

气压扰动下介电弹性体球膜的随机响应分析*

金肖玲^{1,2} 王永^{1,2} 黄志龙^{1,2†}

(1. 浙江大学工程力学系, 杭州 310027) (2. 浙江省软体机器人与智能器件研究重点实验室, 杭州 310027)

摘要 研究随机扰动的压力和恒常电压联合作用下的介电弹性体球膜, 发展随机响应的分析方法并总结其规律, 为计及介电弹性体的应变强化现象, 其力学性能由 Gent 应变能模型描述, 压力扰动近似为高斯白噪声. 引入能量相关变换并应用随机平均法导出了关于系统总能量稳态概率密度的简化 Fokker-Planck-Kolmogorov 方程, 并解析得到方程的解, 从而得到球膜伸长比及其变化率的稳态概率密度, 进而得到伸长比的各阶统计量. 研究针对两种典型情形进行, 即球膜在伸长比为 1 附近的振动及球膜在材料拉伸极限附近的振动. 详细讨论了激励强度、材料参数及常电压值对伸长比统计量的影响, 特别强调了不同的材料参数和常电压值引起的不同振动模式. 蒙特卡洛模拟证实了分析结果的有效性和精度.

关键词 介电弹性体, 球膜, 随机平均法, 随机响应

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-030

引言

介电弹性体结构是由典型电活性聚合物介电弹性体及其上下表面的电极构成. 在电极上施加外加电压, 介电弹性体结构在厚度方向变薄且在面内延展. 由于介电弹性体结构具有电致变形大、响应快、质量轻、费用低及化学生物兼容性好等优异性能, 被广泛应用于驱动及传感等功能器件中, 如柔性机器人、智能光学器件、自调节流控器件及发电机等^[1-5].

介电弹性体结构常工作于动态模式下, 近年来对其复杂动力学行为有充分的研究^[6-13], 如用扰动静平衡态的方法分析振荡、固有频率、电压或/和外力随时间变化时的动态响应等, 并发现了丰富的动力学现象, 在交变电压激励下, 介电弹性体结构出现多频共振, 如主共振、超谐共振、亚谐共振等(在实验中也发现主共振和超谐共振现象, 但未发现亚谐共振^[14,15]), 以及突跳、分叉等现象, 研究还发现可通过结构设计或调整静态电压的方法来实现动态调频功能. 当前对介电弹性体结构动态行为的研究主要集中在确定性激励情形, 然而介电弹性体结构不可避免受到随机扰动, 如机械力与电压的

扰动, 这些随机扰动可能会影响功能器件的性能, 为了提高功能器件性能, 对介电弹性体结构的随机响应分析是非常有必要的. 目前, 已对压力和电压受随机扰动的介电弹性球膜结构的随机响应进行分析^[16,17], 采用的弹性应变能模型是 neo-Hookean 模型. neo-Hookean 模型能较好地模拟小应变时材料特性, 然而对聚合物其他的材料特性如应变强化行为, 该模型就不能描述, 因此随机激励情形的介电弹性体结构的响应分析还需要进一步深入.

本文基于此, 将以基于 Gent 模型的介电弹性体球膜为对象, 预测其受随机压力和常电压作用下的响应, 并分析激励强度、材料参数和常电压值对随机响应分析的影响.

1 介电弹性体球膜的动力学模型

泵、扬声器等结构在研究时可采用球来描述, 考虑理想介电弹性体球膜, 在压力和电压共同作用下将变形, 假设其变形过程始终保持球对称, 则介电弹性体球膜的动力学方程可简单用一个单自由度系统来描述球膜的变形. 在未变形的参考状态, 球膜的半径和厚度分别是 R 和 K . 当受到常电压 Φ_0 和随机的内外压力差 $p = p_0(1 + \xi(t))$, 球膜发

2017-04-10 收到第 1 稿, 2017-4-18 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11621062, 11672262, 11472240, 11532011)

† 通讯作者 E-mail: zhuang@zju.edu.cn

生变形,即时半径为 r .其中, p_0 为电压差均值, $\xi(t)$ 为随机过程,用强度为 $2D$ 的高斯白噪声描述.

假设介电弹性体球膜的热力学特性可以由系统的 Helmholtz 自由能密度描述,可表示为弹性应变能和电场能之和,这里采用 Gent 弹性应变能模型.根据虚功原理,系统的自由能变化应该等于电压、压力、惯性力及阻尼力(为简单起见采用粘性阻尼)做功之和,可导出介电弹性体球膜的无量纲动力学方程为:

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} + c \frac{d\lambda}{dt} + g(\lambda) = s_r \lambda^2 \xi(t) \quad (1)$$

其中, $\lambda = r/R$ 是球膜的伸长比, c 是无量纲粘性阻尼系数, $t = \hat{t} \sqrt{\mu/\rho}/R$ 为无量纲时间, ρ 为介电弹性体密度, μ 剪切模量.

$$g(\lambda) = (2\lambda - 2\lambda^{-5})/[1 - (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)/J_m] - s_r \lambda^2 - s_f \lambda^3$$

$$s_r = \frac{p_0 R}{\mu K}, \quad s_f = \frac{2\varepsilon \Phi_0^2}{\mu K^2} \quad (2)$$

J_m 是与拉伸极限有关的材料常数, ε 为介电常数.为方便,在后文中,将均值压力相关量 s_r 称为压力,常值电压相关量 s_f 称为电压.

令 $g(\lambda) = 0$ 可得出静态平衡位置 λ_{eq} 与恒常电压 s_f 的关系.研究发现当 $s_r = 0.1$, J_m 取不同值时,出现两种典型 $s_f \sim \lambda_{eq}$ 曲线,如图1所示.从图中可以看出:当 J_m 较小如 $J_m = 5$ 时,系统只有一个稳定的平衡位置;当 J_m 较大如 $J_m = 50$ 时,电压存在局部极大值,而电压在某个区间段时系统有两个稳定的平衡位置,如果电压不在这个区间段系统只有一个稳定的平衡位置,当 $J_m = 50$ 时这个电压区间段为 $(0.2571, 0.8775)$.当 $J_m \rightarrow \infty$,Gent模型简化为 neo-Hookean 模型,从图1中可以看出在小变形时确实可简化为 neo-Hookean 模型.

对 $g(\lambda)$ 关于 λ 进行积分可得:

$$V(\lambda) = -\frac{J_m}{2} \log\left(1 - \frac{2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3}{J_m}\right) - \frac{s_r}{3} \lambda^3 - \frac{s_f}{4} \lambda^4 \quad (3)$$

V 可认为是系统的势能.由式(3)的表达式中看出要使 V 有物理意义,即 \log 项保持实数,则伸长比 λ 必须要在一定范围里,且范围区间与 J_m 取值有关.图2给出了不同参数情形下的 $V \sim \lambda$ 曲线及其相应的伸长比范围,从图中可以看出当 J_m 较小如 $J_m = 5$ 时,系统势能曲线有一个势阱;当 J_m 较大如 J_m

$= 50$ 时,随着电压的变大,势能曲线可从一个势阱变到两个势阱,再到一个势阱,即在某个电压区间,系统是双稳的,与图2的结论相一致;且在 $\lambda = \lambda_{eq}$ 时,系统势能达到局部极小值 V_m .双稳系统的响应很复杂,本文先只关注单稳系统.

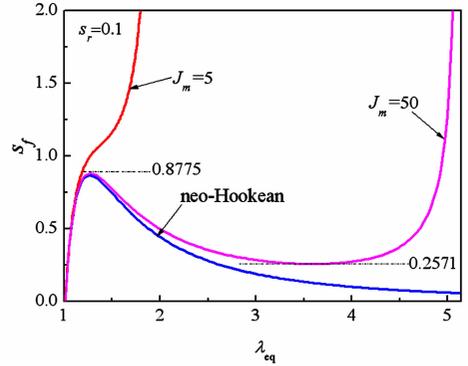


图1 静态平衡位置与恒常电压的关系

Fig. 1 Voltage-stretch ratio curves

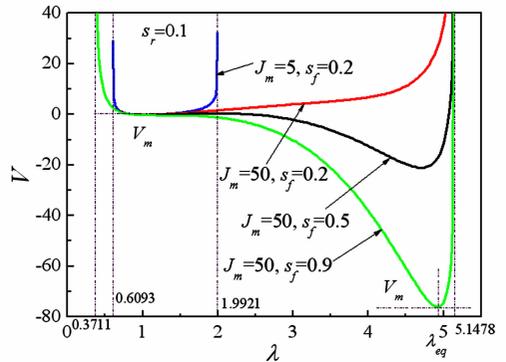


图2 系统势能曲线

Fig. 2 Curves of system potential

2 随机响应分析

由式(2)可知系统(1)是一个强非线性随机动力学系统,且受到随机非线性参数激励,一般很难得到系统的精确解析解.本文将采用随机平均法来近似预测系统的随机稳态响应.

首先,引入下列变换^[18],

$$\text{sgn}(\lambda - \lambda_{eq})U(\lambda) = \sqrt{H}\cos\varphi, \quad \dot{\lambda} = -\sqrt{2H}\sin\varphi \quad (4)$$

其中 φ 为相位角, H 系统能量,表示为:

$$H = \lambda^2/2 + U(\lambda) \\ U(\lambda) = V(\lambda) - V_m \quad (5)$$

根据变换(4),可将系统的动力学方程描述为关于系统能量 H 和相位角 φ 的随机微分方程.应

用随机平均方法,系统能量 $H(t)$ 可近似为一个一维扩散过程,并由下面的随机 Itô 方程描述^[19]:

$$dH = m(H)dt + \sigma(H)dB(t) \quad (6)$$

其中 $B(t)$ 为一单位维纳过程,漂移系数和扩散系数分别为:

$$m(H) = \frac{2}{T(H)} \times \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(-c\sqrt{2H - 2U(\lambda)} + \frac{Ds_r^2\lambda^4}{\sqrt{2H - 2U(\lambda)}} \right) d\lambda$$

$$\sigma^2(H) = \frac{2}{T(H)} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} 2Ds_r^2\lambda^4 \sqrt{2H - 2U(\lambda)} d\lambda \quad (7)$$

式(7)中 λ_1 和 λ_2 分别是方程 $H - U(x) = 0$ 的最小根和最大根,能量依赖的周期可由下式计算得到:

$$T(H) = 2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{\sqrt{2H - 2U(\lambda)}} d\lambda \quad (8)$$

根据式(6)可导出相应的关于系统能量稳态概率密度的简化 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程,方程的解即系统能量的稳态概率密度表示为:

$$p(H) = \frac{C}{\sigma^2(H)} \exp \left[\int_0^H \frac{2m(u)}{\sigma^2(u)} du \right] \quad (9)$$

其中 C 为归一化常数. 伸长比和它的变化率的联合概率密度可由如下式近似计算得到:

$$p(\lambda, \dot{\lambda}) = \frac{p(h)}{T(h)} \Big|_{h=\lambda^2/2 + U(\lambda)} \quad (10)$$

伸长比的稳态概率密度和伸长比的变化率的稳态概率密度可分别通过式(10)对 $\dot{\lambda}$ 和 λ 积分得到. 一般更关注球膜的伸长比,伸长比的均值及均方值由如下计算得到:

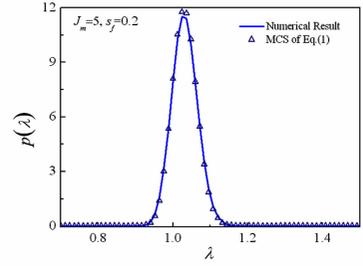
$$E[\lambda] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda p(\lambda, \dot{\lambda}) d\dot{\lambda} d\lambda$$

$$E[\lambda^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 p(\lambda, \dot{\lambda}) d\dot{\lambda} d\lambda \quad (11)$$

3 数值结果与讨论

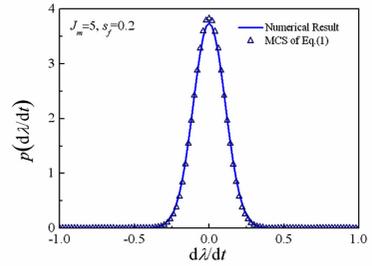
为了验证所提方法的有效性和准确性,所提方法得到的结果与对系统(1)的蒙特卡洛模拟方法得到的结果进行比较,并讨论材料参数和激励参数对响应的影响. 在后面计算中选定 $c = 0.01$ 和 $s_r = 0.1$. 对单稳情形,从图1和图2可看出不同的材料参数和常电压值系统时动力学行为不一样,材料参数较小时,球膜在伸长比为1附近振动,而当材料参数较大且施加的电压也比较大时,则球膜在伸长比为较大的稳定平衡位置即球膜在材料拉伸极限

附近振动. 图3和图4分别给出了两种典型响应,图(a)和(b)中实线表示本文方法得到的结果,三角符号表示系统(1)的蒙特卡洛模拟方法得到的结果,下面图中有类似的表示.



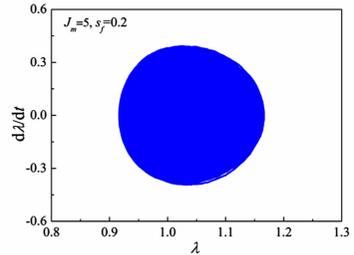
(a) 伸长比的稳态概率密度

(a) Stationary marginal probability density of the stretch ratio



(b) 伸长比变化率的稳态概率密度

(b) Stationary marginal probability density of the change rate of the stretch ratio



(c) 响应样本的相图

(c) Phase chart of response sample

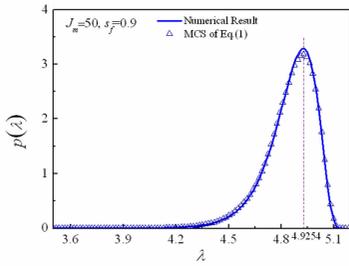
图3 系统稳态响应

(参数取值: $c = 0.01, s_r = 0.1, s_f = 0.2, J_m = 5, D = 0.01$)

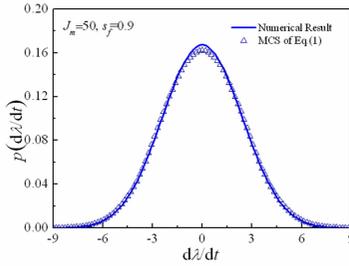
Fig. 3 Stationary response of the system

(Parameter values: $c = 0.01, s_r = 0.1, s_f = 0.2, J_m = 5, D = 0.01$)

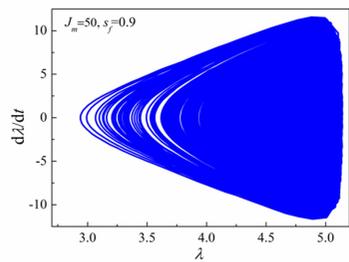
图3和图4的数值结果与模拟结果吻合很好,这说明本文所提方法的有效性和准确性. 图4(a)中可明显观察到球膜伸长比的稳态概率密度曲线的不对称性,且当伸长比超过静态平衡点如图中 $\lambda_{eq} = 4.9254$ 时其概率密度快速减小,某个响应样本的相图如图4(c)所示,这应归因于材料的应变强化特性.



(a) 伸长比的稳态概率密度
(a) Stationary marginal probability density of the stretch ratio



(b) 伸长比变化率的稳态概率密度
(b) Stationary marginal probability density of the change rate of the stretch ratio



(c) 响应样本的相图
(c) Phase chart of response sample

图 4 系统稳态响应

(参数取值: $c = 0.01, s_r = 0.1, s_f = 0.2, J_m = 50, D = 0.01$)

Fig. 4 Stationary response of the system

(Parameter values: $c = 0.01, s_r = 0.1, s_f = 0.2, J_m = 50, D = 0.01$)

下面讨论激励强度、材料参数及常电压值对伸长比的均值及均方值的影响. 图 6 给出了伸长比均值和均方值随着随机激励强度的变化, 从中可观察到伸长比均值和均方值都随着激励强度的增加而增加, 球膜在伸长比为 1 附近振动, 伸长比的均值比静态平衡伸长比要大. 伸长比统计量随材料参数 J_m 的变化如图 7 所示, 伸长比均值和均方值都随着材料参数 J_m 的增加而增加, 在这些参数取值的情况下, 球膜在伸长比为 1 附近振动, 当 $J_m \rightarrow \infty$, Gent 模型简化为 neo-Hookean 模型, 从图 7 中也可以看出伸长比统计量在 $J_m \rightarrow \infty$ 时确实趋于 neo-Hookean 模型的结果. 静态平衡的伸长比也是随着材料参数 J_m 的增加而增加最后趋于稳定. 此情形

下的球膜仍是在伸长比为 1 附近振动, 伸长比的均值比静态平衡伸长比要大. 图 8 给出了伸长比均值和均方值随着常电压值的变化曲线. 由图 1 常电压值与静态平衡伸长比的曲线可知, 当取不同的材料参数 J_m 表现出两种典型的曲线, 所以图 8 (a) 和 (b) 分别给出了 $J_m = 5$ 和 $J_m = 50$ 情形. 当 $J_m = 5$ 时, 任何电压下的球膜都是单稳系统, 伸长比均值、均方值及静态平衡伸长比都随着常电压值的增加而增加, 而且增加的速率随着电压的增加先增加后减小, 当电压比较大时, 球膜伸长比的概率密度也出现不对称性, 同样是由于应变强化引起. 从图 1 中可看出电压随着平衡位置快速增加现象, 也就是说在电压比较小时, 球膜在伸长比为 1 附近振动,

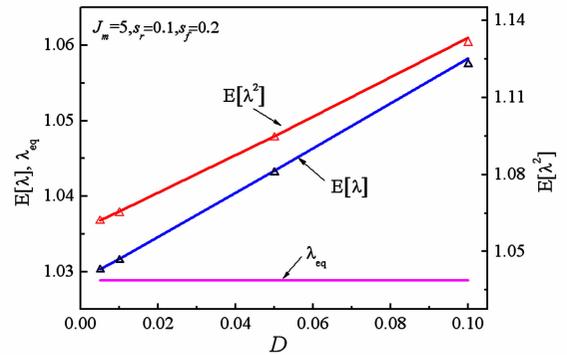


图 6 伸长比均值、均方值、静态平衡伸长比随激励强度的变化
(参数取值: $c = 0.01, s_r = 0.1, s_f = 0.2, J_m = 5$)

Fig. 6 Variations of the mean value and mean-square value of the stretch ratio and the static equilibrium stretch ratio with the change of excitation intensity

(Parameter values: $c = 0.01, s_r = 0.1, s_f = 0.2, J_m = 5$)

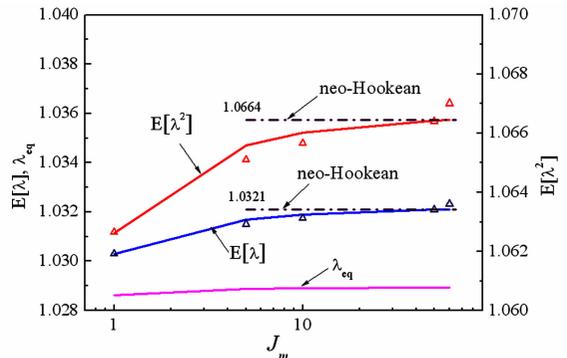


图 7 伸长比均值、均方值、静态平衡伸长比随材料参数的变化
(参数取值: $c = 0.01, s_r = 0.1, s_f = 0.2, D = 0.01$)

Fig. 7 Variations of the mean value and mean-square value of the stretch ratio and the static equilibrium stretch ratio with the change of material parameter

(Parameter values: $c = 0.01, s_r = 0.1, s_f = 0.2, D = 0.01$)

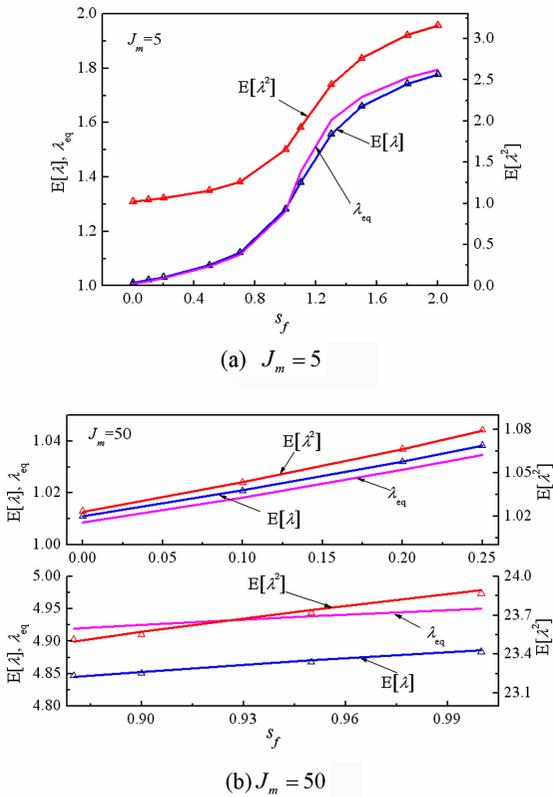


图8 伸长比均值、均方值和静态平衡伸长比随常电压值的变化
(参数取值: $c = 0.01, s_r = 0.1, s_f = 0.2, D = 0.01$)

Fig.8 Variations of the mean value and mean-square value of the stretch ratio and the static equilibrium stretch ratio with the change of voltage
(Parameter values: $c = 0.01, s_r = 0.1, D = 0.01$)

而当电压较大时,出现应变强化现象,球膜在材料极限拉伸附近振动.从图8(a)中还观察到在电压比较小即球膜在伸长比为1附近振动时,伸长比的均值比静态平衡伸长比要大,而当电压比较大即在材料拉伸极限附近振动时,伸长比的均值比静态平衡伸长比要小.当 $J_m = 50$ 时,当电压值小于0.2571或电压值大于0.8775时,球膜是单稳系统,伸长比均值、均方值及静态平衡伸长比都随着常电压值的增加而增加,其中电压小于0.2571时,球膜在伸长比为1附近扰动,伸长比的均值比静态平衡伸长比要大,而电压值大于0.8775,在材料拉伸极限附近振动,伸长比的均值比静态平衡伸长比要小.

4 结论

本文研究了介电弹性体球膜的随机响应,其中弹性应变能模型采用能描述应变强化的Gent模型,受到随机扰动的压力及常电压作用.引入系统能量相关的变换并应用随机平均法可推导出控制系统能量的稳态概率密度的简化FPK方程,并解

析得到方程的解,从而可以得到球膜伸长比及其变化率的联合概率密度,进而可计算相应响应的边缘概率密度及其各阶统计量.数值结果与模拟结果比较验证了本文所提方法的有效性和准确性.对所研究系统的单稳情形,主要有两种典型的振动,其一是球膜在伸长比为1附近的扰动,另一个是球膜在材料拉伸极限附近的扰动,且后一种归因于材料的应变强化.激励强度、材料参数及常电压值对伸长比有很大的影响,特别是不同的材料参数和常电压值引起不同的振动模式.伸长比均值和均方值都随着这三个参数的增加而增加.球膜在伸长比为1附近振动时,当材料参数趋于无穷,伸长比均值和均方值趋于neo-Hookean模型的结果.球膜在伸长比为1附近振动时,伸长比的均值比静态平衡伸长比要大,当球膜在材料拉伸极限附近振动时,伸长比的均值比静态平衡伸长比要小.

参 考 文 献

- Pelrine R, Kornbluh R, Pei Q, et al. High-speed electrically actuated elastomers with strain greater than 100%. *Science*, 2000,287(5454):836~839
- O'Halloran A, O'Malley F, McHugh P. A review on dielectric elastomer actuators, technology, applications, and challenges. *Journal of Applied Physics*, 2008,104(7):071101
- Suo G. Theory of dielectric elastomers. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2010,23(6):549~578
- Brochu P, Pei Q. Advances in dielectric elastomers for actuators and artificial muscles. *Macromolecular Rapid Communications*, 2010,31(1):10~36
- McKay T, O'Brien B, Calius E, et al. An integrated, self-priming dielectric elastomer generator. *Applied Physics Letters*, 2010,97(6):062911
- Zhu J, Cai S Q, Suo Z G. Nonlinear oscillation of a dielectric elastomer balloon. *Polymer International*, 2010,59(3):378~383
- Zhu J, Cai S Q, Suo Z G. Resonant behavior of a membrane of a dielectric elastomer. *International Journal of Solids and Structures*, 2010,47(24):3254~3262
- Son S, Goulbourne N C. Dynamic response of tubular dielectric elastomer transducers. *International Journal of Solids and Structures*, 2010,47(20):2672~2679
- Li T F, Qu S X, Yang W. Electromechanical and dynamic analyses of tunable dielectric elastomer resonator.

- International Journal of Solids and Structures*, 2012, 49 (26) :3754 ~ 3761
- 10 Xu B X, Mueller R, Theis A, et al. Dynamic analysis of dielectric elastomer actuators. *Applied Physics Letters*, 2012, 100(11) :112903
- 11 Mockensturm E M, Goulbourne N. Dynamic response of dielectric elastomers. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, 41(3) :388 ~ 395
- 12 Yong H D, He X Z, Zhou Y H. Dynamics of a thick-walled dielectric elastomer spherical shell. *International Journal of Engineering Science*, 2011, 49(8) :792 ~ 800
- 13 Sheng J J, Chen H L, Li B, et al. Nonlinear dynamic characteristics of a dielectric elastomer membrane undergoing in-plane deformation. *Smart Materials and Structures*, 2014, 23(4) :045010
- 14 Fox J W, Goulbourne N C. On the dynamic electromechanical loading of dielectric elastomer membranes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, 56(8) : 2669 ~ 2686
- 15 Fox J W, Goulbourne N C. Electric field-induced surface transformations and experimental dynamic characteristics of dielectric elastomer membranes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2009, 57(8) :1417 ~ 1435
- 16 Jin X L, Huang Z L. Random response of dielectric elastomer balloon to electrical or mechanical perturbation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2017, 28(2) :195 ~ 203
- 17 Jin X L, Wang Y, Chen M Z Q, et al. Response analysis of dielectric elastomer spherical membrane to harmonic voltage and random pressure. *Smart Materials and Structures*, 2017, 26(3) :035063
- 18 Cai G Q. Random vibration of nonlinear-system under nonwhite excitations. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 1995, 121(5) :633 ~ 639.
- 19 朱位秋. 随机振动. 北京:科学出版社, 1998 (Zhu W Q. Random vibration. Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese))

RANDOM RESPONSE OF DIELECTRIC ELASTOMER BALLOON SUBJECTED TO DISTURBED PRESSURE *

Jin Xiaoling^{1,2} Wang Yong^{1,2} Huang Zhilong^{1,2†}

(1. Department of Engineering Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou, China)

(2. Key Laboratory of Soft Machines and Smart Devices of Zhejiang Province, Hangzhou, China)

Abstract The random response of dielectric elastomer balloon subjected to random pressure and constant voltage is investigated, where the mechanical property is described by Gent model in order to consider the strain-stiffening effect of the dielectric elastomer, and the random pressure is described by Gaussian white noise. By introducing the energy-dependent transformation and using the stochastic averaging, the reduced Fokker-Planck-Kolmogorov equation governing the stationary probability density of the system total energy is derived, which can be analytically solved. The marginal probability densities of the stretch ratio and its change ratio are then calculated, as well as the mean value and the mean-square value of the stretch ratio. Two typical cases are investigated in detail, i. e. , one is with the stretch ratio of balloon vibrating of around 1 and the other is that around the extension limit. The influences of the random excitation intensity, material parameter and the constant voltage on the statistics of the stretch ratio are discussed in detail. Different values of the material parameter and the constant voltage can cause completely different random vibration behaviors. The efficacy and accuracy of the proposed procedure are eventually verified by comparing with the results from Monte Carlo simulation.

Key words dielectric elastomer, balloon, stochastic averaging, random response