

含指数积分型阻尼和周期激励系统的 稳态随机响应分析*

韩群^{1†} 徐伟²

(1. 华中农业大学理学院, 武汉 430070) (2. 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

摘要 运用基于短时高斯逼近的广义胞映射方法,研究了含指数积分型非粘性阻尼和周期激励系统在高斯白噪声作用下的稳态响应. 首先介绍了方法的实施过程,并推导了系统的矩方程. 然后给出了系统的稳态概率密度函数,分析了阻尼系数和松弛参数对稳态响应的影响,并通过直接 Monte Carlo 模拟的结果验证了广义胞映射方法的有效性.

关键词 广义胞映射, 短时高斯逼近, 指数积分型阻尼, 周期激励, 稳态响应

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-027

引言

广义胞映射方法已被广泛用来研究非线性动力系统的随机响应分析^[1-6]. 传统广义胞映射在计算状态胞之间一步转移概率时,通常借助 Monte Carlo 数值模拟,对于含周期激励的系统,在考虑一步转移概率时,转移时间长度直接取为系统的周期,虽然这样在形式上显得很简单,但是运算过程却相当费时. 因此,该方法在含周期激励高维系统中的应用显得非常困难. Sun 和 Hsu^[7]提出一种短时高斯逼近方法构造 FPK 方程的短时解,从而计算了高斯白噪声激励下典型自治系统的一步转移概率矩阵,该方法显著提高广义胞映射方法的效率,在应用中体现出了较大的优势. 最近, Han 等^[8]将基于短时高斯逼近的广义胞映射方法推广,用于研究周期和高斯白噪声激励下非线性系统的响应概率密度函数,并研究了一类光滑非连续(SD)振子的瞬态和稳态响应行为.

指数积分型非粘性阻尼是一种复杂的阻尼模型^[9,10],与经典粘性阻尼不同,它不仅与当前的瞬时速度有关,还依赖于速度的历史状态. 含指数积分型非粘性阻尼系统的随机响应研究中,已有一些成果^[11,12],但是这些都没有考虑周期激励的作用.

在处理含这类阻尼的系统时,通常将阻尼看作是一个变量,由此将系统扩展成三维系统,若考虑周期和高斯白噪声共同激励下该系统的随机响应分析,必然会对传统的广义胞映射方法的应用提出更大的挑战. 本文基于文献[8]中广义胞映射方法,讨论了含指数积分型非粘性阻尼和周期激励系统在高斯白噪声作用下的稳态响应分析. 首先简单介绍含周期激励系统随机响应分析的广义胞映射方法,以及短时高斯逼近在一个周期上的实施策略. 然后针对一类含指数积分型非粘性阻尼的系统,先将其扩成三维系统,给出了系统的矩方程. 最后计算了系统的稳态响应概率密度函数,并讨论了阻尼有关参数对稳态响应的影响.

1 基于短时高斯逼近的广义胞映射求解过程

考虑含周期和高斯白噪声激励的 N 维非线性随机动力系统,其对应的 Itô 随机微分方程为:

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})d\mathbf{B}(t) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)]^T \in \mathbf{R}^N$ (上标 T 表示转置)是一个 N 维 Markov 随机过程,代表系统的响应. $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ 是一个 $N \times 1$ 的漂移向量函数,其中包含周期激励,即满足 $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t + T)$, T 是周期. $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})$ 是 $N \times L$ 维耗散矩阵. $\mathbf{B}(t) =$

2017-03-17 收到第 1 稿,2017-4-18 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11532011, 11472212)

† 通讯作者 E-mail: hanqun6@yahoo.com

$[B_1(t), B_2(t), \dots, B_L(t)]^T \in \mathbf{R}^L$ 是一个标准的 L 维向量维纳过程, 满足:

$$E[d\mathbf{B}(t)] = 0, \\ E[d\mathbf{B}(t)d\mathbf{B}^T(t')] = \begin{cases} \mathbf{I}dt, & t = t' \\ 0, & t \neq t' \end{cases} \quad (2)$$

其中 \mathbf{I} 是一个 $L \times L$ 的单位矩阵. 维纳过程 $\mathbf{B}(t)$ 的形式导数即为 L 维的标准高斯白噪声.

1.1 广义胞映射方法

由于方程(1)中的 $f(\mathbf{X}, t)$ 是关于时间的周期函数, 系统响应过程 $\mathbf{X}(t)$ 的前向演化可以写成一个周期上的点映射, 也被称为 Poincaré 映射. 假设 $\mathbf{X}(t)$ 在初始时刻 t_0 以概率 1 取值为 \mathbf{x}_0 , 即 $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 那么以此为初始条件, $\mathbf{X}(t)$ 在 $t = t_0 + T$ 时的概率密度函数可表示成 $q(\mathbf{x}, t_0 + T | \mathbf{x}_0, t_0)$. 根据 $f(\mathbf{X}, t)$ 的周期性, 有 $q(\mathbf{x}, t + T | \mathbf{x}_0, t_0 + T) = q(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ 成立^[8]. 如果在离散时间轴上选取两个时刻 $t_0 = nT$ 和 $t = (n+1)T$, 那么有 $q(\mathbf{x}, (n+1)T | \mathbf{x}_0, nT) = q(\mathbf{x}, T | \mathbf{x}_0, 0)$. 现用 $p(\mathbf{x}, nT)$ 表示系统响应过程 $\mathbf{X}(t)$ 在 nT 时刻的概率密度函数. 根据条件概率的定义, 有:

$$p(\mathbf{x}, (n+1)T) = \int_{\mathbf{R}^N} q(\mathbf{x}, T | \mathbf{x}_0, 0) p(\mathbf{x}_0, nT) d\mathbf{x}_0, \\ n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

在广义胞映射方法的实现过程中, 连续的状态空间 \mathbf{R}^N 被转化成离散的胞状态空间 Z^N . 考虑一个感兴趣的有界区域 Ω , 并将之划分为 N_c 个常规胞, 它们的尺寸大小相同, 假设为 $h_1 \times h_2 \times \dots \times h_N$, 其中 h_i 是每个胞在 x_i 方向上的长度. 所有的常规胞依次编号为 1 到 N_c , 区域 Ω 以外的所有部分被看作是一个陷胞, 编号为 0. 如果 $p_i(n)$ 表示 $t = nT$ 时系统的响应位于第 i 号胞的概率, 而 q_{ji} 表示以 $p_i(0) = 1$ 为初始条件, 系统的响应在 T 时刻位于第 j 号胞的转移概率, 那么有:

$$p_i(n) = \int_{C_i} p(\mathbf{x}, nT) d\mathbf{x} \quad (4)$$

对于一个常规胞 i , q_{ji} 可由如下公式计算得到:

$$q_{ji} = \int_{C_j} q(\mathbf{x}, T | \bar{\mathbf{x}}_i, 0) d\mathbf{x} \quad (5)$$

其中 C_j 是胞 j 覆盖的区域, $\bar{\mathbf{x}}_i$ 是胞 i 的几何中心. 对于陷胞 0, 有 $q_{00} = 1$, 且 $q_{j0} = 0 (j \neq 0)$. 于是方程(3)可以离散成:

$$p_j(n+1) = \sum_{i=1}^{N_c} q_{ji} p_i(n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

该方程确定了一个有限 Markov 链的演化. 若

$q_{ji} \neq 0$, 则称胞 j 为胞 i 的像胞. 若令矩阵 $\mathbf{Q} = \{q_{ji}\}$ 表示一步转移概率矩阵, 并且 $\mathbf{p}(n) = [p_0(n), p_1(n), \dots, p_{N_c}(n)]^T$ 表示系统响应的概率分布, 那么方程(6)可以写成矩阵的形式, 即:

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{Q}\mathbf{p}(n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

下面介绍在一个周期上运用短时高斯逼近方法计算转移概率矩阵的方法.

1.2 短时高斯逼近解

首先考虑系统(1)响应过程 $\mathbf{X}(t)$ 的一阶矩和二阶矩:

$$\mathbf{m}(t) = E[\mathbf{X}(t)] \\ \mathbf{C}(t) = E[(\mathbf{X} - \mathbf{m})(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T] \quad (8)$$

其中 $\mathbf{m}(t)$ 是响应过程 $\mathbf{X}(t)$ 的均值向量, $\mathbf{C}(t)$ 是 $\mathbf{X}(t)$ 的协方差矩阵. 运用 Itô 公式可得到确定一阶矩 $\mathbf{m}(t)$ 和二阶矩 $\mathbf{C}(t)$ 的微分方程如下:

$$\dot{\mathbf{m}}(t) = E[f(\mathbf{X}, t)] \\ \dot{\mathbf{C}}(t) = E[(\mathbf{X} - \mathbf{m})f^T(\mathbf{X}, t) + f(\mathbf{X}, t)(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{X})] \quad (9)$$

如果函数 $f(\mathbf{X}, t)$ 或 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})$ 中存在有非线性, 上式中等号右边会出现某些高阶矩. 从 FPK 方程的短时解中可以看出, 当时间段 τ 足够小时, 条件概率密度函数 $q(\mathbf{x}, \tau | \mathbf{x}_0, 0)$ 近似为高斯分布. 因此, 通过高斯闭包方法可以将所有高阶矩全部表示成一阶和二阶矩的代数式^[13-14], 从而得到一个只含有一阶矩和二阶矩的常微分方程组:

$$\dot{\mathbf{m}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{m}, \mathbf{C}, t) \\ \dot{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{m}, \mathbf{C}, t) \quad (10)$$

其中 $\mathbf{h}(\mathbf{m}, \mathbf{C}, t)$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{m}, \mathbf{C}, t)$ 均为非线性函数.

为了计算一个周期上的条件概率密度函数 $q(\mathbf{x}, T | \mathbf{x}_0, 0)$, 现将周期 T 均匀分为 M 份, 若令 $\tau = T/M$, 那么 τ 可以足够小从而使得对于每一个 k 的条件概率密度函数 $q(\mathbf{x}, k\tau | \mathbf{x}_0, (k-1)\tau)$, ($k = 1, 2, \dots, M$) 都近似为高斯分布, 于是有:

$$q(\mathbf{x}, k\tau | \mathbf{x}_0, (k-1)\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}(k\tau)|^{1/2}} \times \\ \exp\left\{-\frac{1}{2}[\mathbf{x} - \mathbf{m}(k\tau)]^T \mathbf{C}(k\tau)^{-1} [\mathbf{x} - \mathbf{m}(k\tau)]\right\} \quad (11)$$

其中 $\mathbf{m}(k\tau)$ 和 $\mathbf{C}(k\tau)$ 是方程(10)满足初始条件 $\mathbf{m}[(k-1)\tau] = \mathbf{x}_0$ 和 $\mathbf{C}[(k-1)\tau] = \mathbf{0}$ 时的短时解, 这样能使计算结果更准确^[15,16]. 在时间段 $[(k-1)\tau, k\tau]$ 内, 从常规胞 i 到胞 j 的转移概率为:

$$q_{ji}^{(k)} = \int_{C_j} q(\mathbf{x}, k\tau | \bar{\mathbf{x}}_i, (k-1)\tau) d\mathbf{x} \quad (12)$$

其中 \bar{x}_i 是胞 i 的中心点, 并且有 $C_j \subset D_i^{(k)}$, 而 $D_i^{(k)}$ 被定义为一个截断后的椭球区域^[8]. 在方程 (12) 中计算条件概率密度在小区域 C_j 上的数值积分时, 用到了 Gauss-Legendre 积分方法^[17,18], 其转换后的求和形式为:

$$q_{ji}^{(k)} = \sum_{r=1}^{S_j} c_{jr} q(\mathbf{x}_{jr}, k\tau | \bar{\mathbf{x}}_i, (k-1)\tau) \quad (13)$$

其中 S_j 是在胞 j 中选取的高斯积分点的个数, \mathbf{x}_{jr} 是第 r 高斯点的位置, 且它对应的权重为 c_{jr} . 于是用 $\mathbf{Q}^{(k)} = \{q_{ji}^{(k)}\}$ 表示转移概率矩阵, 那么方程 (7) 中一个周期上的映射可写为:

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{Q}^{(M)} \mathbf{Q}^{(M-1)} \cdots \mathbf{Q}^{(1)} \mathbf{p}(n), n=0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

上述过程详细介绍如何构造含周期激励的系统在一个周期上的映射. 运用方程 (14) 计算稳态响应概率密度函数时的迭代终止条件为:

$$\|\mathbf{p}(n+1) - \mathbf{p}(n)\| < \varepsilon \quad (15)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是给定的小参数.

为了定量的估计方法的精度, 选用直接 Monte Carlo 模拟方法的结果作为参考. 定义如下绝对误差积分:

$$e_{IAE} = \int_{\Omega} |p_{GCM}(\mathbf{x}, t) - p_{MC}(\mathbf{x}, t)| d\mathbf{x} \quad (16)$$

其中 $p_{GCM}(\mathbf{x}, t)$ 表示由基于短时高斯逼近的广义胞映射方法得到的概率密度函数, 而 $p_{MC}(\mathbf{x}, t)$ 是通过直接 Monte Carlo 模拟方法计算得到的概率密度函数.

2 含指数积分型非粘性阻尼的系统

考虑一个周期激励下具有指数积分型非粘性阻尼的系统^[10], 其动力学方程为:

$$\ddot{x} + \zeta \int_0^t \frac{e^{-(t-\tau)/\beta}}{\beta} \dot{x}(\tau) d\tau + \omega_0^2 x + bx^3 = f \cos(\omega t) \quad (17)$$

式中 x 是无量纲位移, 其上方的圆点表示对时间 t 的导数. ζ 为阻尼系数, ω_0 是系统固有频率, b 是非线性项的系数, f 和 ω 分别为周期激励的幅值和频率. 积分项 $\int_0^t \frac{e^{-(t-\tau)/\beta}}{\beta} \dot{x}(\tau) d\tau$ 表示系统的非粘性阻尼, 其中 β 为松弛参数. 为了方便数值计算, 令:

$$x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \int_0^t \frac{e^{-(t-\tau)/\beta}}{\beta} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (18)$$

根据 Leibnitz 微积分理论, 方程 (17) 转化为如下的三维系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\zeta x_3 - \omega_0^2 x_1 - bx_1^3 + f \cos(\omega t) \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{\beta} (x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (19)$$

现在假设系统 (19) 还受到加性高斯白噪声的激励, 对应的 Itô 随机微分方程如下:

$$\begin{aligned} dX_1 &= X_2 dt \\ dX_2 &= [-\zeta X_3 - \omega_0^2 X_1 - bX_1^3 + f \cos(\omega t)] dt + \sqrt{2D} dB(t) \\ dX_3 &= \frac{1}{\beta} (X_2 - X_3) dt \end{aligned} \quad (20)$$

其中 D 表示随机激励的强度, $B(t)$ 是标准的 Weiner 过程, 满足:

$$\begin{aligned} E[dB(t)] &= 0, \\ E[dB(t)dB(t')] &= \begin{cases} dt, & t=t' \\ 0, & t \neq t' \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

如果令一阶矩 $m_i = E[X_i]$, 二阶矩 $v_i = E[(X_i - m_i)^2]$, ($i=1, 2, 3$), $c_{ij} = E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)]$, ($i, j=1, 2, 3$, 且 $i < j$), 那么关于 m_i, v_i 和 c_{ij} 的矩方程可由 Itô 公式推导得出:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= m_2 \\ \dot{m}_2 &= -\zeta m_3 - \omega_0^2 m_1 - b m_1 (3v_1 + m_1^2) + f \cos(\omega t) \\ \dot{m}_3 &= \frac{1}{\beta} (m_2 - m_3) \\ \dot{v}_1 &= 2c_{12} \\ \dot{v}_2 &= -6bc_{12}(v_1 + m_1^2) - 2\omega_0^2 c_{12} - 2\zeta c_{23} + 2D \\ \dot{v}_3 &= \frac{2}{\beta} (c_{23} - v_3) \\ \dot{c}_{12} &= -3bv_1(v_1 + m_1^2) - \omega_0^2 v_1 - \zeta c_{12} + v_2 \\ \dot{c}_{13} &= \frac{1}{\beta} (c_{12} - c_{13}) + c_{23} \\ \dot{c}_{23} &= -3bc_{13}(v_1 + m_1^2) + \frac{1}{\beta} (v_2 - c_{23}) - \omega_0^2 c_{13} - \zeta v_3 \end{aligned} \quad (22)$$

矩方程 (22) 的初值条件为:

$$\begin{aligned} m_1(0) &= \bar{x}_{10}, m_2(0) = \bar{x}_{20}, m_3(0) = \bar{x}_{30} \\ v_1(0) &= v_2(0) = v_3(0) = c_{12}(0) = c_{13}(0) = c_{23}(0) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $(\bar{x}_{10}, \bar{x}_{20}, \bar{x}_{30})$ 是所考虑初始胞的中心点.

3 系统的稳态响应分析

下面运用基于短时高斯逼近的广义胞映射方法研究系统 (20) 的稳态响应概率密度函数. 选用四阶 Runge-Kutta 算法对非线性矩方程 (22) 在每个长度为 τ 的小区间进行数值积分, 然后根据得到的一阶矩和二阶矩, 将短时转移概率密度函数表示

成高斯分布. 周期分割参数 $M=4$. 感兴趣的三维矩形区域 $\Omega = [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-2, 2]$, 其中常规胞的尺寸固定为 $0.1 \times 0.1 \times 0.1$. 且在方程(12)中计算 $q_{ji}^{(k)}$ 时, 每个胞内选取 $2 \times 2 \times 2$ 个高斯点. 选取系统参数 $\omega_0=1.0$, $b=1.0$, $f=0.25$, $\omega=1.0$ 以及随机激励强度 $D=0.01$, 分别考虑阻尼系数 ζ 和松弛参数 β 对系统稳态响应的影响.

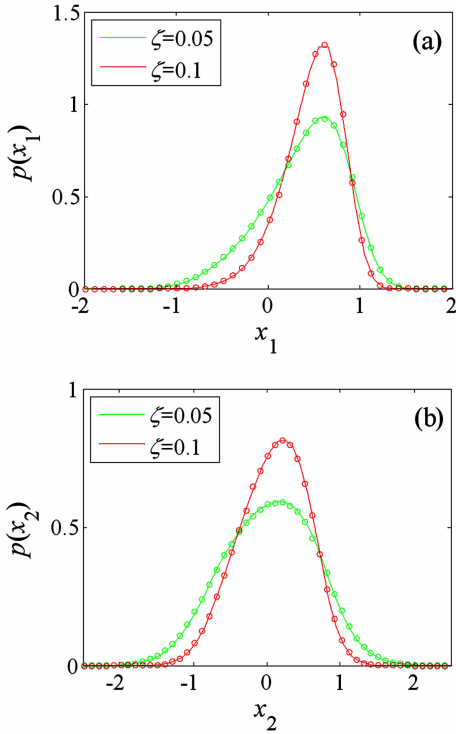


图1 当 $\beta=0.6$ 时, 系统(20)的稳态边缘概率密度函数
 (a) 位移 X_1 , e_{IAE} 分别为 0.0597 ($\zeta=0.05$) 和 0.0927 ($\zeta=0.1$),
 (b) 速度 X_2 , e_{IAE} 分别为 0.0371 ($\zeta=0.05$) 和 0.0503 ($\zeta=0.1$)
 Fig. 1 Steady-state marginal probability density functions of system (20) when $\beta=0.6$. (a) Displacement X_1 , where $e_{IAE}=0.0597$ ($\zeta=0.05$) and $e_{IAE}=0.0927$ ($\zeta=0.1$), (b) Velocity X_2 , where $e_{IAE}=0.0371$ ($\zeta=0.05$) and $e_{IAE}=0.0503$ ($\zeta=0.1$)

首先, 固定松弛参数 $\beta=0.6$, 图1给出了阻尼系数 ζ 取不同值时位移 X_1 和速度 X_2 的稳态边缘概率密度函数. 实线表示基于短时高斯逼近的广义胞映射方法的结果, 圆圈表示对系统(20)直接 Monte Carlo 模拟得到的结果, 发现两种结果基本一致. 而且 $p(x_1)$ 的绝对误差积分 e_{IAE} 在 $\zeta=0.05$ 时为 0.0597 , 在 $\zeta=0.1$ 时为 0.0927 . $p(x_2)$ 的绝对误差积分 e_{IAE} 在 $\zeta=0.05$ 时为 0.0371 , 在 $\zeta=0.1$ 时为 0.0503 . 这些说明了短时高斯逼近和广义胞映射方法的有效性. 图2进一步给出了由广义胞映射方法得到的稳态联合概率密度函数. 从图1和2中, 均可以发现在一定范围内概率密度函数的峰值随着

阻尼系数 ζ 增大而变高.

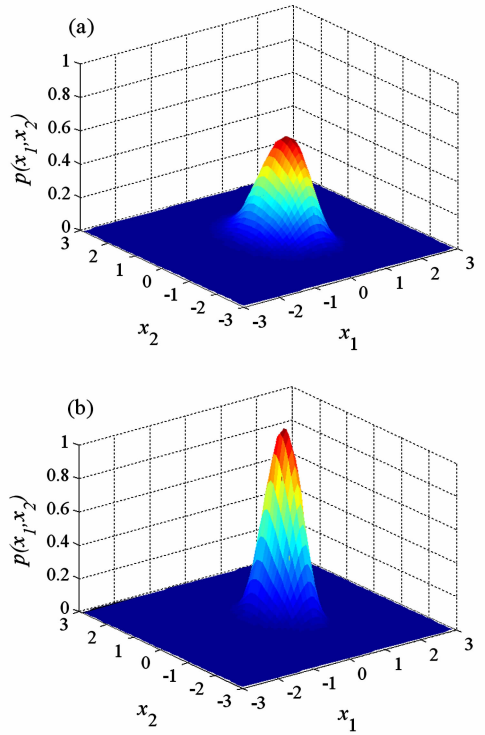


图2 当 $\beta=0.6$ 时, 系统(20)的稳态联合概率密度函数
 (a) $\zeta=0.05$, (b) $\zeta=0.1$
 Fig. 2 Steady-state joint probability density functions of system (20) when $\beta=0.6$
 (a) $\zeta=0.05$, (b) $\zeta=0.1$

这里需要指出, 运用短时高斯逼近构造一系列的转移概率矩阵, 显著提高了广义胞映射方法的效率. 针对该算例中转化后的三维系统, 转移概率矩阵的计算过程仅消耗了 $928s$ (程序运行环境为 $i7-6500U$ 四核处理器笔记本电脑, 编程语言为 Fortran). 而在相同的胞划分情形下, 利用 Monte Carlo 模拟方法计算转移概率矩阵一般需要数十个小时.

然后固定阻尼系数 $\zeta=0.15$, 考虑松弛参数 β 取不同值时系统的稳态响应概率密度函数. 通过计算, 得到系统位移 X_1 和速度 X_2 的边缘概率密度函数如图3所示(实线为广义胞映射方法的结果, 圆圈为直接模拟的结果), 广义胞映射方法的结果与直接模拟的结果基本吻合. 而图4则给出了对应联合概率密度函数的广义胞映射方法结果. 观察发现在一定取值范围内松弛参数 β 越小稳态概率密度函数的峰值越高.

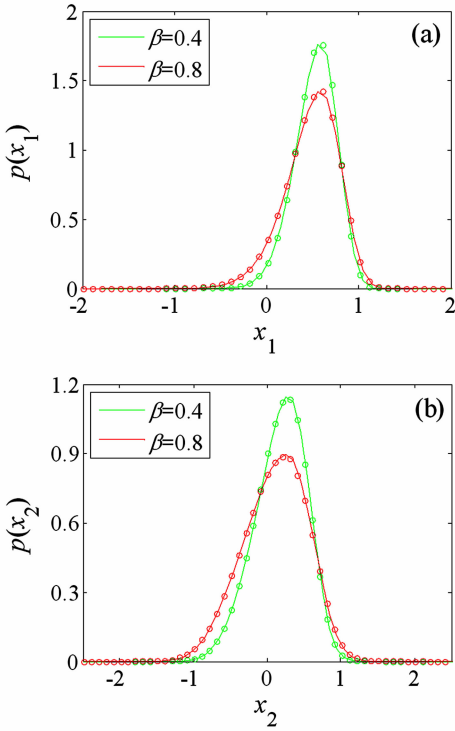


图3 当 $\zeta=0.15$ 时,系统(20)的稳态边缘概率密度函数
(a)位移 X_1 , e_{IAE} 分别为0.1236($\beta=0.4$)和0.0986($\beta=0.8$),
(b)速度 X_2 , e_{IAE} 分别为0.0708($\beta=0.4$)和0.0574($\beta=0.8$)

Fig. 3 Steady-state marginal probability density functions of system (20) when $\zeta=0.15$. (a) Displacement X_1 ,

where $e_{IAE}=0.1236(\beta=0.4)$ and $e_{IAE}=0.0986(\beta=0.8)$,

(b) Velocity X_2 , where $e_{IAE}=0.0708(\beta=0.4)$ and $e_{IAE}=0.0574(\beta=0.8)$

4 结论

本文运用基于短时高斯逼近的广义胞映射方法,研究了含指数积分型非粘性阻尼和周期激励系统在高斯白噪声作用下的稳态响应概率密度函数.首先简单介绍了方法的实施过程,然后针对一类含指数积分型非粘性阻尼的系统,将其扩展成三维系统,应用Itô公式和高斯闭包方法推导了系统的矩方程,计算了其稳态响应概率密度函数,并重点分析了阻尼系数和松弛参数对稳态响应的影响.通过直接Monte Carlo模拟的结果验证了广义胞映射方法的有效性,并用绝对误差积分对广义胞映射计算结果的精度做了定量评估.从计算消耗的时间上看,短时高斯逼近方法在构造转移概率矩阵时效率较高,因此,基于短时高斯逼近的广义胞映射方法为研究较高维非线性系统的随机响应提供了有效途径.

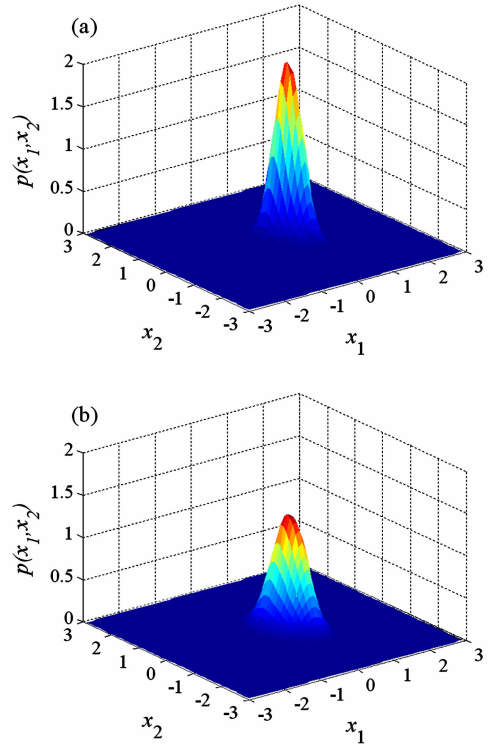


图4 当 $\zeta=0.15$ 时,系统(20)的稳态联合概率密度函数
(a) $\beta=0.4$, (b) $\beta=0.8$

Fig. 4 Steady-state joint probability density functions of system (20) when $\zeta=0.15$

(a) $\beta=0.4$, (b) $\beta=0.8$

参考文献

- 1 Sun J Q. Random vibration analysis of a non-linear system with dry friction damping by the short-time Gaussian cell mapping method. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 180(5): 785 ~ 795
- 2 Wu Y, Zhu W Q. Stochastic analysis of a pulse-type prey-predator model. *Physical Review E*, 2008, 77(4): 041911
- 3 Yue X L, Xu W, Wang L, Zhou B C. Transient and steady-state responses in a self-sustained oscillator with harmonic and bounded noise excitations. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2012, 30(5): 70 ~ 76
- 4 Yue X L, Xu W, Jia W T, Wang L. Stochastic response of a $\phi 6$ oscillator subjected to combined harmonic and Poisson white noise excitations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2013, 392(14): 2988 ~ 2998
- 5 Han Q, Xu W, Yue X L. Stochastic response analysis of noisy system with non-negative real-power restoring force by generalized cell mapping method. *Applied Mathematics*

- and Mechanics (English Edition)*, 2015, 36(3):329 ~ 336
- 6 Li Z G, Jiang J, Hong L. Transient behaviors in noise-induced bifurcations captured by generalized cell mapping method with an evolving probabilistic vector. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, 25(08):1550109
 - 7 Sun J Q, Hsu C S. The generalized cell mapping method in nonlinear random vibration based upon short-time Gaussian approximation. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1990, 57(4):1018 ~ 1025
 - 8 Han Q, Xu W, Sun J Q. Stochastic response and bifurcation of periodically driven nonlinear oscillators by the generalized cell mapping method. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016, 458:115 ~ 125
 - 9 Xu W, Rong H W, Fang T. Visco-elastic systems under both deterministic and bound random parameteric excitation. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, 24(9):1089 ~ 1099
 - 10 Sieber J, Wagg D J, Adhikari S. On the interaction of exponential non-viscous damping with symmetric nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 314(1):1 ~ 11
 - 11 Zhao X, Xu W, Yang Y G, Wang X Y. Stochastic responses of a viscoelastic-impact system under additive and multiplicative random excitations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, 35:166 ~ 176
 - 12 Wang D L, Xu W, Gu X D, Pei H Q. Response analysis of nonlinear vibro-impact system coupled with viscoelastic force under colored noise excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016, 86:55 ~ 65
 - 13 Wu W F, Lin Y K. Cumulant-neglect closure for non-linear oscillators under random parametric and external excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1984, 19(4):349 ~ 362
 - 14 Sun J Q, Hsu C S. Cumulant-neglect closure method for nonlinear systems under random excitations. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1987, 54(3):649 ~ 655
 - 15 Risken H. The Fokker Planck equation, Methods of solution and application, 2nd Ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1989
 - 16 Sun J Q. Stochastic dynamics and control. Elsevier, 2006
 - 17 Yu J S, Cai G Q, Lin Y K. A new path integration procedure based on Gauss-Legendre scheme. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1997, 32(4):759 ~ 768
 - 18 Stroud A H. Numerical quadrature and solution of ordinary differential equations. New York: Springer, 1974

STEADY-STATE STOCHASTIC RESPONSE OF A SYSTEM WITH NON-VISCOUS EXPONENTIAL DAMPING AND PERIODIC EXCITATION*

Han Qun^{1†} Xu Wei²

(1. College of Science, Huazhong Agricultural University, Wuhan 430070, China)

(2. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract The steady-state response of a system with the non-viscous exponential damping and periodic excitation is studied by the generalized cell mapping method based on short-time Gaussian approximation. The process of the method is firstly introduced, and the moment equations are derived. The steady-state response probability density functions are then presented, in which the effect of damping coefficient and relaxation parameter on the probability density functions is discussed. The validity of the generalized cell mapping method is demonstrated by the results from direct Monte Carlo simulation.

Key words generalized cell mapping method, short-time Gaussian approximation, non-viscous exponential damping, periodic excitation, steady-state response

Received 17 March 2017, revised 18 April 2017.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11532011, 11472212).

† Corresponding author E-mail: hanqun6@yahoo.com