

# 基于分数阶导数的经济波动模型的稳定性研究\*

林子飞<sup>1</sup> 徐伟<sup>1†</sup> 韩群<sup>2</sup>

(1. 西北工业大学应用数学系, 西安 710072) (2. 华中农业大学理学院, 武汉 430070)

**摘要** 分析了含有分数阶导数的经济波动模型, 其中分数阶导数描述了经济变量的长记忆性质. 将随机动力系统的概念引入到了经济波动模型以理解经济波动的本质特征. 主要研究了经济波动问题中的平衡状态的稳定性以及经济波动的波动幅度问题. 首先, 我们研究了经济变量的记忆性质对经济波动的稳定性和波动幅度的影响. 结果表明, 经济变量的长记忆性延长了经济系统到达平衡状态的时间, 这对宏观经济调控提供了一个新的视角和观点. 其次, 我们研究了分数阶导数如何影响和改变经济波动的波动幅度. 结果显示相比于经典模型, 经济变量的时间记忆特性会产生不同的令人惊奇的现象.

**关键词** 经济波动模型, 分数阶导数, 随机激励, 多尺度方法

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-029

## 引言

经济波动一直是宏观经济研究中的核心问题之一. 研究经济波动的稳定性以及经济波动幅度具有十分重要的理论意义. 20世纪50年代, Goodwin<sup>[1]</sup>改进了希克斯模型并且在文章“The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles”中取得了突破性的进展. Sasakura<sup>[2]</sup>给出了Goodwin模型含有唯一的稳定的极限环的证明. Kaldor<sup>[3]</sup>和Kalecki给出了一个非线性模型来描述经济系统的波动问题. Puu和Sushko<sup>[5]</sup>给出了一个包含引致投资函数以抵御经济衰退的经济波动模型. Franke等<sup>[6]</sup>研究了收入分配在经济波动中的作用. Matsu-moto<sup>[7]</sup>通过研究发现, 连续的时间滞后效应比固定的时间滞后效应对于系统稳定性的影响更大, 而且当平衡点在局部稳定的条件下, 可以存在多个极限环. Yoshida和Asada<sup>[8]</sup>研究了政府调控以及政策滞后效应对于经济系统的影响.

经济变量的时间记忆性使得分数阶导数适合描述经济变量的这种长记忆性. 许多学者在分数阶导数的应用型研究方面做出了很多出色的工作. Nick Laskin<sup>[9]</sup>研究了含有分数阶导数的金融系统并且得到了回报的概率分布. Chen<sup>[10]</sup>分析了一个

分数阶金融系统的动力学行为以及混沌机制. Wang等<sup>[11]</sup>提出了一个含有时滞的分数阶金融系统, 并且分析了该系统的动力学行为. Marius-F<sup>[12]</sup>提出了参数切换方法来研究分数阶金融系统的动力学特性. Indranil Pan<sup>[13]</sup>提出了带有正向控制策略的分数阶金融系统. Sachin Bhalekar<sup>[14]</sup>研究了变量的时滞效应对于系统混沌的影响. Yin<sup>[15]</sup>设计了一种滑模控制方法来控制分数阶系统的混沌行为.

在现实环境中, 外部的随机扰动是不可避免的. 同样, 这些外部的随机扰动也会影响经济系统的运行. 李俊瑞<sup>[16]</sup>研究了带有时滞反馈控制的非线性经济波动模型的响应问题. 李爽<sup>[17]</sup>研究了确定性以及带有随机激励情形下的经济波动模型的混沌控制问题. Spanos和Zeldin<sup>[18]</sup>提出了频域方法来研究带有分数阶导数的系统的随机动力学行为. 许勇和李永歌<sup>[19]</sup>提出了一种新的摄动方法来获得分数阶随机系统的近似解析解. 刘迪<sup>[20]</sup>研究了带有分数阶导数的含参数激励的随机系统的共振响应问题. 陈林聪和朱位秋<sup>[21]</sup>应用随机平均方法研究了带有周期激励以及白噪声激励的分数阶非线性系统. 黄志龙研究了强非线性分数阶系统的随机响应以及随机稳定性问题<sup>[22]</sup>. Dimatteo等<sup>[23]</sup>提出了一种新的解析方法, 可以获得系统非平稳响应的

2017-03-17 收到第1稿, 2017-04-18 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11532011)

† 通讯作者 E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

概率密度函数.

本文由以下几个部分构成. 在第二节, 考虑到经济变量的时间记忆特性, 我们建立了一个带有分数阶导数的经济波动模型. 在第三节, 我们研究了带有分数阶导数的经济波动模型平衡状态的定点稳定性. 在第四节给出了窄带噪声激励下的分数阶经济波动模型. 应用多尺度方法得到了经济系统的波动幅度. 其次, 进行数值模拟来验证了解析方法的有效性, 并且分析了分数阶导数对经济波动幅度范围以及经济波动幅度的概率密度的影响.

## 1 模型

文献[3]中, Goodwin 提出了一个数学模型来研究经济系统的经济波动问题. 该模型如下:

$$\delta\eta \dot{y}(t) + (\delta + (1 - \alpha)\eta) \dot{y}(t) - \varphi(\dot{y}(t)) + (1 - \beta)y(t) = O^*(t) \quad (1)$$

其中  $O^*(t)$  代表自发的投资. 这里我们将其设定为常数  $O^*$ . 由此可以得到下式:

$$\delta\eta \dot{z}(t) + (\delta + (1 - \alpha)\eta) \dot{z}(t) - \varphi(\dot{z}(t)) + (1 - \beta)z(t) = 0 \quad (2)$$

其中,

$$z(t) = y(t) - O^*/(1 - \beta) \quad (3)$$

在经过变换之后, 方程(2)可以写成下面的形式:

$$\dot{x}(t) + \kappa \dot{x}(t) - \Phi(\dot{x}(t)) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (4)$$

其中,

$$x(t) = z(t), \kappa = \frac{\delta + (1 - \beta)\eta}{\delta\eta}, \Phi(\dot{x}(t)) = \frac{1}{\delta\eta} \varphi(\dot{x}(t)), \omega^2 = \frac{1 - \beta}{\delta\eta} \quad (5)$$

$Y(t)$  是经济变量,  $\delta$  代表投资支出的时间滞后,  $\beta$  代表边际消费倾向,  $\eta$  代表新的固定投资的时间滞后.  $\Phi(\dot{x}(t))$  代表引致投资, 其中  $\delta, \beta, \eta$  都是常数.

考虑到失业、环境污染、投资的时滞效应, 代表阻碍经济系统达到平衡态的系统阻尼  $\kappa \dot{x}(t)$  可以写成分数阶导数的形式:

$$\dot{x}(t) + \kappa D^\alpha x(t) - \Phi(\dot{x}(t)) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (6)$$

## 2 经济系统的稳定性

### 2.1 稳定性影响

经济系统的平衡态即动力系统的定点. 为了研究经济变量的时间记忆性质对于系统稳定性的影响, 方程(6)可以写为如下形式:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = y(t) \\ D^{1-\alpha} y(t) = z(t) \\ D^1 z(t) = \Phi(z(t)) - \kappa y(t) - \omega^2 x(t) \end{cases} \quad (7)$$

**定理 2.1** 根据文献[24]提出的稳定性定理, 系统(7)的特征方程可以写为:

$$\det(\text{diag}([\lambda^{mq_1} \lambda^{mq_2} \cdots \lambda^{mq_n}]) - J) = 0 \quad (8)$$

其中  $q_i$  为分数阶导数  $0 < q_i < 2$ ,  $m$  为分数阶阶数的最小公倍数, 根据各参数的经济学意义, 我们设  $\alpha = 0.5, \omega = 1, \kappa = 0.3, \Phi(z(t)) = 0.05(z(t))^3$ , 系统(7)可以写为如下形式:

$$\begin{cases} D^{0.5} x(t) = y(t) \\ D^{0.5} y(t) = z(t) \\ D^1 z(t) = 0.05(z(t))^3 - 0.3y(t) - x(t) \end{cases} \quad (9)$$

系统(7)有唯一的定点  $(0, 0, 0)$ . 在  $(0, 0, 0)$  点的系统的雅各比矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -0.3 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

方程(8)变为:

$$10\lambda^4 + 3\lambda + 10 = 0 \quad (11)$$

可以得到:

$$\min\{|\arg(\lambda_i)|\} = 0.833 > \frac{\gamma}{2}\pi = \frac{\pi}{4} \quad (12)$$

因此定点是渐近稳定的<sup>[24]</sup>, 这意味着经济系统可以在平衡点运行.

如果我们设  $\alpha = 1$ , 雅各比矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

特征方程为:

$$10\lambda^2 + 3\lambda + 10 = 0 \quad (14)$$

特征值可以计算得到  $\lambda_{1,2} = -0.15 \pm 0.99i$ , 也是渐近稳定的.

### 2.2 到达平衡态的过程

从图1中可以看出, 随着分数阶导数阶数的减小, 到达平衡状态所需的时间变长了. 这就是说, 在制定宏观调控政策时必须考虑到经济变量记忆特性的影响, 否则会错误地估计经济政策对经济系统的效用.

## 3 经济波动的幅度

### 3.1 近似解析解

通过上面的分析, 方程(6)可以写为如下形式:

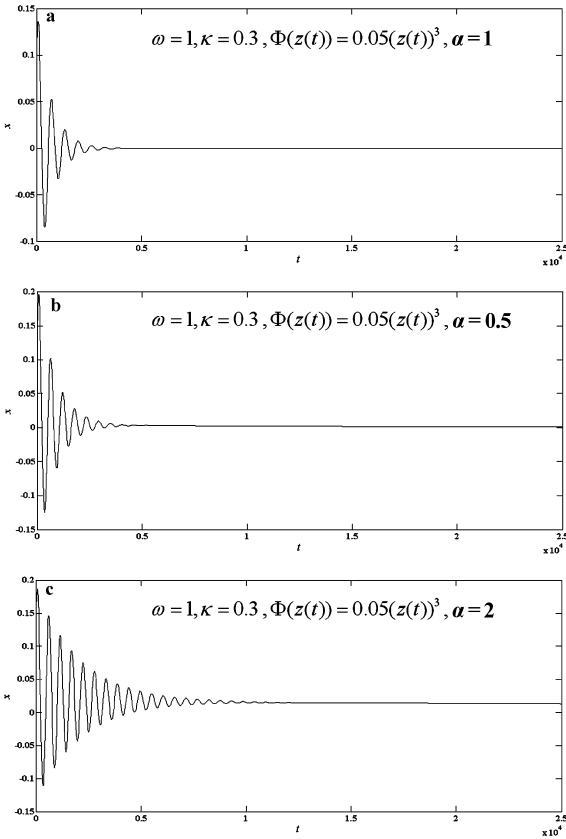


图1 时间历程  
Fig. 1 Time history

$$\ddot{x}(t) + \kappa D^\alpha x(t) - \Phi(\dot{x}(t)) + \bar{\omega}^2 x(t) = f \cos(\Omega t + \gamma W(t)) \quad (14)$$

其中  $f > 0$  表示随机激励的振幅,  $\Omega$  表示周期激励的频率,  $W(t)$  代表标准维纳过程,  $\gamma \geq 0$  表示随机激励的噪声强度.

为了应用多尺度方法, 引入小参数  $0 < \varepsilon < 1$ , 所以方程 (14) 可以写为:

$$\ddot{x}(t) + \varepsilon \bar{\kappa} D^\alpha x(t) - \varepsilon \Phi(\dot{x}(t)) + \bar{\omega}^2 x(t) = \varepsilon \xi(t) \quad (15)$$

其中  $\xi(t) = \bar{f} \cos(\Omega t + \gamma W(t))$ . 功率谱密度  $S_\xi(\omega)$  为<sup>[25]</sup>:

$$S_\xi(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\bar{f}^2 \gamma^2 (\Omega^2 + \bar{\omega}^2 + \gamma^4/4)}{(\Omega^2 - \bar{\omega}^2 + \gamma^4/4)^2 + \bar{\omega}^2 \gamma^4} \quad (16)$$

对于分数阶导数<sup>[26]</sup>, 我们选取黎曼-刘维尔定义:

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, 0 < \alpha < 1 \quad (17)$$

利用多尺度方法, 方程 (15) 的解可以写成如下形式:

$$x(t) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) \quad (18)$$

其中  $T_0 = t$  代表快变时间变量,  $T_1 = \varepsilon t$  代表慢变时间变量. 记:

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1} \quad (19)$$

则有:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (20)$$

将方程 (18) 和 (19) 代入方程 (15) 比较  $\varepsilon$  的系数, 可以得到:

$$D_0^2 x_0 + \bar{\omega}^2 x_0 = 0 \quad (21)$$

$$D_1^2 x_1 + \bar{\omega}^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + \Phi(D_0 x_0) - \bar{\kappa} D_0^\alpha x_0 + \xi(t) \quad (22)$$

方程 (21) 的解可以写成:

$$x_0 = A(T_1) e^{i\bar{\omega} T_0} + cc \quad (23)$$

$cc$  表示前面各项的复共轭. 将方程 (23) 代入方程 (22), 可以得到:

$$D_1^2 x_1 + \bar{\omega}^2 x_1 = -2D_0 D_1 (A(T_1) e^{i\bar{\omega} T_0} + cc) + \Phi(D_0 (A(T_1) e^{i\bar{\omega} T_0} + cc)) - \bar{\kappa} D_0^\alpha (A(T_1) e^{i\bar{\omega} T_0} + cc) + \frac{\bar{f}}{2} (e^{i(\Omega + \bar{\gamma} W(T_1))} + cc) \quad (24)$$

对于黎曼-刘维尔定义, 方程 (24) 右边的第三项可以写成如下形式:

$$D_0^\alpha (A(T_1) e^{i\bar{\omega} T_0} + cc) = (i\bar{\omega})^\alpha A(T_1) e^{i\bar{\omega} T_0} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} A(T_1) \int_0^\infty \frac{u^\alpha}{u + i\bar{\omega}} e^{-uT_0} du + cc \quad (25)$$

其中方程 (25) 右边的第二项不产生久期项, 因此不影响最终的解<sup>[27]</sup>.

为了研究系统的主共振响, 引入协调参数  $\sigma$ , 由  $\Omega = \bar{\omega} + \varepsilon\sigma$ ,  $(\Omega - \bar{\omega})T_0 = \sigma T_1$ . 消除久期项, 得:

$$-2i\bar{\omega} A' + \Phi_\omega(A, \bar{A}) - \bar{\kappa} (i\bar{\omega})^\alpha A + \frac{\bar{f}}{2} e^{i(\sigma T_1 + \bar{\gamma} W(T_1))} = 0 \quad (26)$$

其中  $\Phi_\omega(A, \bar{A})$  表示  $e^{i\bar{\omega} T_0}$  的系数,  $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}}$ ,  $\gamma W(t) =$

$$\frac{rW(\varepsilon t)}{\sqrt{\varepsilon}} = \bar{\gamma} W(T_1).$$

$A$  可以表示为极坐标的形式:

$$A = \frac{\alpha(T_1)}{2} e^{i\varphi(T_1)} \quad (27)$$

方程 (26) 中, 一个基本的公式要应用到:

$$(i\bar{\omega})^\alpha = \bar{\omega}^\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\bar{\omega}^\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) \quad (28)$$

将方程(27),(28)代入(26)并分离方程(26)的实部和虚部,可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{1}{2}\bar{\kappa}\bar{\omega}^{\alpha-1}a\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + \frac{1}{\bar{\omega}}\Phi_{i,\bar{\omega}}(a) + \frac{\bar{f}}{2\bar{\omega}}\sin(\theta) \\ a\dot{\theta} &= a\sigma - \frac{1}{2}\bar{\kappa}\bar{\omega}^{\alpha-1}a\cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + \frac{1}{\bar{\omega}}\Phi_{r,\bar{\omega}}(a) + \\ &\quad \frac{\bar{f}}{2\bar{\omega}}\cos(\theta) + \bar{\gamma}a\dot{W}(T_1) \end{aligned} \quad (29)$$

其中  $\theta = \sigma T_1 + \bar{\gamma}W(T_1) - \varphi(T_1)$ .  $\Phi_{i,\bar{\omega}}(a)$  和  $\Phi_{r,\bar{\omega}}(a)$  表示非线性方程  $\Phi_\omega(A, \bar{A})$  的实部和虚部.

通过解方程(29),可以得到振幅  $a$  和相位  $\theta$ .

由此可以得到方程(7)的一阶近似解:

$$x(t) = a(\varepsilon t) \cos(\Omega t - \theta(\varepsilon t)) + O(\varepsilon) \quad (30)$$

从方程(29)可以得到平凡和非平凡的稳态解. 方程(29)的非平凡解是  $a = a_0, \theta = \theta_0$ , 当  $\bar{\gamma} = 0$ , 满足  $\dot{a} = \dot{\theta} = 0$ , 就是:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\bar{\kappa}\bar{\omega}^{\alpha-1}a_0\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + \frac{1}{\bar{\omega}}\Phi_{i,\bar{\omega}}(a_0) + \\ \frac{\bar{f}}{2\bar{\omega}}\sin(\theta_0) &= 0 \\ a_0\sigma - \frac{1}{2}\bar{\kappa}\bar{\omega}^{\alpha-1}a_0\cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + \frac{1}{\bar{\omega}}\Phi_{r,\bar{\omega}}(a_0) + \\ \frac{\bar{f}}{2\bar{\omega}}\cos(\theta_0) &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

消去  $\theta_0$  我们可以得到频率响应方程:

$$\begin{aligned} (\bar{\kappa}\bar{\omega}^\alpha a_0 \cos(\pi) - 2\Phi_{r,\bar{\omega}}(a_0) - 2\bar{\omega}a\sigma)^2 + \\ (\bar{\kappa}\bar{\omega}^\alpha a_0 \sin(\pi) - 2\Phi_{i,\bar{\omega}}(a_0))^2 - 4\bar{f}^2 = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

当  $\bar{\gamma} \neq 0$ , 考虑窄带噪声的影响. 令:

$$a = a_0 + a_1, \theta = \theta_0 + \theta_1 \quad (33)$$

其中  $a_1$  和  $\theta_1$  都是摄动项. 将方程(33)代入方程(29)可以得到  $(a_0, \theta_0)$  处的线性化方程, 由此随机微分方程可以写为:

$$\begin{aligned} da_1 &= \left(-\frac{1}{2}\bar{\kappa}\bar{\omega}^{\alpha-1}a_0\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + \frac{1}{\bar{\omega}}\Phi'_{i,\bar{\omega}}(a_0)\right)a_1dT_1 + \\ &\quad \frac{\bar{f}}{2\bar{\omega}}\theta_1\cos\theta_0dT_1 \\ d\theta_1 &= \left(-\frac{\bar{f}}{2\bar{\omega}a_0}\cos\theta_0 + \left(\frac{1}{\bar{\omega}a}\Phi_{r,\bar{\omega}}(a)\right)' \Big|_{a=a_0}\right)a_1dT_1 - \\ &\quad \frac{\bar{f}}{2\bar{\omega}a_0}\theta_1\sin\theta_0dT_1 + \bar{\gamma}dW(T_1) \end{aligned} \quad (34)$$

其中“ $(\cdot)'$ ”表示对  $a$  的导数.

利用矩方法,可以得到一阶稳态矩和二阶稳态

矩. 从而有:

$$\begin{aligned} \frac{dE(a_1)}{dT_1} &= \frac{dE(\theta_1)}{dT_1} = \frac{dE(a_1^2)}{dT_1} = \frac{dE(\theta_1^2)}{dT_1} \\ &= \frac{dE(a_1\theta_1)}{dT_1} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

因此,一阶稳态矩满足:

$$E(a_1) = 0 \quad (36)$$

二阶稳态矩  $a_1$  满足:

$$E(a_1^2) = \frac{\bar{\gamma}B^2C}{4A^2CD - 2ACD^2 - 2ABC^2 + BC^2D} \quad (37)$$

其中,

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}\bar{\kappa}\bar{\omega}^{\alpha-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + \frac{1}{\bar{\omega}}\Phi'_{i,\bar{\omega}}(a_0), \\ B &= \frac{\bar{f}}{\bar{\omega}}\cos\theta_0, \\ C &= \frac{\bar{f}}{\bar{\omega}a_0^2}\cos\theta_0 + \left(\frac{1}{\bar{\omega}a}\Phi_{r,\bar{\omega}}(a)\right)' \Big|_{a=a_0}, \\ D &= \frac{\bar{f}}{\bar{\omega}a_0}\sin\theta_0 \end{aligned} \quad (38)$$

由此可以得到方程(29)的一阶稳态矩和二阶稳态矩:

$$\begin{aligned} E(a) &= E(a_0 + a_1) = a_0 \\ E(a^2) &= a_0^2 + E(a_1^2) \\ &= a_0^2 + \frac{\bar{\gamma}^2B^2C}{4A^2CD - 2ACD^2 - 2ABC^2 + BC^2D} \end{aligned} \quad (39)$$

令  $\Phi(\dot{x}(t)) = v(\dot{x}(t))^3$ . 意味着引致投资函数为非线性函数<sup>[5]</sup>. 因此,方程(15)可以写为:

$$\dot{x}(t) + \varepsilon \bar{\kappa}D^\alpha x(t) - \varepsilon \bar{v}(\dot{x}(t))^3 + \bar{\omega}^2 x(t) = \varepsilon \xi(t) \quad (40)$$

从(29)可以得到方程(40)的振幅和相位方程:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{1}{2}\bar{\kappa}\bar{\omega}^{\alpha-1}a\sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + \frac{3}{8}\bar{v}\bar{\omega}^2a^3 + \frac{\bar{f}}{2\bar{\omega}}\sin\theta \\ a\dot{\theta} &= a\sigma - \frac{1}{2}\bar{\kappa}\bar{\omega}^{\alpha-1}a\cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + \frac{\bar{f}}{2\bar{\omega}}\cos\theta + \\ &\quad a\bar{\gamma}\dot{W}(T_1) \end{aligned} \quad (41)$$

其中  $\theta = \sigma T_1 + \bar{\gamma}W(T_1) - \varphi(T_1)$ , 由此可以通过解方程(41)得到方程(40)的一阶展开的解.

而且通过方程(39)可以得到方程(41)的一阶稳态矩和二阶稳态矩:

$$\begin{aligned} E(a) &= E(a_0 + a_1) = a_0 \\ E(a^2) &= a_0^2 + E(a_1^2) \end{aligned}$$

$$= a_0^2 + \frac{\bar{\gamma}^2 B^2 C}{4A^2 CD - 2ACD^2 - 2ABC^2 + BC^2 D} \quad (42)$$

其中,

$$A = -\frac{1}{2} \bar{\kappa} \bar{\omega}^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\alpha}{2} \pi\right) + \frac{9}{8} \bar{v} \bar{\omega}^2 a_0^2, \\ B = \frac{\bar{f}}{\bar{\omega}} \cos\theta_0, C = \frac{\bar{f}}{\bar{\omega} a_0^2} \cos\theta_0, D = \frac{\bar{f}}{\bar{\omega} a_0} \sin\theta_0 \quad (43)$$

### 3.2 方法有效性分析

本节中,我们借助数值模拟来说明解析方法的有效性,并分析了经济变量的记忆特性对于经济波动幅度的影响.

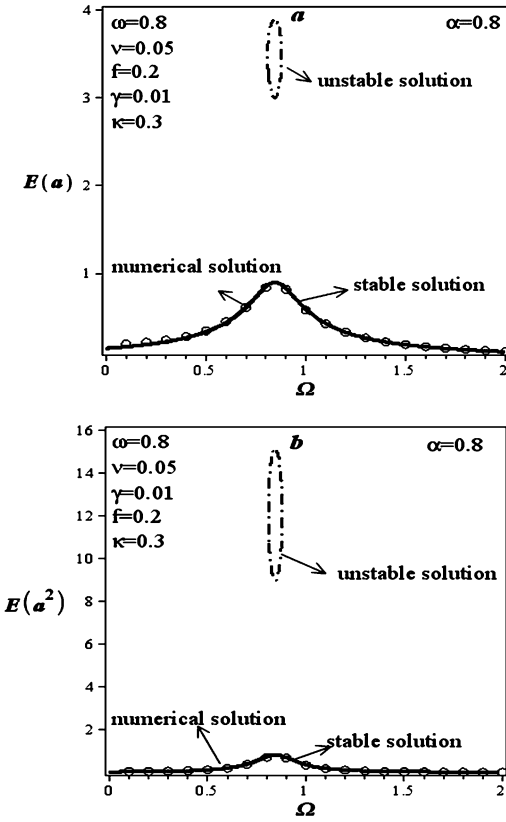


图2 频响曲线

Fig.2 The frequency-response curve

应用预估校正算法<sup>[28]</sup>,图2显示数值结果与解析结果相一致,这证明了解析方法的有效性.图3(a)和(b)表示经济变量的记忆性可以影响到达平衡状态的过程,并且在一定的周期激励的频率范围以内,系统波动的幅度是减小的;而在另外的频率范围以内,系统波动的幅度反而是变大的.图3(c)可以看出,随着分数阶阶数的减小,与整数阶系统的波动幅度相比(包括不稳定解的波动幅度),系统的波动幅度是减小的,经济变量的记忆性

增强了系统的稳定性,但是加大了系统稳态的波动幅度.而且在分数阶阶数减小后,系统不稳定解消失了.图4显示分数阶项的系数是如何影响经济系

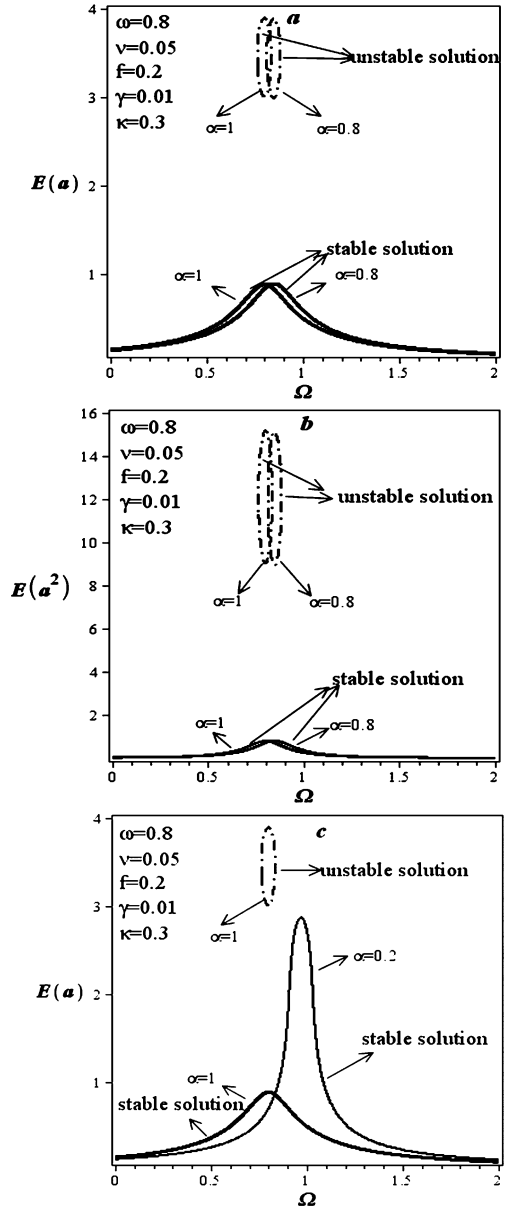


图3 频响曲线

Fig.3 The frequency-response curve

统的波动幅度的:随着分数阶项系数的增大,系统的波动幅度减小,而且分数阶系统的波动幅度小于整数阶系统.图5显示了分数阶导数的阶数变化如何影响经济系统的波动幅度,当改变分数阶阶数 $\alpha$ ,随着分数阶导数阶数的增大,经济系统的波动幅度首先变大然后再变小.并且可以引发系统瞬态响应的剧烈波动.

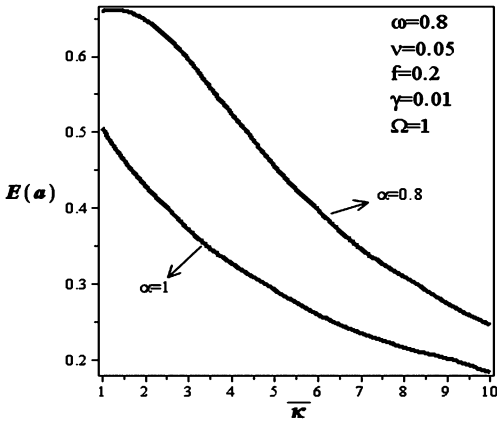


图 4 阻尼系数  $\bar{\kappa}$  变化时的振幅均值变化曲线

Fig. 4 The amplitude curve with variation of damping coefficient  $\bar{\kappa}$

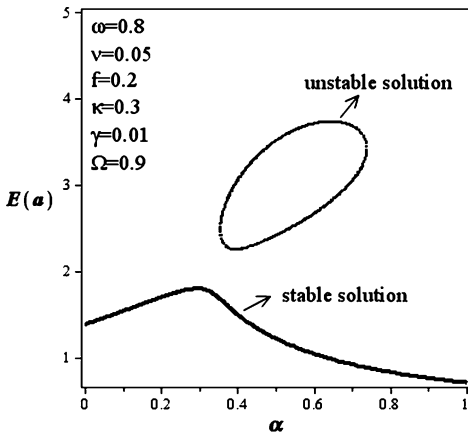


图 5 分数阶系数  $\alpha$  变化时的振幅变化曲线

Fig. 5 The amplitude curve with variation of fractional order  $\alpha$

对于概率密度的影响. 图 6 表明随着分数阶数  $\alpha$  的减小, 稳态概率密度峰值所对应的经济波动幅度变大了, 但是稳态概率密度的峰值变小了. 图 7 的时间历程图给出了直观的视角.

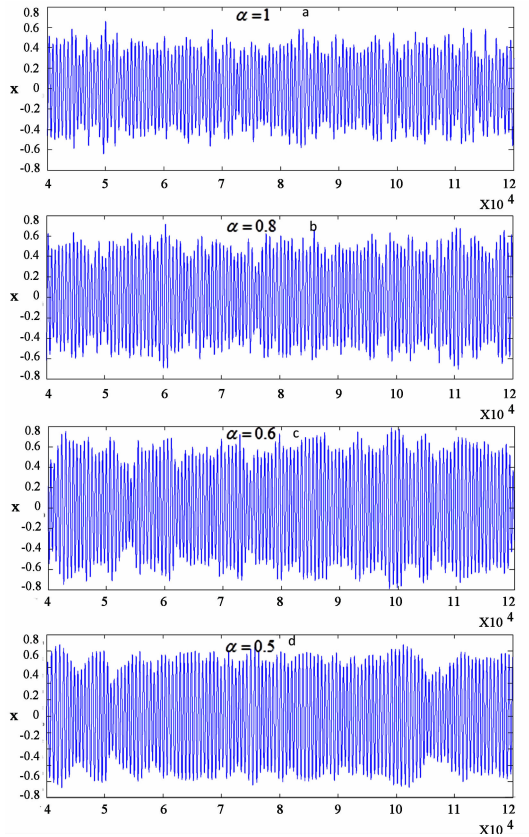


图 7 时间历程

Fig. 7 Time history

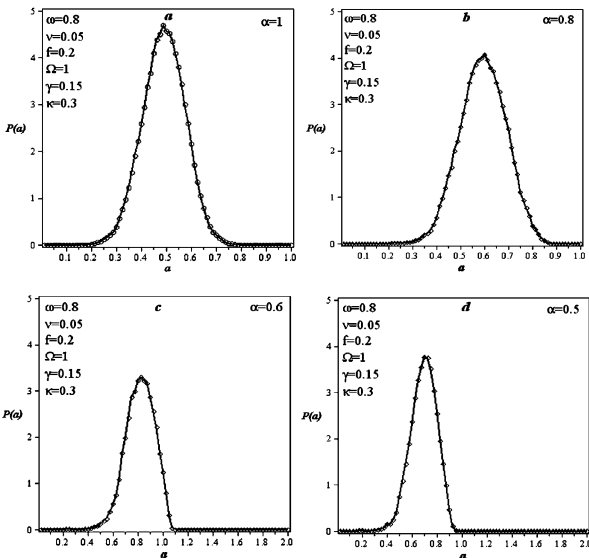


图 6 振幅  $a$  的稳态概率密度

Fig. 6 Stationary probability density function of amplitude

稳态概率密度描述了经济波动幅度的分布. 我们利用蒙特卡洛模拟得到经济波动幅度的稳态概率密度以及时间历程来阐释经济变量的记忆特性

### 4 结论

本文成功地建立了含有分数阶导数的经济波动模型, 并且研究了由于经济政策, 物价变化科技进步过程引发的经济变量的长记忆性质对于经济波动的影响. 与经典的模型相对比, 本文研究了带有分数阶导数的经济波动模型的稳定性质, 结果表明分数阶导数下的经济系统到达平衡状态的时间大大延长了. 并且研究了带有分数阶导数的经济波动模型的波动幅度, 在不同参数条件小, 分数阶阶数对于系统波动幅度的影响是不同的, 某些参数条件下减小了经济波动的范围, 但是在某些参数下却增大了经济波动的范围. 并且分数阶导数阶数的变化可以改变经济系统由非平衡状态到平衡状态的进程.

## 参 考 文 献

- 1 Goodwin R M. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. *Econometrica*, 1951,19(1):1 ~ 17
- 2 Sasakura K. The business cycle model with a unique stable limit cycle. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1996,20(9-10):1763 ~ 1773
- 3 Kaldor N. A model of the trade cycle. *The Economic Journal*, 1940,50(197):78 ~ 92
- 4 Kalecki M. A macrodynamic theory of business cycles, *Econometrica. Journal of the Econometric Society*, 1935, 3(3):327 ~ 344
- 5 Puu T, Sushko I. A business cycle model with cubic nonlinearity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004,19(3):597 ~ 612
- 6 Franke R, Flaschel P, Proaño C R. Wage-price dynamics and income distribution in a semi-structural Keynes-Goodwin model. *Structural Change and Economic Dynamics*, 2006,17(4):452 ~ 465
- 7 Matsumoto A. Note on Goodwin's 1951 nonlinear accelerator model with an investment delay. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2009,33(4):832 ~ 842
- 8 Yoshida H, Asada T. Dynamic analysis of policy lag in a Keynes-Goodwin model: stability, instability, cycles and chaos. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 2007,62(3):441 ~ 469
- 9 Laskin N. Fractional market dynamics. *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*, 2000,287(3-4):482 ~ 492
- 10 Chen W C. Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order financial system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008,36(5):1305 ~ 1314
- 11 Wang Z, Huang X, Shi G. Analysis of nonlinear dynamics and chaos in a fractional order financial system with time delay. *Computers & Mathematics with Applications*, 2011,62(3):1531 ~ 1539
- 12 Danca M F, Garrappa R, Tang W K, Chen G. Sustaining stable dynamics of a fractional-order chaotic financial system by parameter switching. *Computers & Mathematics with Applications*, 2013,66(5):702 ~ 716
- 13 Pan I, Das S, Das S. Multi-objective active control policy design for commensurate and incommensurate fractional order chaotic financial systems. *Applied Mathematical Modelling*, 2015,39(2):500 ~ 514
- 14 Bhalekar S, Daftardar-Gejji V. Fractional ordered Liu system with time-delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010,15(8):2178 ~ 2191
- 15 Yin C, Zhong S M, Chen W F. Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012,17(12):356 ~ 366
- 16 Li J, Ren Z, Wang Z. Response of nonlinear random business cycle model with time delay state feedback. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2008,387(23):5844 ~ 5851
- 17 Li S, Li Q, Li J, Feng J. Chaos prediction and control of Goodwin's nonlinear accelerator model. *Nonlinear Analysis: Real world applications*, 2011,12(2):1950 ~ 1960
- 18 Spanos P, Zeldin B. Random vibration of systems with frequency-dependent parameters or fractional derivatives. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997,123(3):290 ~ 292
- 19 Xu Y, Li, Liu D. Response of fractional oscillators with viscoelastic term under random excitation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2014,9(3):031015
- 20 Liu D, Li J, Xu Y. Principal resonance responses of SDOF systems with small fractional derivative damping under narrow-band random parametric excitation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014,19(10):3642 ~ 3652
- 21 Chen L, Zhu W. Stochastic jump and bifurcation of Duffing oscillator with fractional derivative damping under combined harmonic and white noise excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011,46(10):1324 ~ 1329
- 22 Response and stability of a SDOF strongly nonlinear stochastic system with light damping modeled by a fractional derivative. *Journal of Sound and Vibration*, 2009,319(3):1121 ~ 1135
- 23 Di Matteo A, Kougiumtzoglou I A, Pirrotta A, Spanos P D, Di Paola M. Stochastic response determination of nonlinear oscillators with fractional derivatives elements via the Wiener path integral. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2014,38:127 ~ 135
- 24 Tavazoei M S, Haeri M. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems. *Physica D: Nonlinear*

- Phenomena*, 2008, 237(20):2628 ~ 2637
- 25 Wedig W V. Invariant measures and Lyapunov exponents for generalized parameter fluctuations. *Structural Safety*, 1990, 8(1-4):13 ~ 25
- 26 Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models. World Scientific, 2010
- 27 Rossikhin Y A, Shitikova M V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results. *Applied Mechanics Reviews*, 2010, 63(1):0108011
- 28 Diethelm K, Ford N J, Freed A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 29(1-4):3 ~ 22

## STABILITY ANALYSIS OF AN ECONOMIC FLUCTUATION MODEL WITH FRACTIONAL DERIVATIVE \*

Lin Zifei<sup>1</sup> Xu Wei<sup>1†</sup> Han Qun<sup>2</sup>

(1. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(2. College of Science, Huazhong Agricultural University, Wuhan 430070, China)

**Abstract** This paper analyzes the dynamics of economic fluctuation model with fractional derivative of order  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), in which fractional derivative depicts the viscoelasticity of the economy system (the so-called memory and hereditary properties of economic variables). Dynamical system concepts are integrated into the business cycle model for understanding the economic fluctuation. Stability and amplitude of an economy system with fractional derivative are studied and compared with classical Goodwin model. Firstly, the influence of the memory property of economic variables on the stability of the economy system is investigated. The result shows that an economy system with fractional derivative costs more time to reach the equilibrium state. It proposes a new view on the macroeconomic regulation and control policy. Secondly, how fractional derivatives influence and transform the amplitude of the economic fluctuation is studied, and the results show that memory property of economic variables can lead to some different phenomena comparing with the model without considering the memory property of economic variables.

**Key words** economic fluctuation model, fractional derivative, random excitation, multiple scale method