

多自由度粘弹性非线性随机系统的瞬态响应*

金涛¹ 金肖玲² 黄志龙^{2†}

(1. 浙江省电力设计院水工结构专业, 杭州 310012)(2. 浙江大学工程力学系, 杭州 310027)

摘要 研究了高斯白噪声激励下多自由度粘弹性非线性系统的瞬态响应. 首先, 通过将粘弹性项对系统的作用近似地简化为对原系统阻尼部分以及刚度部分的修正, 得到近似的具有粘弹性项的等效非线性随机系统. 然后, 应用基于广义谱和函数的随机平均法, 导出关于幅值瞬态概率密度的平均 Fokker-Planck-Kolmogorov 方程. 该方程的解可通过多重级数式表示, 基函数为幅值相关正交函数, 系数为时间函数. 应用 Galerkin 方法, 关于时间的系数可由一阶线性微分方程组解得, 从而得出幅值响应的瞬态概率密度、状态空间概率密度及幅值统计矩的半解析表达式. 最后, 以耦合的二自由度 Duffing-van der Pol 振子系统为例, 通过与原系统数值模拟结果的比较分析验证了所提出的半解析方法的有效性, 并讨论了粘弹性对系统响应的影响.

关键词 瞬态响应, 粘弹性, 多自由度非线性随机系统, 随机平均法, Galerkin 方法

DOI: 10.6052/1672-6553-2017-025

引言

无论是线性还是非线性动态系统, 当外部载荷是高斯白噪声随机激励时, 系统的响应都是扩散的马尔科夫过程, 响应的转移概率密度由 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程所控制, 在相应的边界条件与初始条件下求解 FPK 方程就可以获得系统响应的概率密度, 它能够完全描述系统的响应, 从而可知系统响应随时间的变化过程, 完全描述其演化规律.

对于随机系统稳态响应概率密度的求解, 已经发展了很多方法, 如局部平衡法、平稳势法以及广义平稳势方法等等^[1,2], 但是能够求解瞬态响应的 FPK 方程则是极少数, 只有一些非常特殊的一阶系统及多自由度常系数线性随机系统能够精确获得其响应的瞬态概率密度^[3-5], 大多数情况下只能求近似解. 至今已经有一些近似方法应用于非线性随机系统的瞬态响应研究, Atkinson 基于变分法提出了 FPK 方程的特征值和特征函数来近似表示非线性随机系统的近似瞬态转移概率密度^[6]; Johnson 和 Scott 将求解高斯白噪声下 Duffing 振子瞬态概率密度的问题转化为以摄动方法求特征值的问题^[7]; Wen 通过 Galerkin 方法得到了单自由度非线

性随机系统的近似瞬态概率密度^[8]. 实际工程中, 结构系统一般要用多自由度系统来描述, 由于系统自由度的增加, 高斯白噪声外激下的系统相对应的 FPK 方程具有更高的维数, 使其求解难度更高. 随机平均法, 除了能保持系统的本质性质, 使原来不是扩散过程的系统转化为扩散过程, 还可以在某种程度上降低系统的维数, 得到更低维数的 FPK 方程, 从而降低求解难度, 因此随机平均法在多自由度非线性随机响应预测中有着广泛的应用.

基于随机平均法, 对单自由度非线性随机系统的近似瞬态概率密度研究已经取得一些成果, Iwan 和 Spanos 通过等效线性化和随机平均法给出了高斯白噪声激励下非线性系统关于幅值瞬态概率密度的 FPK 方程^[9], 进而以摄动法求得以特征值和特征向量近似表示的幅值瞬态概率密度; Spanos 等人将随机平均法应用于高斯白噪声激励下的单自由度非线性随机系统, 将该系统的幅值瞬态解近似地表示为 Rayleigh 分布与适当选取正交基函数的线性组合, 组合系数是随时间变化的并可通过 Galerkin 方法得到^[10]. 而对于多自由度非线性随机系统, 主要通过等效线性化方法或 Monte Carlo 方法对其进行瞬态响应统计量的研究^[11-15], 对系统响应的瞬态概率密度的研究还比较少, 文献[16]基于广

2017-04-03 收到第 1 稿, 2017-04-18 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11532011, 11672262, 11621062)

† 通讯作者 E-mail: zhuang@zju.edu.cn

义谐和函数的随机平均法将 Spanos 等^[10]提出的关于幅值瞬态响应半解析方法成功地推广于多自由度的非线性随机系统,文献[17]进一步应用于多自由度时滞非线性随机系统的瞬态响应分析.

考虑到实际工程中的材料有存在粘弹性,本文研究多自由度粘弹性非线性随机系统的瞬态响应.首先将含粘弹性项的系统近似等效为不具粘弹性项的系统.然后应用基于广义谐和函数的随机平均法,导出幅值概率密度的 FPK 方程,应用文献[16,17]的方法,得到瞬态响应的半解析解.最后以耦合的二自由度 Duffing-van der Pol 振子系统为典型算例验证求解过程.

1 无粘弹性的等效系统

由于复合材料、聚合物以及合金的广泛应用,这些材料的粘弹性特性对于结构系统特性带来较大的影响,同时在随机外激或参激激励下,这些结构系统在一定程度上可由多自由度粘弹性非线性随机系统来描述,设其动力学控制方程为:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_i + \varepsilon c_{ij}(X, \dot{X}) \dot{X}_j + g_i(X_i) + \varepsilon K_i R_i = \\ \varepsilon^{1/2} f_{ik}(X, \dot{X}) W_k(t) \\ (i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 ε 为正小参数; $\varepsilon c_{ij}(X, \dot{X})$ 表示系统的阻尼系数,是广义位移 $X = [X_1, \dots, X_n]^T$ 和广义速度 $\dot{X} = [\dot{X}_1, \dots, \dot{X}_n]^T$ 的函数; $g_i(X_i)$ 为非耦合刚度,是广义位移的奇函数且满足 $g_i(-X_i) = -g_i(X_i)$; $\varepsilon K_i R_i$ 为粘弹性项, K_i 是常数, R_i 是松弛算子, $R_i = \int_0^t h(t-\tau) X_i(\tau) d\tau$, 采用广义 Maxwell 模型, $h_i(t-\tau) = \sum_{l=1}^{m_{is}} -\frac{E_{il}}{\lambda_{il}} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_{il}}}$, 式中 E_{il} 是广义弹性模量, λ_{il} 是松弛时间, m_{is} 是串联的 Maxwell 模型个数; $\varepsilon^{1/2} f_{ik}(X, \dot{X})$ 为外激或参激的幅值; $W_k(t)$ 表示强度为 $2D_{kk}$ 的高斯白噪声. $c_{ij}(X, \dot{X}) \dot{X}_j$ 和 $f_{ik}(X, \dot{X}) W_k(t)$ 采用爱因斯坦求和记号. 需要指出的是,本文的研究对象仅限于可积非内共振系统,文中所有变量均为无量纲,后文将不再作强调.

当 $\varepsilon = 0$ 时,系统(1)可简化为多自由度的哈密顿系统,其控制方程为:

$$\ddot{X}_i + g_i(x_i) = 0 (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

该系统每个自由度的首次积分为:

$$H_i = \dot{X}_i^2/2 + U_i(x_i) (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

上式中 $U_i(x_i) = \int x_{i0} g(u_i) du_i$ 为势能函数. 假设系

统(2)的解为原点平衡点附近的周期解,则它们可表示为^[18]:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= a_i \cos \theta_i(t) \\ \dot{X}_i(t) &= -a_i v_i(a_i, \theta_i) \cos \theta_i(t) \\ \theta_i(t) &= \varphi_i(t) + \varphi_i(t) \\ &(i = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (4)$$

上式中 a_i 为瞬时幅值, θ_i 为瞬时相位, v_i 为瞬时频率且可表示为:

$$\begin{aligned} v_i(a_i, \theta_i) &= d\varphi_i/dt = \\ &\sqrt{\frac{2[U_i(a_i) - U(a_i \cos \theta_i)]}{a_i^2 \sin^2 \theta_i}} \end{aligned} \quad (5)$$

则平均频率可以表示为:

$$\omega_{a_i}(a_i) = 2\pi / \int_0^{2\pi} v_i^{-1}(a_i, \theta_i) d\theta_i \quad (6)$$

通过哈密顿函数和势能之间的关系 $H_i = U_i(a_i)$, 平均频率也可写为:

$$\omega_{H_i}(H_i) = \omega_{a_i}(a_i) \Big|_{a_i=U_i^{-1}(H_i)} \quad (7)$$

其中 $U_i^{-1}(H_i)$ 为 $H_i = U_i(a_i)$ 的反函数.

当 ε 是小量的情况下, $X_i(t-\tau)$ 中的 τ 不是特别大的时候,可以用如下表达式近似^[19]:

$$X_i(t-\tau) \approx X_i(t) \cos \omega_{a_i} \tau - \dot{X}_i(t) \frac{\sin \omega_{a_i} \tau}{\omega_{a_i}} \quad (8)$$

利用 $h(t)$ 函数的指数衰减特性,结合式(8),系统(1)中的松弛算子可以近似简化为:

$$\begin{aligned} R_i(X_i) &= \int_0^t h_i(t-\tau) X_i(\tau) d\tau = \\ &\int_0^t h_i(\tau) X_i(t-\tau) d\tau \approx \\ &\int_0^t \sum_{l=1}^{m_{is}} \frac{E_{il}}{\lambda_{il}} e^{-(\tau/\lambda_{il})} (X_i \cos \omega_{a_i} \tau - \frac{\dot{X}_i \sin \omega_{a_i} \tau}{\omega_{a_i}}) d\tau \approx \\ &= \sum_{l=1}^{m_{is}} \left\{ \frac{E_{il}}{1 + (\lambda_{il} \omega_{a_i})^2} \dot{X}_i - \frac{E_{il} \lambda_{il}}{1 + (\lambda_{il} \omega_{a_i})^2} \dot{X}_i + \right. \\ &\quad \left. \frac{e^{-(t/\lambda_{il})}}{1 + (\lambda_{il} \omega_{a_i})^2} \times [E_{il} X_i (\lambda_{il} \omega_{a_i} \sin \omega_{a_i} t - \right. \\ &\quad \left. \cos \omega_{a_i} t) + E_{il} \dot{X}_i (\lambda_{il} \omega_{a_i} \cos \omega_{a_i} t + \right. \\ &\quad \left. \sin \omega_{a_i} t) / \omega_{a_i}] \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

上式中包含时间衰减项 $e^{-(t/\lambda_{il})}$ 随时间以指数快速衰减,因此该项在近似分析时可以被忽略,粘弹性项对系统(1)的影响简化为两部分,其一是对系统刚度的修正,另一部分是对系统阻尼的修正,从而原系统(1)可近似等效为:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_i + \varepsilon c'_{ij}(X, \dot{X}) \dot{X}_j + g'_i(X_i) &= \varepsilon^{1/2} f_{ik}(X, \dot{X}) W_k(t) \\ &(i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (10)$$

该近似等效系统中的阻尼项与刚度项分别为:

$$c'_{ij}(X, \dot{X}) = c_{ij}(X, \dot{X}) + \delta_{ij} K_i \sum_{l=1}^{m_{is}} \frac{E_{il} \lambda_{il}}{1 + (\lambda_{il} \omega_{a_i})^2}$$

$$g'_i(X_i) = g_i(X_i) - \varepsilon \delta_{ij} K_i \sum_{l=1}^{m_{is}} \frac{E_{il}}{1 + (\lambda_{il} \omega_{a_i})^2} X_i$$
(11)

式(11)中, δ_{ij} 为 Kronecker delta 符号下同.

2 系统的近似瞬态响应

2.1 随机平均法

系统(1)的响应可通过对系统(10)的研究来近似,由于系统(10)中每个振子具有弱阻尼、弱激励的性质,同时各个振子之间刚度是不耦合的,因此其广义速度和广义位移可以通过广义谐和函数的形式来表示:

$$X_i(t) = A_i(t) \cos \Theta_i(t)$$

$$\dot{X}_i(t) = -A_i(t) \Lambda_i(A_i, \Theta_i) \sin \Theta_i(t)$$

$$(i = 1, \dots, n) \tag{12}$$

类似于式(4)与式(5),瞬时相位 Θ_i 和瞬时频率 Λ_i 可表示为:

$$\Theta_i(t) = \Phi_i(t) + \Gamma_i(t)$$

$$\Lambda_i(A_i, \Theta_i) = d\Phi_i/dt =$$

$$\sqrt{\frac{2[U_{ei}(A_i) - U_{ei}(A_i \cos \Theta_i)]}{A_i^2 \sin^2 \Theta_i}}$$

$$U_{ei}(X_i) = \int_0^{X_i} g'_i(u_i) du_i \tag{13}$$

其中 $A_i(t)$, $\Theta_i(t)$, $\Phi_i(t)$ 以及 $\Gamma_i(t)$ 为随机过程,将式(12)代入近似系统(10)中并利用式(12)的协调条件,可得关于幅值 A_i 和相位 Γ_i 的随机微分方程:

$$dA_i/dt = \varepsilon F_{1i}(A, \Gamma) dt + \varepsilon^{1/2} G_{1ik}(A, \Gamma) \xi_k(t)$$

$$d\Gamma_i/dt = \varepsilon F_{2i}(A, \Gamma) dt + \varepsilon^{1/2} G_{2ik}(A, \Gamma) \xi_k(t)$$

$$(i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m) \tag{14}$$

其中 $A = [A_1, \dots, A_n]^T$ 为幅值向量, $\Gamma = [\Gamma_1, \dots, \Gamma_n]^T$ 为相位向量,式中各项参数为:

$$F_{1i}(A, \Gamma) = \frac{-A_i \Lambda_i(A_i, \Theta_i) \sin \Theta_i}{g'_i(A_i)} \times$$

$$c''_{ij}(A, \Theta) A_j \Lambda_j(A_j, \Theta_j) \sin \Theta_j$$

$$F_{2i}(A, \Gamma) = \frac{-\Lambda_i(A_i, \Theta_i) \cos \Theta_i}{g'_i(A_i)} \times$$

$$c''_{ij}(A, \Theta) A_j \Lambda_j(A_j, \Theta_j) \sin \Theta_j$$

$$G_{1ik}(A, \Gamma) = \frac{-A_i \Lambda_i(A_i, \Theta_i) \sin \Theta_i}{g'_i(A_i)} f''_{ik}(A, \Theta)$$

$$G_{2ik}(A, \Gamma) = \frac{-\Lambda_i(A_i, \Theta_i) \cos \Theta_i}{g'_i(A_i)} f''_{ik}(A, \Theta) \tag{15}$$

上式中 $c''_{ij}(A, \Theta)$ 和 $f''_{ik}(A, \Theta)$ 分别由 $c'_{ij}(X, \dot{X})$ 和 $f'_{ik}(X, \dot{X})$ 通过变换关系(12)得到. 根据 Stratonovich-Khasminskii 极限定理^[20,21], 当时 ε 趋近于 0 时,在时间区间上 $0 \leq t \leq T$, 其中 $T \sim O(\varepsilon^{-1})$, 慢变随机过程 A_i 与 Γ_i 弱收敛于 $2n$ 维扩散的马尔科夫过程. 基于随机平均与确定性平均, A_i 的平均 Itô 随机方程独立于 Γ_i , 因此 A_i 弱收敛于 n 维扩散马尔科夫过程,其平均 Itô 随机微分方程为:

$$dA_i = m_i(A) dt + \sigma_{ik}(A) dB_k(t)$$

$$(i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m) \tag{16}$$

上式中的平均漂移与平均扩散系数为:

$$m_i(A) = \varepsilon \langle F_{1i} + D_{kk} \frac{\partial G_{1ik}}{\partial A_j} G_{1jk} + D_{kk} \frac{\partial G_{1ik}}{\partial \Gamma_j} G_{2jk} \rangle_{\Theta}$$

$$b_{ij}(A) = \sigma_{ik}(A) \sigma_{jk}(A) = \varepsilon \langle 2D_{kk} G_{1ik} G_{1jk} \rangle_{\Theta}$$
(17)

其中 $\langle \cdot \rangle_{\Theta} = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \langle \cdot \rangle d\Theta / (2\pi)^n$ 表示关于 Θ 的确定性平均, m_i 和 b_{ij} 的显式表达式可以由 F_{1i} , G_{1ik} 以及 G_{2jk} 对 Θ 的傅里叶展开得到. 与式(16)对应的 FPK 方程为:

$$\frac{\partial p(A, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial A_i} [m_i(A) p(A, t)] +$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A_i \partial A_j} [b_{ij}(A) p(A, t)] \tag{18}$$

为简便起见,假设原系统(1)开始处于静止状态,则式(18)的初始条件为:

$$p(A, 0) = \hat{\delta}(A) \tag{19}$$

上式中 $\hat{\delta}(A)$ 表示单边的 Dirac delta 函数.

2.2 基于 Laguerre 多项式的近似解

一般很难得到方程(18)的精确解析解,这里用近似方法求解. 将 FPK 方程(18)的解,即幅值概率密度 $p(A, t)$, 近似地表示为^[16]:

$$p(A, t) =$$

$$\sum_{r_1, \dots, r_n=0}^{\infty} (\exp(-\sum_{i=1}^n \eta_{ir_i} t) + s_{r_1, \dots, r_n}(t)) \prod_{i=1}^n R_{ir_i}(A_i)$$
(20)

上式可理解为相应线性系统的解与非线性使解偏离线性系统之解此两部分之和,其中 $s_{r_1, \dots, r_n}(t)$ 为待定的随时间变化组合系数, η_{ir_i} 和 $R_{ir_i}(A_i)$ 分别为系统(1)中第 i 个非耦合线性振子系统对应的 FPK 方程的特征值和特征函数^[16]:

$$R_{ir_i}(A_i) = \frac{1}{r_i! \sigma_{is}^2} \exp\left(-\frac{A_i^2}{2\sigma_{is}^2}\right) L_{r_i}\left(\frac{A_i^2}{2\sigma_{is}^2}\right)$$

$$\eta_{ir_i} = \left| \varepsilon c_{ii}(0,0) \right| r_i$$

$$\sigma_{is}^2 = f_{il_i}^2 D_{l_i l_i} \left/ \left[\left| c_{ii}(0,0) \right| \frac{dg_i}{dX_i} \right]_{X_i=0} \right.$$

$$(i = 1, \dots, n; r_i = 0, 1, \dots) \quad (21)$$

上式中 $L_{r_i}(\cdot)$ 为第 r_i 阶 Laguerre 多项式, $2D_{l_i l_i}$ 代表子系统的外激励强度. 特征函数 $R_{ir_i}(A_i)$ 具有如下一些基本性质:

$$\int_0^\infty \frac{R_{ir}(A_i) R_{ik}(A_i)}{R_{i0}(A_i)} dA_i = \delta_{rk}$$

$$R_{i(r+1)}(A_i) = \frac{\left[(2r+1 - \frac{A_i^2}{2\sigma_{is}^2}) R_{ir}(A_i) - r R_{i(r-1)}(A_i) \right]}{(r+1)}$$

$$\frac{dR_{ir}(A_i)}{dA_i} = \frac{1}{A_i} [2(r+1) R_{i(r+1)}(A_i) - (2r+1) R_{ir}(A_i)] \quad (22)$$

将近似表达式(20)代入 FPK 方程(18), 可得残差:

$$R = \sum_{r_1, \dots, r_n=0}^\infty \left(- \left(\sum_{i=1}^n \eta_{ir_i} \right) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \eta_{ir_i} t\right) + \dot{s}_{r_1, \dots, r_n}(t) \right) \prod_{i=1}^n R_{ir_i}(A_i) - \sum_{r_1, \dots, r_n=0}^\infty \left(\exp\left(-\sum_{i=1}^n \eta_{ir_i} t\right) + s_{r_1, \dots, r_n}(t) \right) \cdot \left(- \frac{\partial}{\partial A_i} [m_i(A) \prod_{k=1}^n R_{kr_k}(A_k)] + \frac{\partial^2}{2\partial A_i \partial A_j} [b_{ij}(A) \prod_{k=1}^n R_{kr_k}(A_k)] \right) \quad (23)$$

利用 Galerkin 方法, 可令误差 R 在一定条件下取得最小值来得到线性组合系数 $s_{r_1, \dots, r_n}(t)$, 这里取如下的条件:

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{R_{ik_i}(A_i)}{R_{i0}(A_i)} R dA = 0$$

$$(k_1, \dots, k_n = 0, 1, \dots) \quad (24)$$

结合上式与式(23), 并利用 Laguerre 多项式和特征函数的基本性质(22), 可得关于线性组合系数 $s_{r_1, \dots, r_n}(t)$ 的一阶线性常微分方程组:

$$\dot{s}_{k_1, \dots, k_n} = \left(\sum_{i=1}^n \eta_{ik_i} \right) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \eta_{ik_i} t\right) + \sum_{r_1, \dots, r_n=0}^\infty \left(\exp\left(-\sum_{i=1}^n \eta_{ir_i} t\right) + s_{r_1, \dots, r_n}(t) \right)$$

$$\int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{R_{ik_i}(A_i)}{R_{i0}(A_i)} \left(- \frac{\partial}{\partial A_i} [m_i(A) \prod_{k=1}^n R_{kr_k}(A_k)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A_i \partial A_j} [b_{ij}(A) \prod_{k=1}^n R_{kr_k}(A_k)] \right) dA$$

$$(k_1, \dots, k_n = 0, 1, \dots) \quad (25)$$

将近似表达式(20)代入式(19), 并利用 Laguerre 多项式的性质可得微分方程组(25)的初始条件:

$$s_{r_1, \dots, r_n}(0) = 0 \quad (r_1, \dots, r_n = 0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

通过数值计算求得 $s_{r_1, \dots, r_n}(t)$ 并代入式(20)可得近似幅值概率密度 $p(A, t)$, 实际计算时对近似解(20)中的级数作适当截断, 即取 $r_i = 0, 1, \dots, N_i$ ($i = 1, \dots, n$), 使其满足一定的精度要求. 则系统幅值响应的稳态概率密度求解简化为求以下线性代数方程组相应矩阵的特征值和特征向量问题:

$$0 = \sum_{r_1=1}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} (S_{r_1, \dots, r_n}) \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{R_{ik_i}(A_i)}{R_{i0}(A_i)} - \left(\frac{\partial}{\partial A_i} [m_i(A) \prod_{k=1}^n R_{kr_k}(A_k)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A_i \partial A_j} [b_{ij}(A) \prod_{k=1}^n R_{kr_k}(A_k)] \right) dA$$

$$k_i = 0, \dots, N_i \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (27)$$

幅值稳态概率密度可由上式中的未知量 S_{r_1, \dots, r_n} 来表示:

$$p_s(A) = \sum_{r_i}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} S_{r_1, \dots, r_n} \prod_{i=1}^n R_{ir_i}(A_i) \quad (28)$$

对近似解(20)关于 $\hat{A}_i = [A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n]^T$ 积分可得到每个振子的幅值 A_i 的瞬态概率密度:

$$p(A_i, t) = \sum_{r_i=0}^{N_i} [e^{-\eta_{ir_i} t} + s_{0,0, \dots, r_i, 0, \dots, 0}(t)] R_{ir_i}(A_i) \quad (29)$$

其相应的广义位移和广义速度瞬态联合概率密度:

$$p(X_i, \dot{X}_i, t) = \frac{p(A_i, t) \omega_i(A_i)}{2\pi g'_i(A_i)} \Big|_{A_i = U_{ei}^{-1}(\dot{X}_i^2/2 + U_{ei}(X_i))} \quad (30)$$

式中 $U_{ei}^{-1}(\cdot)$ 为 $U_{ei}(\cdot)$ 的反函数, 平均频率 $\omega_i(A_i) = 2\pi / \int_0^{2\pi} \Lambda_i^{-1}(A_i, \Theta_i) d\Theta_i$, $U_{ei}(\cdot)$ 和 $\Lambda_i(A_i, \Theta_i)$ 由式(13)求得, 其稳态概率密度也以同样的方式导出. 基于每个振子的幅值概率密度式(29), 其相应的 k 阶统计矩为:

$$m_{A_i}^k(t) = E[A_i^k] =$$

$$\sum_{r_i=0}^{\infty} [e^{-\lambda_{ir}t} + s_{0,0,\dots,r_i,0,\dots,0}(t)] I_{k,r_i} \quad (31)$$

式中 $I_{k,r_i} = \int_0^{\infty} A_i^k R_{r_i}(A_i) dA_i$, 且有如下性质[10]:

$$I_{n,r+1} = \frac{r-n/2}{r+1} I_{n,r}$$

$$I_{l,r} = 0, (r > l/2) \quad (32)$$

其中 l 为偶数.

3 算例

为了验证求解方法的可行性及精度, 考虑高斯白噪声激励下两个 Duffing-Van der Pol 耦合振子系统, 其动力学控制方程为:

$$\ddot{X}_1 + \beta_{11}\dot{X}_1 + \beta_{12}\dot{X}_2 + (c_{11}X_1^2 + c_{12}X_2^2)\dot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + d_1 X_1^3 + \omega_1^2 \int_0^t h_1(t-\tau) X_1(\tau) d\tau = W_1(t)$$

$$\ddot{X}_2 + \beta_{21}\dot{X}_1 + \beta_{22}\dot{X}_2 + (c_{21}X_1^2 + c_{22}X_2^2)\dot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 + d_2 X_2^3 + \omega_2^2 \int_0^t h_2(t-\tau) X_2(\tau) d\tau = W_2(t) \quad (33)$$

其中 $\beta_{ij} (i=1, 2; j=1, 2)$, $c_{ij} (i=1, 2; j=1, 2)$ 为线性与非线性阻尼系数; ω_1 和 ω_2 为响应线性系统的固有频率; d_1 与 d_2 为非线性刚度系数; $W_1(t)$ 及 $W_2(t)$ 是强度分别为 $2D_{11}$ 和 $2D_{22}$ 的独立高斯白噪声. 粘弹性项 $\int_0^t h_1(t-\tau) X_1(\tau) d\tau$ 和 $\int_0^t h_2(t-\tau) X_2(\tau) d\tau$ 可根据式(9)作简化, 并取 $m_{1s} = m_{2s} = 1$, 系统(33)近似转化为无粘弹性的等效系统:

$$\ddot{X}_1 + \beta'_{11}\dot{X}_1 + \beta_{12}\dot{X}_2 + (c_{11}X_1^2 + c_{12}X_2^2)\dot{X}_1 + \omega_1'^2 X_1 + d_1 X_1^3 = W_1(t)$$

$$\ddot{X}_2 + \beta_{21}\dot{X}_1 + \beta'_{22}\dot{X}_2 + (c_{21}X_1^2 + c_{22}X_2^2)\dot{X}_2 + \omega_2'^2 X_2 + d_2 X_2^3 = W_2(t) \quad (34)$$

修正后的阻尼及刚度系数为:

$$\beta'_{11} = \beta_{11} + \frac{E_{11}\lambda_{11}}{1 + (\lambda_{11}\omega_{a1})^2} \omega_1^2$$

$$\omega_1'^2 = \omega_1^2 - \frac{E_{11}}{1 + (\lambda_{11}\omega_{a1})^2} X_1 \omega_1^2$$

$$\beta'_{22} = \beta_{22} + \frac{E_{21}\lambda_{21}}{1 + (\lambda_{21}\omega_{a2})^2} \omega_2^2$$

$$\omega_2'^2 = \omega_2^2 - \frac{E_{21}}{1 + (\lambda_{21}\omega_{a2})^2} X_2 \omega_2^2 \quad (35)$$

根据式(5)及式(6), 平均频率 ω_{a1} 可通过下式以数值方法求得:

$$\omega_{a_i}(A_i) =$$

$$\pi \sqrt{\omega_{a_i}^2 + d_i A_i^2} / \left[2 \text{Elliptick} \left(\sqrt{\frac{d_i A_i^2}{2\omega_{a_i}^2 + 2d_i A_i^2}} \right) \right] \quad (36)$$

其中 $\text{Elliptick}(\cdot)$ 为第一类完全椭圆积分. 应用 2.1 节中的随机平均法, 可得关于幅值 A_i 的平均 Itô 随机微分方程, 形如式(16), 相应的平均 FPK 方程形如式(18), 根据式(17)导出其平均漂移与平均扩散系数为:

$$m_1 = \frac{D_{11}}{\omega_1'^2 A_1 + d_1 A_1^3} - \frac{D_{11}(\omega_1'^2 + 3d_1 A_1^2)}{(\omega_1'^2 A_1 + d_1 A_1^3)^3} (\omega_1'^2 A_1^2/2 + 5d_1 A_1^4/16) - \frac{\beta'_{11}(\omega_1'^2 A_1^2/2 + 5d_1 A_1^4/16)}{\omega_1'^2 A_1 + d_1 A_1^3} - \frac{c_{11} A_1^2 (\omega_1'^2 A_1^2/8 + 3d_1 A_1^4/32)}{\omega_1'^2 A_1 + d_1 A_1^3} - \frac{c_{12} A_2^2 (\omega_1'^2 A_1^2/4 + 5d_1 A_1^4/32)}{\omega_1'^2 A_1 + d_1 A_1^3}$$

$$m_2 = \frac{D_{22}}{\omega_2'^2 A_2 + d_2 A_2^3} - \frac{D_{22}(\omega_2'^2 + 3d_2 A_2^2)}{(\omega_2'^2 A_2 + d_2 A_2^3)^3} (\omega_2'^2 A_2^2/2 + 5d_2 A_2^4/16) - \frac{\beta'_{22}(\omega_2'^2 A_2^2/2 + 5d_2 A_2^4/16)}{\omega_2'^2 A_2 + d_2 A_2^3} - \frac{c_{22} A_2^2 (\omega_2'^2 A_2^2/8 + 3d_2 A_2^4/32)}{\omega_2'^2 A_2 + d_2 A_2^3} - \frac{c_{21} A_1^2 (\omega_2'^2 A_2^2/4 + 5d_2 A_2^4/32)}{\omega_2'^2 A_2 + d_2 A_2^3}$$

$$b_{11} = D_{11} \left(\omega_1'^2 + \frac{5d_1 A_1^2}{8} \right) / (\omega_1'^2 + d_1 A_1^2)^2$$

$$b_{22} = D_{22} \left(\omega_2'^2 + \frac{5d_2 A_2^2}{8} \right) / (\omega_2'^2 + d_2 A_2^2)^2$$

$$b_{12} = b_{21} = 0 \quad (37)$$

利用 2.2 节提出的近似解表示方法, 近似幅值瞬态概率密度可以表示为:

$$p(A_1, A_2, t) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} [e^{-(\eta_{1i} + \eta_{2j})t} + s_{ij}(t)] \times R_{1i}(A_1) R_{2j}(A_2) \quad (38)$$

其中相应线性系统的特征值和特征函数为:

$$R_{ki}(A_k) = \frac{1}{i!} \frac{A_k}{\sigma_{ks}^2} \exp\left(-\frac{A_k^2}{2\sigma_{ks}^2}\right) L_i\left(\frac{A_k^2}{2\sigma_{ks}^2}\right)$$

$$\eta_{ki} = |\beta_{kk}| i$$

$$\sigma_{ks}^2 = D_{kk} / (|\beta_{kk}| \omega_k^2) \quad (k=1, 2) \quad (39)$$

应用 Galerkin 方法可得如下—阶微分方程组:

$$\begin{aligned} \dot{s}_{kl}(t) &= (\eta_{1k} + \eta_{2l}) e^{-(\eta_{1k} + \eta_{2l})t} + \\ &\sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} (e^{-(\eta_{1i} + \eta_{2j})t} + s_{ij}(t)) \cdot \\ &\{\delta_{ij} F_{1ki} + \sigma_{2s}^2 I_{ij} G_{1ki} + \delta_{ki} F_{2lj} + \sigma_{1s}^2 I_{ki} G_{1lj}\} \end{aligned} \quad (k=0, \dots, N_1, l=0, \dots, N_2) \quad (40)$$

利用特征函数的正交性, 上式中各项满足如下

关系:

$$\begin{aligned} F_{mij} &= \int_0^\infty iR_{mj}(A_m) [f_m(A_m) B_i(A_m^2/\sigma_{ms}^2/2) - \\ &(f_m(A_m) + b_{nm}/\sigma_{ms}^2) B_{i-1}(A_m^2/\sigma_{ms}^2/2)] dA_m \\ G_{mij} &= \int_0^\infty iR_{mj}(A_m) g_m(A_m) [B_i(A_m^2/\sigma_{ms}^2/2) - \\ &B_{i-1}(A_m^2/\sigma_{ms}^2/2)] dA_m \\ f_m(A_m) &= \\ &-\beta'_{mm}(\omega_m^2 + 5d_m A_m^2/8)/(\omega_m^2 + d_m A_m^2) - \\ &c_{mm} A_m^2(\omega_m^2/4 + 3d_m A_m^2/16)/(\omega_m^2 + d_m A_m^2) - \\ &D_{mm} d_m(5\omega_m^2 + 2d_m A_m^2)/[4(\omega_m^2 + d_m A_m^2)^3] \\ g_m(A_m) &= \\ &-c_{m,(3-m)}(\omega_m^2 + 5d_m A_m^2/8)/(\omega_m^2 + d_m A_m^2) \\ I_{ij} &= (2j+1)\delta_{ij} - j\delta_{i,j-1} - (j+1)\delta_{i,j+1} \\ B_i(\cdot) &= L_i(\cdot)/i! \\ (m=1, 2; i=0, \dots, N_1; j=0, \dots, N_2) \end{aligned} \quad (41)$$

在初始条件(26)下求解方程组(40), 将结果代入(38)可得近似幅值瞬态概率 $p(A_1, A_2, t)$, 从而可以得到每个振子的近似幅值瞬态概率密度 $p(A_1, t)$ 与 $p(A_2, t)$, 其具体形式为:

$$\begin{aligned} p(A_1, t) &= \sum_{i=0}^{N_1} [e^{-\lambda_1 t} + s_{i0}(t)] 1R_{1i}(A_1) \\ p(A_2, t) &= \sum_{j=0}^{N_2} [e^{-\lambda_2 t} + s_{0j}(t)] 1R_{2j}(A_2) \end{aligned} \quad (42)$$

系统响应幅值的近似稳态概率密度由式(27)与(28)导出. 由式(30)可得每个振子的广义位移和广义速度联合瞬态概率密度:

$$\begin{aligned} p(X_k, \dot{X}_k, t) &= \frac{p(A_k, t) \omega'_{a_k}(A_k)}{2\pi(\omega_k^2 A_k + d_k A_k^3)} \Bigg|_{A_k = U_{\tilde{x}}^{-1}(\tilde{X}_k^2/2 + U_{\tilde{v}_k}(\dot{X}_k))} \\ (k=1, 2) \end{aligned} \quad (43)$$

在求解上式, $\omega_{a_i}(A_i)$ 需转化为 $\omega_{H_i}(H_i)$, 从而将幅值 A_i 通过 X_i 和 \dot{X}_i 以显式的方式来表示.

基于幅值瞬态概率密度(42)以及幅值统计矩

(31), 幅值的一阶和二阶统计矩具有如下形式:

$$\begin{aligned} m_{A_1}^1(t) &= E[A_1] = \sum_{r_1=0}^{N_1} [e^{-\lambda_1 r_1 t} + s_{r_1 0}(t)] 1I_{1, r_1} \\ m_{A_2}^1(t) &= E[A_2] = \sum_{r_2=0}^{N_2} [e^{-\lambda_2 r_2 t} + s_{0 r_2}(t)] 1I_{1, r_2} \\ m_{A_1}^2(t) &= E[A_1^2] = 2\sigma_{1s}^2(1 - e^{-\lambda_1 t} - s_{10}(t)) \\ m_{A_2}^2(t) &= E[A_2^2] = 2\sigma_{2s}^2(1 - e^{-\lambda_2 t} - s_{01}(t)) \end{aligned} \quad (44)$$

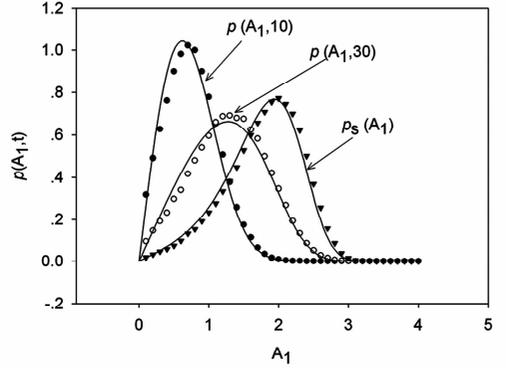


图1 系统第一个振子幅值瞬态概率密度

$p(A_1, t)$; $p_s(A_1)$ 为幅值稳态概率密度;

— 表示本文方法的结果; ●, ○, ▼ 表示对原系统(33)模拟结果

Fig. 1 The transient probability densities of amplitude response for the first oscillator, where is the stationary probability density,

'—' indicates the results from the proposed procedure,

●, ○, ▼ presents the simulation results of the original system (33)

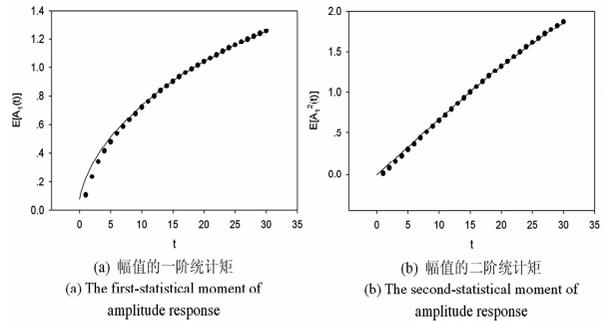


图2 系统第一个振子幅值的一阶与二阶统计矩

$E[A_1(t)]$ 和 $E[A_1^2(t)]$ 随时间的演化过程;

— 表示本文方法的结果; ● 对原系统(33)模拟结果

Fig. 2 The time evolution of the first- and second- statistical moments of amplitude response ($E[A_1(t)]$ and $E[A_1^2(t)]$) for the where

'—' indicates the results from the proposed procedure; first oscillator, ●, ○, ▼ present the simulation results of the original system (33)

系统(33)的具体参数取如下值: $\beta_{11} = -0.05$, $\beta_{22} = 0.05$, $\beta_{12} = \beta_{21} = 0.03$, $c_{11} = c_{12} = 0.04$, $c_{21} = c_{22} = 0.02$, $\omega_1 = 1.0$, $\omega_2 = \sqrt{2}$, $d_1 = d_2 = 0.1$, $D_{11} = D_{22} =$

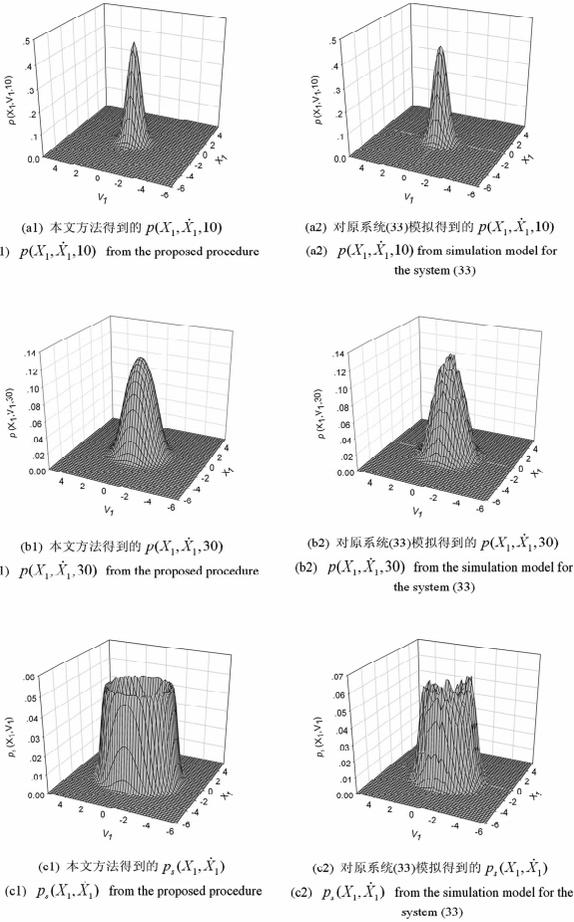


图3 系统第一个振子广义速度和广义位移联合概率密度

$p(X_1, \dot{X}_1, t)$ 的演化过程; $p_s(X_1, \dot{X}_1)$ 为稳态概率密度

Fig. 3 The evolution of the transient joint probability densities

$p(X_1, \dot{X}_1, t)$ for the first oscillator, where $p_s(X_1, \dot{X}_1)$

is the stationary probability density

0.03, 粘弹性项相关系数 $E_{11} = 0.05, \lambda_{11} = 0.3, E_{21} = 0.04$ 以及 $\lambda_{21} = 0.2$, 近似幅值瞬态概率密度中的级数截断取为 $N_1 = 50$ 和 $N_2 = 30$, 级数截断取值越高, 得到的结果越精确. 系统中第一个振子的幅值概率密度 $p(A_1, t)$ 如图 1 所示, 图中包含了本文得到的半解析解结果以及对原系统 (33) 进行 Monte Carlo 数值模拟得到的结果, 两种方法得到的幅值一阶与二阶统计矩 $m_{A_1}^1(t)$ 和 $m_{A_1}^2(t)$ 如图 2 所示, 不同时刻的广义位移和广义速度联合概率密度 $p(X_1, \dot{X}_1, t)$ 如图 3 所示 (图中以 V_1 表示第一个振子的广义速度 \dot{X}_1). 对原系统 (33) 进行 Monte Carlo 数值模拟时, 步长为 0.01, 统计采用的样本数为 100,000. 由图 1 至图 3 可以看到, 近似解所给出的结果与 Monte Carlo 模拟结果符合较好, 说明本文

的求解方法的有效性. 图 1 显示第一个振子的幅值概率密度从初始原点处的 delta 分布, 随着时间的发展逐渐向着大幅值分布, 这一点可由图 2 的幅值统计矩得到印证. 随着时间的发展幅值的一阶和二阶统计矩越来越大. 同时由图 3 的广义速度和广义位移联合概率密度可以看出, 该振子开始阶段是小位移和速度的随机振动, 然后不断向着较大的位移和速度响应扩散, 在平稳状态时是扩散的极限环.

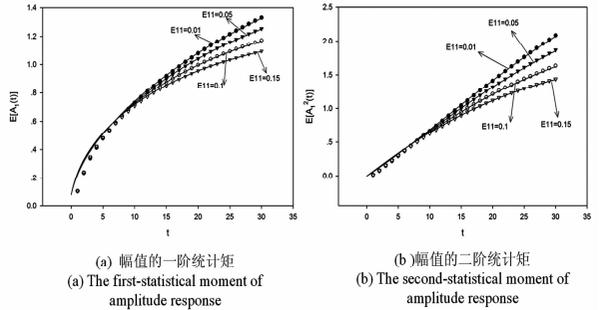


图4 不同粘弹性参数 E_{11} 下系统第一个振子幅值一阶与二阶统计矩

$E[A_1(t)]$ 和 $E[A_1^2(t)]$ 随时间的演化过程;

— 本文方法的结果; $\bullet, \circ, \blacktriangledown, \nabla$ 对原系统 (33) 模拟结果

Fig. 4 The time evolution of the first- and second-order statistical moments of amplitude response ($E[A_1(t)]$ and $E[A_1^2(t)]$) for the first oscillator with different values of E_{11} , where ‘—’ indicates the results from the proposed procedure, $\bullet, \circ, \blacktriangledown, \nabla$ present the simulation results of the original system (33)

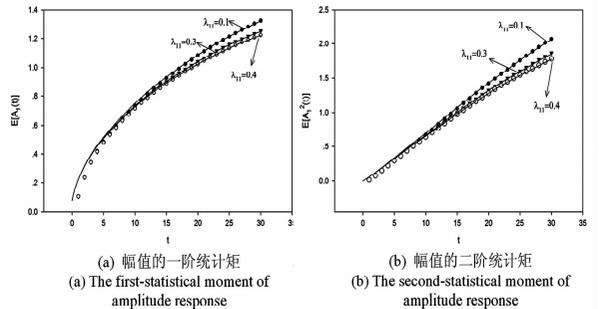


图5 不同粘弹性参数 λ_{11} 下系统第一个振子幅值一阶与二阶统计矩

$E[A_1(t)]$ 和 $E[A_1^2(t)]$ 随时间的演化过程; — 本文方法的结果;

$\bullet, \circ, \blacktriangledown$ 对原系统 (33) 模拟结果

Fig. 5 The time evolutions of the first- and second-order statistical moments of amplitude response ($E[A_1(t)]$ and $E[A_1^2(t)]$) for the first oscillator with different values of λ_{11} , where ‘—’ indicates the results from the proposed procedure, $\bullet, \circ, \blacktriangledown$ present the simulation results of the original system (33)

为了反映粘弹性对系统响应的影响, 图 4 和图 5 给出了不同粘弹性参数下一阶和二阶统计矩随时间的演化. 从图 4 可以看出, 当粘弹性参数 E_{11} 逐渐增

大时,第一个振子的幅值响应逐渐减小,这可以从修正阻尼和修正刚度的表达式(35)中来看出,随着 E_{11} 的增大,第一个振子的修正阻尼系数变大而修正刚度系数变小,从而其响应减小. 还可以看出随着时间的增大,粘弹性参数对系统响应的影响越来越明显. 从图5可以看出,当粘弹性参数 λ_{11} 逐渐增大时,第一个振子的幅值响应也是逐渐减小的.

需要指出的是,由式(9)对粘弹性项进行简化过程中, $e^{-(t/\lambda_{ii})}$ 中 λ_{ii} 的取值量级为 10^{-1} , 当时间 t 较大时,该项很快衰减,因此它只对初期的很短时间具有较大影响,本文考虑瞬态时间 t 大于 10 的结果,其受到的影响不大,这可从所得到的计算结果看出.

4 结论

本文研究了多自由度粘弹性非线性随机系统瞬态响应. 提出了多自由度粘弹性非线性随机系统的随机平均法,将粘弹性对系统的作用近似地简化为对系统阻尼以及刚度的修正,从而将原系统近似等效为无粘弹性项的多自由度非线性随机系统,应用基于广义谐和函数的随机平均导出关于幅值响应瞬态概率的平均 FPK 方程. 幅值瞬态解以半解析的方式近似地表示多重级数式表示,基函数为幅值相关正交函数,所选取的基函数以 Laguerre 多项式为主要组成部分,并且是与原系统相对应线性系统的 FPK 方程的特征函数,组合系数是随时间变化的,并可通过 Galerkin 方法得到. 以非线性阻尼耦合的 Duffing-Van der Pol 振子系统为例,分析幅值瞬态概率密度,广义位移与广义速度联合瞬态概率密度及幅值的一二阶统计矩并讨论粘弹性对响应的影响,本文得到的近似半解析解与 Monte Carlo 数值模拟结果吻合很好,说明本文的近似方法可有效地应用于多自由度粘弹性非线性随机系统响应的研究.

参 考 文 献

- 1 朱位秋. 随机振动. 北京:科学出版社,1992 (Zhu W Q. Random vibration. Beijing: Science Press, 1992 (in Chinese))
- 2 朱位秋. 非线性随机动力学与控制: Hamilton 理论体系框架. 北京:科学出版社,2003 (Zhu W Q. Nonlinear stochastic dynamics and control: Hamiltonian formulation. Beijing: Science Press, 2003 (in Chinese))
- 3 Caughey T K. Nonlinear theory of random vibrations. *Advances in Applied Mechanics*, 1971, 11: 209 ~ 253
- 4 Caughey T K, Dienes J K. Analysis of a nonlinear first - order system with a white noise input. *Journal of Applied Physics*, 1961, 32(11): 2476 ~ 2479
- 5 Gardiner C W. Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences. Berlin: Springer, 1983
- 6 Atkinson J D. Eigenfunction expansions for randomly excited non-Linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1973, 30(2): 153 ~ 172
- 7 Johnson J P, Scott R A. Extension of eigenfunction-expansion solutions of a Fokker-Planck equation-II. second order System. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1980, 15(1): 41 ~ 56
- 8 Wen Y K. Approximate method for nonlinear random vibration. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1975, 101(4): 389 ~ 401
- 9 Iwan W D, Spanos P D. Response envelope statistics for nonlinear oscillators with random excitation. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1978, 45(1): 170 ~ 174
- 10 Spanos P D, Sofi A, Di Paola M. Nonstationary response envelope probability densities of nonlinear oscillators. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2007, 74(2): 315 ~ 324
- 11 ASME Micaletti R C, et al. A solution method for linear and geometrically nonlinear MDOF systems with random properties subject to random excitation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1998, 13(2): 85 ~ 95
- 12 Zhang L, Zu J W, Zheng Z. The stochastic Newmark algorithm for random analysis of multi-degree-of-freedom nonlinear systems. *Computers & Structures*, 1999, 70(5): 557 ~ 568
- 13 Ohtori Y, Spencer Jr B F. Semi-implicit integration algorithm for stochastic analysis of multi-degree-of-freedom structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, 128(6): 635 ~ 643
- 14 Smyth A W, Masri S F. Nonstationary response of nonlinear systems using equivalent linearization with a compact analytical form of the excitation process. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2002, 17(1): 97 ~ 108
- 15 Saha N, Roy D. The girsanov linearization method for stochastically driven nonlinear oscillators. *ASME Journal of*

- Applied Mechanics*, 2007, 74(5):885 ~ 897
- 16 金肖玲. 多自由度强非线性随机系统的响应与稳定性研究[博士学位论文]. 杭州:浙江大学, 2009 (Jin X L. Response and stability of multi-degree-of-freedom strongly nonlinear stochastic systems[PhD Thesis]. Hangzhou: Zhejiang University, 2009 (in Chinese))
- 17 金涛, 黄志龙. 调制白噪声激励下时滞非线性系统的瞬态响应. 中国科学: 物理学力学天文学, 2013, 43:1 ~ 8 (Jin T, Huang Z L. Transient probability densities of nonlinear system with time delay subject to modulated white noise excitation. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2013, 43:1 ~ 8 (in Chinese))
- 18 Xu Z, Cheung Y K. Averaging method using generalized harmonic functions for strongly non-Linear oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 174(4):563 ~ 576
- 19 Liu Z H, Zhu W Q. Stochastic averaging of quasi-integrable Hamiltonian systems with delayed feedback control. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 299(1):178 ~ 195
- 20 Stratonovich R L. Topics in the theory of random noise; Vol. 1: general theory of random processes; nonlinear transformations of signals and noise. New York: Gordon and Breach, 1963
- 21 Khasminskii R Z. A limit theorem for the solutions of differential equations with random right-hand sides. *Theory of Probability & Its Applications*, 1966, 11(3):390 ~ 406

TRANSIENT RESPONSE OF NONLINEAR MULTI-DEGREE-OF-FREEDOM STOCHASTIC SYSTEM WITH VISCOELASTICITY *

Jin Tao¹ Jin Xiaoling² Huang Zhilong^{2†}

(1. Zhejiang Electric Power Design Institute, Hangzhou 310012, China)

(2. Department of Engineering Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract : The transient response of a nonlinear multi-degree-of-freedom system with viscoelasticity subjected to Gaussian white noise excitation is investigated. Firstly, the effect of the viscoelasticity on the system is approximated by the modified damping and stiffness. The original system is replaced by a system without viscoelasticity. Then, the stochastic averaging method based on generalized harmonic functions is adopted to derive the averaged Fokker-Planck-Kolmogorov equation of amplitude transient joint probability density for each oscillator. This equation is solved by expressing the probability density as multiple series in terms of a set of properly state-dependent orthogonal basis functions with time-dependent coefficients. According to Galerkin method, the time-dependent coefficients can be solved from a set of first-order linear differential equations. Finally, the semi-analytical formulae of the transient probability density as well as the transient probability of the state response and the statistical moments for the amplitude response is obtained. To illustrate the proposed procedure, coupled two-degree-of-freedom Duffing-van der Pol oscillators with viscoelasticity subjected to Gaussian white noise excitation is investigated as an example. The effect of viscoelasticity on the system response is initially discussed. Moreover, comparison with the simulation results of the original system indicates that the proposed procedure is accuracy and efficacy.

Key words transient response, viscoelasticity, nonlinear multi-degree-of-freedom stochastic system, stochastic averaging, Galerkin method