 Thomas K, Caughey T. Equivalent linearization techniques. *Journal of Acoustical Society of America*, 1963,35(11):1706 ~ 1711
- 11 Schuëller G I, Pandey M D, Pradlwarter H J. Equivalent

- linearization in engineering practice for a seismic design. *Journal of Probabilistic Engineering Mechanics*, 1994, 9(1):95 ~ 102
- 12 Iwan W D, Mason A B. Equivalent linearization for systems subjected to non-stationary random excitation. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1980, 15:71 ~ 82
- 13 Crandall S H. A half-century of stochastic equivalent linearization. *Structural Control Health Monitor*, 2006, 13:27 ~ 40
- 14 Proppe C, Pradlwarter H J, Schuëller G I. Equivalent linearization and Monte Carlo simulation in stochastic dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2003, 18(1):1 ~ 15
- 15 Lin J H, Wang J, Zhang Y H. Non-stationary random response of MDOF Duffing systems. *Shock and Vibration*, 2004, 11(5-6):615 ~ 624
- 16 Marano G C, Acciani G, Fiore A, et al. Integration algorithm for covariance non-stationary dynamic analysis of SDOF systems using equivalent stochastic linearization. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2015, 15(2):1450044
- 17 苏成,徐瑞. 非平稳随机激励下结构随机振动时域分析法. *工程力学*, 2010, 27(12):77 ~ 83 (Su C, Xu R. Random vibration analysis of structures subjected to non-stationary excitations by time domain method. *Engineering Mechanics*, 2010, 27(12):77 ~ 83 (in Chinese))
- 18 苏成,徐瑞. 非平稳随机激励下结构体系动力可靠度时域解法. *力学学报*, 2010, 42(3):512 ~ 520 (Su C, Xu R. Time-domain method for dynamic reliability of structural systems subjected to non-stationary random excitations. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(3):512 ~ 520 (in Chinese))
- 19 Su C, Xu R. Random vibration analysis of structures by a time-domain explicit formulation method. *Structural Engineering & Mechanics*, 2014, 52(2):239 ~ 260
- 20 Hu Z Q, Su C, Chen T C, et al. An explicit time-domain approach for sensitivity analysis of non-stationary random vibration problems. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 382:122 ~ 139
- 21 Newmark N M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of Engineering Mechanics Division*, 1959, 85(3):67 ~ 94

## EXPLICIT ITERATION ALGORITHM FOR NON-STATIONARY DYNAMICS RESPONSE ANALYSIS OF EXPLICIT ITERATION ALGORITHM OF NON-STATIONARY STOCHASTIC DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS BASED ON EQUIVALENT STOCHASTIC LINEARIZATION\*

Li Xueping Wang Kun Wei Peng Su Cheng<sup>†</sup>

(State Key Laboratory of Subtropical Building Science, School of Civil Engineering and Transportation,  
South China University of Technology, Guangzhou 510000, China)

**Abstract** An efficiency explicit iteration algorithm for non-linear systems subject to non-stationary stochastic seismic excitation is proposed based on the equivalent linearization. Firstly, the nonlinear systems are transformed into the discrete linear systems using equivalent linearization method. And the explicit time-domain iteration algorithm is then deduced based on the Newmark- $\beta$  integration method. The proposed algorithm is finally applied to a MDOF Vander-Pol system and a MDOF Duffing system under random non-stationary process. The results verify the high accuracy and efficiency of the proposed explicit iteration procedure.

**Key words** nonlinear systems, non-stationary, stochastic, equivalent linearization, explicit iteration algorithm

Received 25 March 2017, revised 18 April 2017.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11002056) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (SCUT) (2014220071)

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: cvchsu@scut.edu.cn