

随机激励下非线性水轮机系统的控制设计*

朱晨烜 丁云飞[†]

(上海电机学院, 上海 200240)

摘要 针对一类随机非线性哈密顿系统提出了一种全新的反馈跟踪控制方法. 该控制策略可以准确地控制系统输出的概率密度分布特性. 闭环系统的稳定性也通过李雅普诺夫函数法得到严格的数学证明. 最后, 以随机非线性水轮机系统为例, 详细演示了控制设计过程及其有效性. 仿真结果表明, 新的反馈控制策略可以使水轮机系统的输出满足预先指定的平稳概率密度函数.

关键词 随机非线性系统, 反馈跟踪控制, 概率密度函数, 李雅普诺夫函数

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-031

引言

非线性系统控制是最近几十年的一个重要研究领域. 常规非线性系统控制设计是基于确定性非线性系统, 例如 Lipschitz 非线性系统^[1,2], 单调非线性^[3]和高增益观察器^[4]等. 然而, 这些方法忽略了系统测量和过程中的随机噪声(如随机振动或冲击). 几乎所有的控制过程都不可避免地受到噪声或随机扰动的影响, 相应地噪音可以显著改变动力学系统的确定性. 换句话说, 它可以使随机扰动下的非线性系具有新的稳定状态, 它甚至可以增强一个非线性系统对外部信号的响应^[5-7]. 因此, 噪声干扰下的非线性过程应该更确切地被定义为随机非线性系统的输出.

传统意义上, 随机非线性控制的设计多基于线性化方法. 许多行之有效的控制方法只关心两个被控量, 即均值和方差或协方差^[8-11]. 这类控制基于所述系统输出符合高斯分布的假定. 然而, 对于具有本质非线性特性的许多实际过程, 如化工, 炼钢或造纸的粒度分布的控制等, 这些系统不能被线性化. 此时, 均值和方差或协方差不足以表征输出过程, 因为一个随机非线性系统的输出通常为非高斯. 因此, 在最近十几年, 一些基于随机非线性系统输出的概率密度函数(PDF)的反馈控制方法研究得到了越来越多的科研人员的关注.

在过去的几十年里, 一些有效的控制策略被开发出来以达到控制输出 PDF 的形状的目的^[12-23]. 其中, 伊藤^[12]和 Fokker - Planck (FP) 方程^[13]可以用来描述 SPDF. 在由一个多项式反馈部分和一个处理不确定性参数的切换项所组成的控制设计的基础上, 含有不确定参数的伊藤微分方程被用来表示一类连续时间随机过程. 最近, 为了使输出 PDF 追随目标 PDF, 一种递归 PDF 控制策略被用到具有信道时间延迟和非高斯噪声的非线性 ARMAX 系统中, 一种多步前馈非线性累计成本函数也被用于改善其追踪性能^[14]. 另一种可行的解决方案是引入平方根 B 样条扩展神经网络, 通过跟踪动态权重逼近输出 PDF^[15]. 同样, 在复杂的动态非高斯随机过程中, 应用广义迭代神经网络学习算法也能估算输出 PDF, 随后输出 PDF 的跟踪控制可以简化为两个相邻的重复过程之间的参数调整问题^[16]. 一类开关线性控制器被用来近似一维系统的 PDF 形状^[17]. Herzallah 和 Karny^[18]为了避开明确评估最优值函数而提出了基于自适应评判方法的一种完全概率控制算法. Annunziato 和 Brozi^[19]根据 FP 方程提出一个有效的框架来解决多维随机过程 PDF 的最优控制. 其相应的优化问题转变为在滚动时域控制策略中的开环最优系统序列. Abhariyan 和 Fadaei^[20]讨论了 PDF 控制系统的性能评估问题, 评估对象是一个复杂核反应堆系统, 并且将评估原

2017-3-2 收到第 1 稿, 2017-4-18 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(11302123)、上海市浦江人才计划(15PJ1402500)、上海市教育委员会科研创新项目(14YZ163)、上海市教育委员会和上海市教育发展基金会“晨光计划”(13CG63)资助

[†] 通讯作者 E-mail: Dingyf@sjtu.edu.cn

则用于分析核研究反应堆的能量 PDF 的性能. 该控制器的设计使得能量 PDF 能够跟踪给定形状. 一类无界随机不确定非线性系统的模型预测控制方法是通过采用 FP 方程追踪 PDF, 同时根据随机控制李雅普洛夫函数来设计稳定性约束条件^[21]. 其他随机模型预测控制相关的最新的文献综述可以参见文献[22].

应当注意的是, 上述所有提出的设计方法大多是基于近似, 它们在实际应用中还存在着理论和实际上的问题^[23]. 这些问题包括三点: 首先, 如果忽略了权重向量的约束, 输出的 PDF 的跟踪可能偏离, 这样会导致分析稳定性和性能的困难, 从而不能保证闭环系统是稳定的. 其次, 大部分方法都只关注低维随机过程模型或一些相对简单的物理模型. 此外, 随着系统维数的增加, 用于闭环实现的计算量过大.

为了克服这些问题, 本文针对一类含随机扰动的非线性系统设计了一种新的反馈控制方法. 该方法利用获得高维非线性随机系统的精确稳态解的技术来追踪预先设定的 SPDF. 并引入李雅普洛夫函数方法保证闭环系统的输出收敛于一个预先设定的 SPDF, 以此来确保闭环稳定性. 随后, 通过工程应用中的一个随机非线性水轮机系统的仿真实验来验证该方法的有效性. 本文的结构安排如下: 在第1节中简要回顾由实际物理系统转换为相应的哈密顿模型的过程; 在第2节中给出一个跟踪预先设定的 SPDF 的随机反馈控制律的推导过程, 同时还分析了系统的稳定性, 以保证控制系统的收敛性, 详细的论证过程将会给出. 同时为了验证所提出的理论, 该方法将被用于一个在弹性水击和随机扰动共同作用下的非线性水轮机系统, 所得到的精确最优控制律和结果在第3节给出. 最后一部分给出全文的结论.

1 随机哈密顿建模

哈密顿理论被广泛用于描述实际系统内部的能量耗散及系统与外界的能量交换. 直接法作为哈密顿建模理论之一, 是由实际系统的基本动态特性经数学演绎而得. 由于直接对实际系统建模十分困难, 有时甚至无法实现, 于是基于微分方程与哈密顿模型转换方法的哈密顿实现理论得到了发展^[25]. 下面将简要介绍转换方法和约束条件:

考虑一个控制动力系统:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad x \in M \quad (1)$$

其中 M 是一个 γ 维流形, $f(x)$ 是向量, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$, $u = (u_1, \dots, u_n)^T$, 称系统(1)有一个状态反馈哈密顿实现, 如果存在一个合适的坐标卡, 一个哈密顿函数 H 和一个合适的状态反馈控制律 $u = \alpha(x) + u'$, 使得系统(1)可以表示为:

$$\dot{x} = T(x) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x)u' \quad (2)$$

如果结构矩阵 $T(x)$ 可以表示为: $T(x) = J(x) + Z(x)$, 其中反对称阵 $J(x)$ 为:

$$J(x) = \frac{1}{\|\nabla H\|^2} [f \nabla H^T - \nabla H f^T] \quad (3)$$

对称阵 $Z(x)$ 为:

$$Z(x) = \frac{\langle f, \nabla H \rangle}{\|\nabla H\|^2} I \quad (4)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积. 称式(2)为反馈哈密顿耗散实现. $Z(x)$ 可以进一步分解为一个(半)正定阵 $R(x)$ 和一个对称阵 $S(x)$:

$$Z(x) = -R(x) + S(x) \quad (5)$$

其中,

$$R(x) = \begin{bmatrix} r(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r(x) \end{bmatrix}$$

$$S(x) = \begin{bmatrix} s(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s(x) \end{bmatrix}$$

可选择如下控制器:

$$u = u' - \frac{\nabla H^T S(x) \nabla H}{\langle g, \nabla H \rangle} \quad (6)$$

此时, 随机激励下的系统(2)可以表示为:

$$\dot{x} = T(x) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x)u' + \zeta(x)W(t) \quad (7)$$

其中 $\zeta(x)$ 代表随机激励幅值; $W(t)$ 为高斯白噪声, 均值为零, 相关函数为 $E[W_k(t)W_l(t+\tau)] = 2D_{kl}\delta(\tau)$.

2 追踪控制设计

2.1 问题的表述

考虑如下随机动力学系统:

$$dx_i = -\tilde{m}_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x_j} dt + \zeta_{ik}(x) dW_k(t) \quad (8)$$

$i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$

其中 \tilde{m}_{ij} 是 x 的确定性函数. 系统(8)可表示为如下

Stratonovich 随机微分方程:

$$dx_i = -\tilde{m}_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x_j} dt + \sigma_{ik}(x) dB_k(t) \quad (9)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$$

其中, $B_k(t)$ 是标准维纳过程; $\sigma_{ik} = (\zeta \mathbf{L})_{ik}$ 且有 $\zeta = [\zeta_{ik}]$, $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = 2\mathbf{D}$, $\mathbf{D} = [D_{kl}]$. 注意爱因斯坦惯例 (即: 重复的标注表示对该指标的求和) 被应用于全文. 式(9)等价于如下伊藤随机微分方程:

$$dx_i = -m_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x_j} dt + \sigma_{ik}(x) dB_k(t) \quad (10)$$

其中,

$$m_{ij} = -\tilde{m}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{jk}(x) \frac{\partial \sigma_{ik}(x)}{\partial x_j} \quad (11)$$

式(11)右侧的第二项为 Wong-Zakai 修正项. 与伊藤方程(10)相对应的简化 FPK 方程 ($\partial \rho / \partial t = 0$) 为:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (m_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \rho) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (b_{ij} \rho) = 0 \quad (12)$$

其中, $\rho = \rho(x)$ 是系统(10)的稳态概率密度; $b_{ij} = (\sigma \sigma^T)_{ij} = 2D_{kl} \zeta_{ik} \zeta_{jl}$; 文献[26-27]中指出式(12)的解取决于哈密顿系统的可积性和共振型. 对于不可积系统, 式(12)的解为:

$$\rho(x) = N \cdot \exp[-\lambda(H)] |_{H=H(x)} \quad (13)$$

其中 N 是归一化常数. $\lambda(H)$ 为概率势并由以下 n 个一阶线性常微分方程求得:

$$2m_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} - b_{ij} \frac{\partial H \lambda}{\partial x_j dH} = 0 \quad (14)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

这一求解技巧将被用于多自由度随机非线性系统对给定平稳概率密度函数的追踪控制设计中.

2.2 被控过程

考虑受控的随机非线性系统. 假设可以由如下受控的耗散的哈密顿系统描述:

$$\dot{x}_i = -[c_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x_j} + \hat{u}_i(x)] + \zeta_{ik}(x) W_k(t) \quad (15)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$$

其中, $c_{ij}(x)$ 是 x 的确定性函数, $\hat{u}_i(x)$ 是待设计的控制律, 其它符号定义同式(8). 显然, 若令 $c_{ij}(\partial \bar{H} / \partial x_i) + \hat{u}_i = m_{ij}$, 那么式(15)与(8)相同. 假设目标稳态概率密度函数为:

$$\rho(x) = c \exp[-\bar{\lambda}(x)] \quad (16)$$

控制律设计过程如下: 首先令式(16)满足式(13)的形式并确定新的哈密顿函数 \bar{H} ; 如果 \bar{H} 是不可积的, 则 \hat{u}_i 与 $c_{ij}(x) \partial \bar{H} / \partial x_j$ 结合使得式(14)有目标解. 可得到 \hat{u}_{ij} 为:

$$\hat{u}_i = \frac{1}{2} b_{ij} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} \frac{d\bar{\lambda}}{d\bar{H}} - c_{ij} \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} \quad (17)$$

2.3 输出过程的收敛性

系统(10)可以简化为:

$$dx_i = a_i(x) dt + \sigma_{ik}(x) dB_k(t) \quad (18)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$$

其中 $a_i = -[c_{ij}(x) + \hat{u}_i(x)] \partial \bar{H} / \partial x_j$. 可见式(18)具有与式(13)相同的稳态解. 也可由如下定理得到该系统输出的收敛性证明.

定理 1

对任一高斯白噪声激励系统:

$$dx_i = a_i(x) dt + \sum_{k=1}^m \sigma_k(x) dW_k(t) \quad (19)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

若存在一个李亚普诺夫函数 $V(x) \geq 0$, 对 x_i 有二阶连续偏导, 且当 $|x| \rightarrow \infty$ 时有 $V(x) \rightarrow \infty$, 则 R^n 空间存在有界区间 Ω , 引入椭圆微分算子:

$$L = a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} b_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (20)$$

使得 $LV \leq -h < 0$, 在空间 $R^n - \Omega$ 上成立, 则存在一个不变测度即一个连续的密度 $\rho(x)$, 且当时间 $t \rightarrow \infty$ 时, 转移概率密度 $\rho(x, t | x_0) \rightarrow \rho | (x)$.

此定理的证明详见文献[28].

3 算例

考虑如下单机单管弹性水击下, 非线性水轮机模型:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (21)$$

其中,

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\pi^2}{T_e^2} x_1 + \frac{1}{R_n T_e} [h_0 - (k + \frac{g_r^2}{x_4^2}) x_3^2] \\ -3\pi^2 x_1 + \frac{4}{R_n T_e} [h_0 - (k + \frac{g_r^2}{x_4^2}) x_3^2] \\ -\frac{1}{T_w} (x_4 - g_0) \end{bmatrix},$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_w} \end{bmatrix}$$

参数 x_1 和 x_2 是系统内部变量, $x_3 = q$ 是水轮机流量, $x_4 = g$ 是导叶开度, g_0, g_r 分别是导叶开度初始

值和额定值, h_0 是静态水头(每单位), k 为引水系统水头损失参数, R_n 是压力管的特性阻抗(每单位), T_e 是弹性时间常量(秒), T_w 是伺服时间常量(秒).

考虑到内部能量损失, 水轮机出力为:

$$P_m = A_l \gamma \frac{g^2 x_3^2}{x_4} (x_3 - q_{nl}) - A_l K_h (x_3^3 - q_{nl}^3) + \Delta p_{z0} [e^{-m(q_z - x_3)^2} - e^{-m(q_z - q_{nl})^2}] \quad (22)$$

其中, p_m 为输出机械功率(每单位), $\gamma = 9.81$, q_{nl} 是每单位水轮机空载流量, q_z 为在每单位水头最高效率下的流量, A_l 是增益系数, K_h 是水轮机管道的水头损失系数, Δp_{z0} 是冲击损失的系数, n_1 是每单位的冲击损失.

水轮机系统(21)满足式(1)的形式, 因此该系统的哈密顿模型可由第二节中给出的哈密顿建模方法得到. 可选择如下哈密顿函数:

$$H(x) = T_w A_l \gamma \frac{g^2 x_3^2}{x_4} (x_3 - q_{nl}) + T_w A_l k_h (x_3^3 - q_{nl}^3) x_4 - T_w \Delta p_{z0} [e^{-m(q_z - x_3)^2} - e^{-n_1(q_z - q_{nl})^2}] x_4 + x_1 x_2 \quad (23)$$

式子的最后一部分表示内部变量在转移过程中产生的能量. 变量 x_3 和 x_4 分别是流量和导叶开度, 当水轮机开启并与电力系统连接后, $x_3 > q_{nl} > 0$, $x_1, x_2, x_4 > 0$, 因此所选择的哈密顿函数为正.

哈密顿系统的自然输出为:

$$y = g^T \nabla H = -p_m \quad (24)$$

根据公式(4)和(5), $Z(x)$ 可以分解为:

$$z = \frac{1}{\|\nabla H\|^2} \sum_{i=1}^4 f_i \nabla_{x_i} H = \frac{1}{\|\nabla H\|^2} (x_2^2 + \sum_{i=2,3} f_i \nabla_{x_i} H + x_4 p_m - g_0 p_m) = -r(x) + s(x) \quad (25)$$

其中,

$$r(x) = \frac{1}{\|\nabla H\|^2} \left\{ A_l \gamma \frac{g^2 x_3^2}{x_4} q_{nl} + A_l K_h (x_3^3 - q_{nl}^3) x_4 - \Delta p_{z0} [e^{-m(q_z - x_3)^2} - e^{-m(q_z - q_{nl})^2}] x_4 + g_0 p_m \right\} \quad (26)$$

$$s(x) = \frac{1}{\|\nabla H\|^2} [x_2^2 + f_2 \nabla_{x_2} H + f_3 \nabla_{x_3} H + A_l \gamma \frac{g^2 x_3^2}{x_4}] \quad (27)$$

代入公式(6)得到控制律 u 为:

$$u = u' - \frac{s(x) \|\nabla H\|^2}{\langle g, \nabla H \rangle}$$

$$= u' + \frac{1}{p_m} [x_2^2 + f_2 \nabla_{x_2} H + f_3 \nabla_{x_3} H + A_l \gamma \frac{g^2 x_3^2}{x_4}] \quad (28)$$

系统(21)可以重建为:

$$\dot{x}_i = T_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x_j} + \hat{u}_i + \sigma_{ik} W_k \quad (29)$$

其中 $\hat{u}_i = g(x) u'$. 系统各参数值详见表1. 令初始状态 $P_m = 0.6(pu)$, $H = 0.28(pu)$, 则目标概率密度为:

$$\rho(H) = N e^{-\frac{(H-0.28)^2}{2\sigma^2}} \quad (30)$$

由公式(17), 可得 \hat{u}_i 为:

$$\hat{u}_i = (H - 0.28) \frac{\partial H}{\partial x_j} - T_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (31)$$

表1 系统参数

Table 1 System parameters

T_w	T_e	A_l	Q_{nl}	q_z	h_0
2.01s	0.035s	1.1204	1.3	2.1	270
k	K_h	Δp_{z0}	n_1	σ	
0.075	0.045	0.05	1	0.01	

为了证明系统的转移概率密度的确随时间变化收敛到目标概率密度, 设如下 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \quad (32)$$

根据公式(20)可知 V 的导数为:

$$L^* V = \sum_{i=1}^4 D_i [1 - (H - 0.28) x_i] \quad (33)$$

显然有 $V(x) \geq 0$, $V(x) \rightarrow \infty$, 当 $|x| \rightarrow \infty$ 且在区间 $R^4 - \Omega$ 中 $L^* V < 0$, 其中,

$$\Omega = \{x \in \sum_{i=1}^4 [1 - (H - 0.28) x_i] > 0\}$$

由此可见, 受控系统(29)的转移概率密度会随着时间 $t \rightarrow \infty$ 逐渐逼近到目标稳态概率密度.

然后, 通过一个闭环系统仿真实验来评估该方法的有效性. 图1所示是系统能量 H 在控制过程中的转移概率密度随时间的变化过程. 当 $t > 4s$ 的时候, H 的转移 PDF 的均值和方差分别是 0.28 和 0.01, 这个结果和其参考 SPDF 值 $N(0.28; 0.01)^2$ 一致, 可见转移概率密度能够逼近目标 SPDF. 因此, 由公式(28)和(31)确定的控制设计的确可以使系统(29)追踪到公式(30)给出的期望 SPDF 值. 图2展示了输出功率的响应曲线. 从中看出, 未控系统的输出为实线所示, 在随机激励下水力输出响应有较大波动; 而受控系统的输出 p_m (虚线)可以满足在短时间内, 大约 3~4 秒后, 经过小幅震荡后

稳定在一个特定区间.

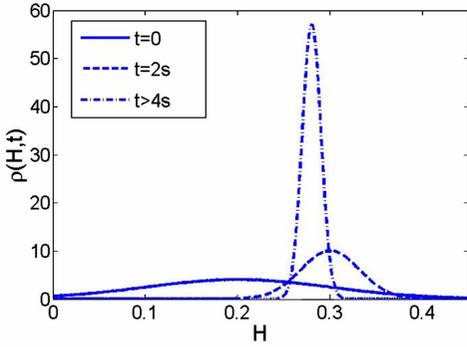


图1 转移概率密度 $\rho(H, t)$ 随时间的变化

Fig. 1 Evolution of $\rho(H, t)$ with the time

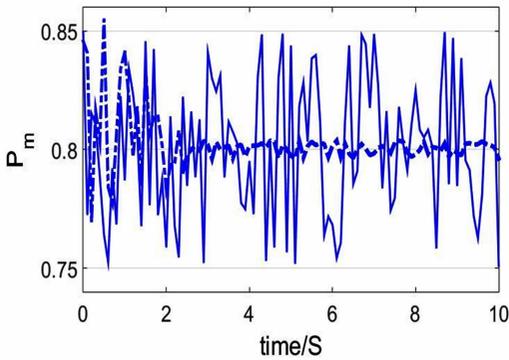


图2 水力输出响应

Fig. 2 Hydraulic output response

4 结论

虽然非线性系统的控制设计在很多工程领域应用中取得了一定进展,但是对随机扰动下非线性系统的控制研究的不足可能会导致一些问题,如针对更复杂的随机非线性系统而言,可能面临不准确的追踪性能,稳定性分析不足或较高的计算成本等.由于输出 PDF 的近似值仍不能准确地描述系统的特点,因此我们研究了一种随机非线性系统的反馈追踪控制问题.具体来说,该随机非线性系统的控制设计利用获得随机非线性系统的精确平稳解的技术来追踪预先设定的目标 SPDF.系统控制方法的闭环稳定性可以通过李雅普洛夫函数方法证明其收敛性.为了验证理论结果,所提出的方法被应用到弹性水击下的随机非线性水轮机系统中.系统仿真结果表明受控系统能够追踪任意形状的参考分布所对应的稳态概率分布.将来的工作重点是将这种方法应用到更多的工程应用领域中去,看看它是否适用于其他种类的随机非线性系统.

参 考 文 献

- 1 Arcaç M, Kokotovic P. Nonlinear observers: A circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 2001, 37(12):1923 ~ 1930
- 2 Chen M S, Chen C C. Robust nonlinear observer for Lipschitz nonlinear systems subject to disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(12):2365 ~ 2369
- 3 Fan X, Arcaç M. Observer design for systems with multi-variable monotone nonlinearities. *System Control Letters*, 2003, 50(4):319 ~ 330
- 4 Gauthier J P, Hammouri H, Othman S. A simple observer for non-linear systems: Applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(6):875 ~ 880
- 5 Jung P. Periodically driven stochastic systems. *Physics Reports*, 1993, 234(4-5):175 ~ 295
- 6 Lindner B, Garcia-Ojalvo J, Neiman A, Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems. *Physics Reports*, 2004, 392(6):321 ~ 424
- 7 Longtin A, Chialvo D. Stochastic and deterministic resonances in excitable systems. *Physical Review Letters*, 1998, 81(81):4012 ~ 4015
- 8 Astrom K J, Wittenmark B. Self-tuning controllers based on pole-zero placements. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 1980, 127:120 ~ 130
- 9 Goodwin G C, SIN K S. Adaptive filtering, prediction and control. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1984
- 10 Skelton R E, Iwasaki T, Grigoriadis K M. A unified algebraic approach to linear control design. Bristol, PA: Taylorand Francis, 1998
- 11 Lu J, Skelton R R. Covariance control using closed-loop modelling for structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1998, 27(11):1367 ~ 1383
- 12 Bar-Shalom Y, Li X R. Nonlinear filter design using Fokker-Planck-Kolmogorov probability density evolutions. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2000, 36(1):309 ~ 315
- 13 Crespo L G, Sun J Q. Non-linear stochastic control via stationary response design. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2003, 18(1):73 ~ 86
- 14 Guo L, Wang H, Wang A P. Optimal probability density function control for NARMAX stochastic systems. *Automatica*, 2008, 44(7):1904 ~ 1911
- 15 Yang Y, Guo L, Wang H. Constrained PI tracking control

- for output probability distributions based on two-step neural networks. *IEEE Transactions on Circuits Systems Part I*, 2009,56(7):1416 ~ 1426
- 16 Yi Y, Sun C Y, Guo L. Probabilistic tracking control for non-Gaussian stochastic process using novel iterative learning algorithms. *International Journal of Systems Science*, 2013,44(7):1325 ~ 1332
- 17 Pigeon B, Perrier M, Srinivasan B. Shaping probability density functions using a switching linear controller. *Journal of Process Control*, 2011,21(21):901 ~ 908
- 18 Herzallah R, Karny. Fully probabilistic control design in an adaptive critic framework. *Neural Network*, 2011,24(10):1128 ~ 1135
- 19 Annunziato M, Brozi A. A Fokker-Planck control framework for multidimensional stochastic processes. *Journal of Computational & Applied Mathematics*, 2013,237(1):487 ~ 507
- 20 Abharian A E, Fadaei A H. Power probability density function control and performance assessment of a nuclear research reactor. *Annals of Nuclear Energy*, 2014,64:11 ~ 20
- 21 Buehler E A, Paulson J A, Mesbah A. Lyapunov-based stochastic nonlinear model predictive control: Shaping the state probability density functions. In: Proceedings of the American Control Conference, Boston, To appear, 2016
- 22 Mesbah A. Stochastic model predictive control: An overview and perspectives for future research. *IEEE Control Systems*, 2016,36(6):30 ~ 44
- 23 Guo L, Wang H. Stochastic distribution control system design: A convex optimization approach. Springer, 2010
- 24 Cheng D, Spurgeon S, Xiang J. On the development of generalized Hamiltonian realizations. *IEEE Conference on Decision and Control*, 2000,5(5):5125 ~ 5130
- 25 Wang Y Z, Li C W, Cheng D Z. New approaches to generalized Hamiltonian realization of autonomous nonlinear systems. *Science In China Series F: Information Sciences*, 2003,46(5):431 ~ 444
- 26 Zhu W Q, Cai G Q, Lin Y K. On exact stationary solutions of stochastically perturbed Hamiltonian systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1990,5(2):84 ~ 87
- 27 Zhu W Q, Yang Y Q. Exactly stationary solutions of stochastically excited and dissipated integrable Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1996,63:493 ~ 500
- 28 Caughey T K. Nonlinear theory of random vibrations. *Advances in Applied Mechanics*, 1971,11:209 ~ 253

CONTROL DESIGN FOR A NONLINEAR HYDRAULIC TURBINE SYSTEM UNDER STOCHASTIC EXCITATION*

Zhu Chenxuan Ding Yunfei[†]

(Shanghai Dianji University, Shanghai 200240, China)

Abstract A new feedback tracing control method is presented for a class of nonlinear Hamiltonian systems with stochastic disturbances. It aims to accurately control the shape of the output probability density function. Meanwhile, a Lyapunov function method is employed to prove the optimality of the control law and the stability of closed-loop system. Eventually, to evaluate the performance of the proposed approach, a nonlinear stochastic hydraulic turbine system is utilized to be remodeled and to demonstrate the control design procedure and its effectiveness. The system simulation shows that the proposed feedback tracing control strategy for hydro-turbine system can achieve a pre-specified stationary probability density function (SPDF).

Key words nonlinear stochastic system, feedback tracing control, probability density function, Lyapunov function

Received 2 March 2017, revised 18 April 2017.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11302123), Shanghai Pujiang Program (15PJ1402500), Innovation Program of Shanghai Municipal Education Commission(14YZ163), "Chen Guang" project supported by Shanghai Municipal Education Commission and Shanghai Education Development Function(13CG63)

[†] Corresponding author E-mail: Dingyf@sdju.edu.cn