第 15 卷第 3 期 2017 年 6 月
1672-6553/2017/15(3)/193-7

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 15 No. 3
Jun. 2017

随机平均原理研究若干进展*

许勇† 裴斌 徐伟
（西北工业大学应用数学系，西安 710072）

摘要 本文介绍了随机平均原理的研究现状和发展趋势，探讨了基于非高斯列维噪声、分数高斯噪声、Markov 切换的随机复杂动力学系统随机平均原理研究中的若干问题及进展.

关键词 非高斯列维噪声， 分数高斯噪声， Markov 切换， 随机复杂动力学系统， 随机平均原理

DOI： 10.6052/1672-6553-2017-022

引言

随机平均法以随机平均原理为理论基础是非线性随机动力学响应分析的重要工具，分为标准随机平均法和能量包线随机平均法两种，其中标准随机平均法主要应用在多自由度拟线性随机系统中，而能量包线随机平均法主要应用在多自由度强非线性拟保守随机系统中. 随机平均法凭借其简单、可以降维、效率高等优点在动力学研究中被广泛应用. 因此，对于随机平均原理的研究也就成为一项具有重要科学意义和实际指导价值的研究.

在实际应用中，很多系统的动力学模型是既包含动力学时间尺度较快的状态变量，又包含时间尺度较慢的状态变量的. 若引入适当的无量纲参数来表示不同动力学时间尺度的比值，则这些系统可表示成由快变量和慢变量相耦合的系统，即快-慢（两尺度）动力系统. 快-慢系统中复杂的动力学现象得到广泛关注. 例如，在许多工程技术领域中的控制问题；在生态系统中，生态环境的恶化、物种的爆发和消亡所产生的动力学机制已得到深入研究；在生物神经系统中，存在各种快-慢过程，使得系统存在各种形式的分岔和丰富的放电模式. 在实际科学中，许多问题可以转换成研究系统的两个时间尺度，如出现在应用程序中不同的化学反应动力学[1,2]，细胞建模[3,4]，哈密顿系统[5,9]，电子电路[10,11]和激光系统[12,14]. 最著名的快-慢系统可以追溯到范德波[10]在 1920 年提出的范德波方程. 基于平均原理的平均法是分析快-慢系统动力学行为的有效工具，其目的在于构造一个所谓的“平均化方程”（也称为“简化方程”或“有效方程”）来简化原来的多尺度方程，使简化后的方程不再包含快尺度物理量，并且使得简化方程的解可以逼近原来方程中慢尺度的物理量. 具体来看，考虑一个具有快-慢两个尺度的常微分方程：

$$\begin{cases} dX_t^{\varepsilon} = a(X_t^{\varepsilon}, Y_t^{\varepsilon})\,dt \\ dY_t^{\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon} f(X_t^{\varepsilon}, Y_t^{\varepsilon})\,dt \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\varepsilon \ll 1$ 是小正参数，它表示方程中两个分支的时间尺度比率. 在这一尺度参数下，称 X_t^{ε} 为慢变量（也称为“慢运动”或“慢分支”），称 Y_t^{ε} 为快变量（也称为“快运动”或“快分支”）. 映射 $a: R^n \times R^k \to R^n$，$f: R^n \times R^k \to R^k$ 是可测函数. 对任意取定的 $x \in R^n$，构造过程 Y_t^x，使其满足微分方程：

$$dY_t^x = b(x, Y_t^x)\,dt$$

假设对任意 $x \in R^n$，极限：

$$\bar{a}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a(x, Y_t^x)\,dt \tag{2}$$

存在（例如当 y_t^x 为周期函数时，此极限存在），则所谓的“平均化原理”成立. 在任意有限时间区间 $[0, T_0]$ 上，原来系统中慢分支 X_t^{ε} 的轨道可以由平均化方程：

$$dX_t = \bar{a}(X_t)\,dt$$

的解轨道一致逼近（当参数 ε 趋于 0 时）. 确定性方程平均化原理的研究有较长的历史，其奠基性工

2017-04-03 收到第 1 稿，2017-4-21 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11372247，11572247)
† 通讯作者 E-mail：hsux3@nwpu.edu.cn

作由前苏联数学家 Bogoliubov 在文献[15]中完成. 紧接着,Gikhman[16], Volosov[17] 和 Besjes[18] 研究了非线性常微分方程的平均化问题. 随机平均原理首先由 Stratonovich[19] 提出, 此后, Khasminskii[20,22]将平均化原理发展到具有快-慢时间尺度的随机常微分方程的研究中,他在文献[23]中证明了随机平均化原理在较弱的收敛意义下成立. 值得一提的是, Veretenniko[24,25], Freidlin & Wentzell[26,27]进一步显著改进了 Khasminskii 的结果,将较弱收敛意义下的随机平均化原理推广到依概率收敛的情形. 另外,文献 Golec & Ladde[28], Givon, Kevrekidis& Kupferman[29]研究了关于均方收敛意义下的随机平均化原理,文献 Golec[30] 和 Givon[29] 得到了强收敛意义下的随机平均化原理. Zhu[31] 和 Roberts 和 Spanos[32]等人的专著及综述中都对随机平均法早期的发展做了详细介绍. Zhu[5,9] 的团队提出并发展了高斯白噪声、谐和噪声等作用下单自由度或多自由度拟 Hamilton 系统的随机平均理论和方法,解决了五类拟 Hamilton 系统平均方程的求解问题. Xu[33]等建立了高斯色噪声驱动下一类随机动力学系统的平均原理及高斯白噪声与色噪声共同激励下一类单自由度系统的随机平均法[34].

近几年来,随机平均法理论得到进一步完善,并已被应用于各类随机动力系统动力学性质的研究,其为研究更复杂的随机动力学系统和解决各种激励下的随机动力学问题提供了良好的方法. 随机平均的方法和理论也不再仅仅基于以高斯白噪声为代表的不相关噪声激励下的随机动力学系统,具有相关时间的分数高斯噪声激励、非高斯列维噪声及 Markov 切换的随机动力学系统(包含无穷维系统)研究越来越引起学者的关注,取得了一定的发展.

本文根据国内外研究现状和发展趋势,综述了基于非高斯列维噪声、长相关性分数高斯噪声及 Markov 切换的随机复杂动力学系统(包含无穷维系统)随机平均原理研究中的若干研究方向,并对存在的一些问题以及进一步的研究做了展望.

1 基于非高斯列维噪声的随机平均原理

在以往的大部分研究中,为了处理起来简便,研究人员考虑的都是高斯噪声,它是布朗运动的形式导数,一般用来描述连续型的微小的随机因素. 在大多数情况下,高斯的假设是比较合理的,它满足中心极限定理,而且由于处理起来比较简单,理论推导比较容易,在许多领域都得到了广泛的应用. 然而,高斯噪声只是一种理想的噪声源,它刻画的是正常扩散,即只能模拟均值在小范围内的起伏,而不能模拟大幅度的涨落. 在实际应用中,我们遇到的许多噪声都是非高斯的,比如在生物医学中的诱发电位噪声、低频的大气噪声以及各种其它人为噪声等. 这些噪声的非高斯性使得它们具有更强的冲击性,其所服从的分布比起正态分布,具有更多的尖峰与偶然性(见图1),而且其密度函数的拖尾与高斯密度函数相比,衰减的也更为缓慢(见图2)[35]. 这种情况下,以往基于高斯假定所得到的结论就需要被重新考虑,我们需要寻求一种更加广义,能够更好的与实际符合的分布,它的导数能更好地用来描述我们所遇到的噪声.

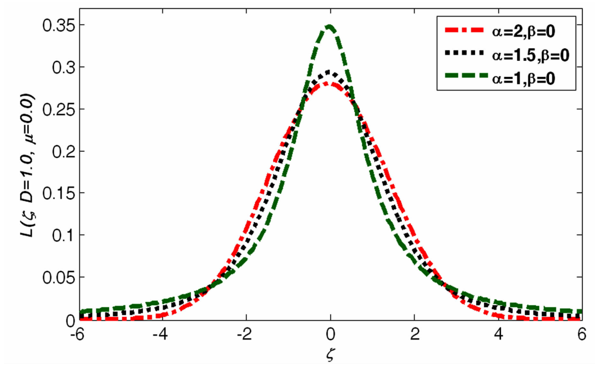

图1 不同的稳定性指标对应的列维噪声的概率密度函数 $L_{\alpha,\beta}(\zeta;D,\mu)$

Fig. 1 Probability density functions $L_{\alpha,\beta}(\zeta;D,\mu)$ for Lévy noise with different stability indexes

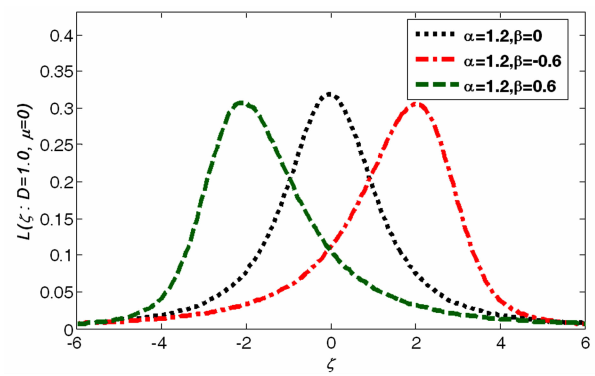

图2 不同的偏斜参数对应的列维噪声的概率密度函数 $L_{\alpha,\beta}(\zeta;D,\mu)$, $\alpha=1.2$

Fig. 2 Probability density functions $L_{\alpha,\beta}(\zeta;D,\mu)$, $\alpha=1.2$ for Lévy noise with different skewness parameters

Zhu[36]首先将随机平均法运用到泊松白噪声激励下的非线性系统的研究中,Zeng 和 Zhu[37,40]研究了非高斯随机激励下非线性系统的随机平均

法. Xu[41] 给出了非高斯列维噪声驱动下的随机动力系统的平均原理,Xu[42] 还给出了在一类弱化的李普希兹条件下非高斯列维噪声驱动下的随机动力系统的平均原理,证明了平均后随机动力学系统的解依概率和均方收敛于原系统的解,给出了随机平均法的理论依据. Givon[43] 根据快变量存在的不变测度,研究了两尺度跳扩散过程均方意义下的随机平均原理,并得到相应的收敛阶为 $O(\ln\varepsilon)$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_t^\varepsilon = a(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)dt + b(x_t^\varepsilon)\mathrm{d}B_t + c(x_t^\varepsilon)\mathrm{dP}_t \\ \mathrm{d}y_t^\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}f(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)\mathrm{d}t + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}g(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)\mathrm{d}W_t + \\ \qquad h(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)\mathrm{d}N_t^\varepsilon \end{cases} \tag{3}$$

其中 x_t^ε 是 n 维跳扩散过程,y_t^ε 是 m 维跳扩散过程. 函数 $a(x,y)\in R^n$ 和 $f(x,y)\in R^m$ 是漂移项系数,函数 $b(x)\in R^{n\times d_1}$ 和 $g(x,y)\in R^{m\times d_2}$ 是扩散项系数,函数 $c(x)\in R^n$ 和 $h(x,y)\in R^m$ 是跳扩散项系数,B_t 和 W_t 是 d_1,d_2 一维相互独立的 Wiener 过程,P_t 是参数为 λ_1 的标量泊松过程,N_t^ε 是参数为 $\dfrac{\lambda_2}{\varepsilon}$ 的标量泊松过程,$\varepsilon\ll1$. Liu 进一步获得了收敛阶为 $O(\sqrt{\varepsilon})$ 的强收敛定理[44,45]. Xu 和 Liu[46] 进一步在文献[43]的基础上研究了此类方程在 P 阶矩意义下的随机平均原理. Thompson 和 Kuske[47] 等人研究了快变量系统由加性 α 稳定噪声激励且慢变量线性依赖于快变量的非线性快-慢变动力系统的随机平均原理:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_t^\varepsilon = f(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)\mathrm{d}t \\ \varepsilon\mathrm{d}y_t^\varepsilon = g(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)\mathrm{d}t + \varepsilon^r b\mathrm{d}L_t^{(\alpha,\beta)} \end{cases} \tag{4}$$

其中 r,b 是常数,参数 ε 是一个小参数,$\varepsilon\ll1$,快变量方程由加性 α 稳定噪声驱动,$\mathrm{d}L_t^{(\alpha,\beta)}$ 服从 $S_\alpha(\beta,(\mathrm{d}t)^{\frac{1}{\alpha}})$ 分布,$\alpha\in(1,2]$.

2　基于分数高斯噪声的随机平均原理

在自然界等很多现象中的噪声往往表现出相关性甚至是长相关性的显著特征,而分数布朗运动为长相关性噪声的研究提供了重要的理论基础,它是一种比布朗运动更广泛的随机过程,具有的长相关性、增量非独立性已经在金融[48,49]、地球物理学[50,51]、生物学[52,53]和脑功能信号分析[54,55]等方面有了一定的应用. 1968 年,Mandelbrot 和 Van Ness[56] 首先定义了“分数布朗运动”,并给出分数布朗运动的构造. 此后,分数布朗运动驱动随机动力系统的研究引起学者的关注. 由于分数布朗运动既不是半鞅又不是马尔可夫过程,使得随机积分这个完备的理论基础并不适用于分数布朗运动的研究. Xu[57-59] 在前向路径积分意义下,根据 Khasminskii 平均法,研究具有长相关性分数布朗运动的随机平均原理,证明了具有长相关性分数布朗运动驱动的动力系统与平均后的随机动力系统在均方意义下是收敛的,并利用数值模拟的方法,验证了定理的正确性. Xu[60,61] 还进一步研究了分数布朗运动驱动的快-慢变系统的随机平均原理. Deng 和 Zhu[62,64] 根据分数布朗运动驱动的两尺度随机动力系统随机平均原理结果[60,61],提出并发展了分数高斯噪声等作用下单自由度或多自由度拟 Hamilton 系统的随机平均理论和方法,解决了拟 Hamilton 系统平均方程的求解问题.

3　基于 Markov 切换的随机平均原理

1961 年 Krasovskii 和 Lidskii[65] 首次提出 Markov切换系统. 近些年来,Markov 切换系统在复杂网络等非线性系统建模中起不可替代的作用,使得其迅速成为国内外发展最活跃的前沿学科和研究热点之一. 所谓 Markov 切换系统,即是以一个连续时间有限状态的 Markov 链来控制系统的切换时刻和切换状态. 由于 Markov 切换系统贴近应用背景,数学描述清晰,可操作性强,因而很快成为复杂网络及其他非线性系统建模的重要参考依据. 事实上,自然界和人类社会中广泛存在着的各种各样的复杂系统都可以通过复杂网络模型来描述. 复杂网络模型描述了复杂系统中元素之间、子系统之间、层次之间的相互作用以及系统与环境的相互作用. 而当系统元件出现突发故障或突然修复状况,或突然出现外部干扰,以及子系统连接方式发生突变时,复杂网络系统很可能产生结构或参数上的突发改变. 例如种群系统中的环境噪音和地震等突发性现象对种群数量变化的影响;通讯系统中数据交换的障碍和机器故障对数据传输的影响;经济金融系统中,国家宏观调控对经济变化的影响等等. 考虑到 Markov 切换系统在描述系统结构或参数突然变化方面具有很大的优势,因此,选用 Markov 切换系统来描述网络的状态更加贴合实际应用背景. 具有 Markov 切换的随机动力系统的随机平均原理得到了广泛的研究. Yin[66] 研究了具有两尺度 Markov 切换的跳扩散模型的随机平均原理:

$$\begin{aligned} dX^{\varepsilon}(t) &= f(X^{\varepsilon}(t),\alpha^{\varepsilon}(t),t)dt + \\ &\quad g(X^{\varepsilon}(t),\alpha^{\varepsilon}(t),t)dw(t) + \\ &\quad \int_{\Gamma} h(X^{\varepsilon}(t),\alpha^{\varepsilon}(t),t,\gamma)N(dt,d\gamma) \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\alpha^{\varepsilon}(t)$代表连续时间两尺度 Markov 切换. 以及快变量慢变量耦合的 Markov 切换调制两尺度随机跳扩散过程的随机平均原理:

$$\begin{cases} dX_t^{\varepsilon} = f(X_t^{\varepsilon},Z_t^{\varepsilon},\alpha(t))dt + \\ \qquad g(X_t^{\varepsilon},Z_t^{\varepsilon},\alpha(t))dw + \\ \qquad \int_{\Gamma} h(X_t^{\varepsilon},Z_t^{\varepsilon},\alpha(t),\gamma)N(dt,d\gamma) \\ dZ_t^{\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon}f_1(X_t^{\varepsilon},Z_t^{\varepsilon})dt + \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}g_1(X_t^{\varepsilon},Z_t^{\varepsilon})dv \end{cases} \tag{6}$$

其中 X_t^{ε} 是慢变量过程, Y_t^{ε} 是快变量过程, w 和 v 是相互独立的 Wiener 过程, $\varepsilon \ll 1$, $\alpha(t)$代表连续时间 Markov 切换. Yin, Talafhag 和 Xi[67] 考虑了两尺度 Markov 切换调制的随机 Liénard 方程在弱收敛意义下的随机平均原理:

$$\begin{cases} dX_1^{\varepsilon}(t) = X_2^{\varepsilon}(t)dt \\ dX_2^{\varepsilon}(t) = -(X_2^{\varepsilon}(t)f(X_1^{\varepsilon}(t),\alpha^{\varepsilon}(t),t) + \\ \qquad g(X_1^{\varepsilon}(t),\alpha^{\varepsilon}(t),t))dt + \\ \qquad h(X_1^{\varepsilon}(t),\alpha^{\varepsilon}(t),t)dw(t) \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\alpha^{\varepsilon}(t)$ 代表连续时间两尺度 Markov 切换, $v(t)$表示 Wiener 过程. Bao, Yin 和 Yuan[68] 考虑了加性 α 稳定噪声激励的两尺度随机微分方程的随机平均原理. 宦荣华教授和朱位秋院士[69-70] 等人给出了具有 Markov 切换的随机平均法, 并用此方法研究了 Markov 切换多自由度随机拟不可积哈密顿系统的概率 1 稳定性和在时滞反馈控制下 Markov 切换拟可积哈密顿系统的概率 1 稳定性.

4 无穷维随机动力系统的随机平均原理研究

以上提及的随机平均化原理的结果都是对有限维空间中的系统而言. 无穷维空间中随机系统的平均化原理的研究晚了些, 2009 年 Cerrai & Freidlin[71] 证明了加性噪声驱动的随机偏微分方程依概率收敛意义下的平均化原理. 在其后的文献[72]中, Cerrai 将上述结论作了推广, 得到了乘性噪声驱动的随机偏微分方程的平均化原理. Wang & Roberts[73] 证明了在混合假设(mixing assumption)条件下, 随机F-N系统的慢分支过程 X_t^{ε} 在均方意义下收敛于一个"平均"方程, 并且得到了其收敛速度的阶数. Fu, Liu 和 Duan[74,75] 考虑一个有界开区间上的双时间尺度随机抛物方程, 且此处所考虑的乘性型噪声对快慢两个运动都有扰动, 证明强收敛意义下的平均化原理对于这类随机抛物方程是成立的, 由于考虑更为一般的乘性型噪声, 因而其证明过程有所不同, 且比较复杂. Xu 和 Liu 推广了文献[74,75]的结果, 考虑了乘性列维噪声驱动的双时间尺度随机抛物方程, 证明强收敛意义(均方意义[76] 及 P 阶矩意义[77])下的平均化原理对于这类随机抛物方程是成立的. Pei, Xu 和 Wu[78] 考虑了列维噪声驱动的随机双曲抛物方程强收敛意义下的平均化原理(均方意义).

5 结语

本文仅就我们关心的领域对非高斯列维噪声、分数高斯噪声、Markov 切换, 及无穷维随机系统随机平均原理的研究做了介绍, 还有许多方面没有涉及.

目前来说, 对于高斯白噪声、列维噪声激励的有穷维系统的随机平均原理较为系统, 已经存在大量成熟的结果, 而对于列维噪声、分数高斯噪声激励的无穷维系统及含 Markov 切换的随机系统的随机平均原理的研究尚在起步阶段, 研究还相当地少, 特别是针对于乘性列维噪声、分数高斯噪声激励的无穷维系统及含两尺度 Markov 切换的随机平均原理的研究是未来的重点.

参 考 文 献

1 Koper M T M. Bifurcations of mixed-mode oscillations in a three variable autonomous Van der Pol-Duffing model with a cross-shaped phase diagram. *Physica D*, 1995,80(1):72~94

2 Larter R, Steinmetz C G, Aguda B D. Fast-slow variable analysis of the transition to mixed-mode oscillations and chaos in the peroxidase reaction. *Journal of Chemical Physics*, 1988,89(10):6506~6514

3 Krupa M, Popovic N, Kopell N and Rotstein H G. Mixed-mode oscillations in a three time-scale model for the dopaminergic neuron. *Chaos*, 2008,18(1):015106

4 Rubin J, Wechselberger M. Giant squid-hidden canard: the 3D geometry of the Hodgkin-Huxley model. *Biological Cybernetics*, 2007,97(1):5~32

5 朱位秋. 非线性随机动力学与控制-Hamilton 理论体系框架. 北京:科学出版社, 2003 (Zhu W Q. Nonlin-

ear stochastic dynamics and control-Hamiltonian theoretical framework. Beijing: Science Press, 2003 (in Chinese))

6 Zhu W Q, Huang Z L, Suzuki Y. Stochastic averaging and Lyapunov exponent of quasi partially integrable Hamiltonian systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002,37(3):419 ~ 437

7 Zhu W Q, Yang Y Q. Stochastic averaging of quasi-non-integrable Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1997,64(1):157 ~ 164

8 Zhu W Q, Huang Z L, Yang Y Q. Stochastic averaging of quasi-integrable Hamiltonian systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1997,64(4):975 ~ 984

9 Huang Z L, Zhu W Q. Stochastic averaging of quasi-generalized Hamiltonian systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2009,44(1):71 ~ 80

10 Van der Pol B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations. *Radio Review*, 1920,1:701 ~ 710

11 Bernd K, Hinke M O, Jorge G V. Numerical continuation methods for dynamical systems: Path following and boundary value problems, Dordrecht: Springer,2007:221 ~ 251

12 Braza P, Erneux E. Singular Hopf bifurcation to unstable periodic solutions in an NMR laser. *Physical Review A*, 1989,40(5):2539

13 Dubbeldam J L, Krauskopf B. Self-pulsations in lasers with saturable absorber: dynamics and bifurcations. Optics Communications, 1999,159(4-6):325 ~ 38

14 Erneux T, Mandel P. Bifurcation phenomena in a laser with a saturable absorber. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 1981,44(4):365 ~ 374

15 Bogoliubov N N, Mitropolsky Y A. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. New York: Gordon & Breach Science Publishers, 1961

16 Sorokina N G. On a theorem of N N Bogoliubov. Ukrain. Math. Zhurn, 1959,11:220 ~ 222

17 Volosov V M. Averaging in systems of ordinary differential equations. *Russian Mathematical Surveys*, 1962,17(6): 1 ~ 126

18 Besjes J G. On the asymptotic methods for non-linear differential equations. *Journal De Mecanique*, 1969,8(3): 357 ~ 373

19 Stratonovich R L. Topics in the theory of random noise, New York, Gordon and Breach, 1963,1967,2

20 Khasminskii R. On stochastic processes defined by differential equations with a small parameter. *Theory of Probability & Its Applications*, 1966,11(2):211 ~ 228

21 Khasminskii R. A limit theorem for the solutions of differential equations with random right-hand sides. *Theory of Probability & Its Applications*, 1966,11(3):390 ~ 406

22 Khasminskii R Z. Principle of averaging for parabolic and elliptic differential equations and for Markov processes with small diffusion. *Theory of Probability & Its Applications*, 1963,8(1):1 ~ 21

23 Khasminskii R Z. On the principle of averaging the Ito stochastic differential equations. *Kibernetika*, 1968, 4: 260 ~ 279

24 Veretennikov A Y. On the averaging principle for systems of stochastic differential equations. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1991,69(1):271 ~ 284

25 Veretennikov A. Y. On large deviations in the averaging principle for SDEs with full dependence. *Annals of Probability*, 1999,27(1):284 ~ 296

26 Freidlin M I, Wentzell A D. Long-time behavior of weakly coupled oscillators. *Journal of Statistical Physics*, 2006, 123(6):1311 ~ 1337

27 Freidlin M I, Wentzell A D. Random perturbations of dynamical systems, Springer, 1998

28 Golec J, Ladde G. Averaging principle and systems of singularly perturbed stochastic differential equations. *Journal of Mathematical Physics*, 1990,31(5):1116 ~ 1123

29 Givon D, Kevrekidis I G, Kupferman R. Strong convergence of projective integration schemes for singular perturbed stochastic differential systems. *Communications in Mathematical Sciences*, 2006,4(4):707 ~ 729

30 Golec J. Stochastic averaging principle for systems with pathwise uniqueness. *Stochastic Analysis & Applications*, 1995,13(3):307 ~ 322

31 Zhu W Q. Stochastic averaging methods in random vibration. *ASME Applied Mechanics Reviews*, 1988, 41 (5): 189 ~ 199

32 Roberts J B, Sranos P D. Stochastic averaging: an approximate method of solving random vibration problems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1986,21 (2):111 ~ 134

33 Xu Y, Gu R C, Zhang H Q, Xu W, Duan J Q. Stochastic bifurcations in a bistable Duffing-Van der Pol oscillator with colored noise. *Physical Review E*, 2011, 83 (5): 056215

34 Xu Y, Guo R, Jia W T, Li J J. Stochastic averaging for a class of single degree of freedom systems with combined Gaussian noises. *Acta Mechanica*, 2014,225(9):2611 ~ 2620

35 Xu Y, Li Y, Zhang H, et al. The Switch in a genetic tog-

gle system with Lévy noise. *Scientific Reports*, 2016,6: 31505

36 Zeng Y, Zhu W Q. Stochastic averaging of quasi-non-integrable Hamiltonian systems under Poisson white noise excitation. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2011,78(2):856 ~ 875

37 曾岩. 非高斯随机激励下非线性系统的随机平均法[博士学位论文]. 杭州:浙江大学, 2010 (Zeng Y. Stochastic averaging method of nonlinear system under non-gaussian random excitations [PhD Thesis]. Hangzhou: Zhejiang University, 2010 (in Chinese))

38 Zeng Y, Zhu W Q. Stochastic averaging of n-dimensional non-linear dynamical systems subject to non-Gaussian wide-band random excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010,45(5):572 ~ 586

39 Zeng Y, Zhu W Q. Stochastic averaging of quasi-linear systems driven by Poisson white noise. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2010,25(1):99 ~ 107

40 Zeng Y, Zhu W Q. Stochastic averaging of strongly non-linear oscillators under poisson white noise excitation. *IUTAM Symposium on Nonlinear Stochastic Dynamics and Control*, 2011,29(2):147 ~ 155

41 Xu Y, Duan J, Xu W. An averaging principle for stochastic dynamical systems with Lévy noise. *Physica D*, 2011, 240(17):1395 ~ 1401

42 Xu Y, Pei B, Li Y G. Approximation properties for solutions to non-Lipschitz stochastic differential equations with Lévy noise. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2015,38 (11):2120 ~ 2131

43 Givon D. Strong convergence rate for two-time-scale jump-diffusion stochastic differential systems. *Siam Journal on Multiscale Modeling & Simulation*, 2007,6(2):577 ~ 594

44 Liu D. Strong convergence of principle of averaging for multiscale stochastic dynamical systems. *Communications in Mathematical Sciences*. 2010,8(4):999 ~ 1020

45 Liu D. Strong convergence rate of principle of averaging for jump-diffusion processes. *Frontiers of Mathematics in China*, 2012,7(2):305 ~ 320

46 Xu J, Miao Y. $L^p(p>2)$-strong convergence of an averaging principle for two-time-scales jump-diffusion stochastic differential equations. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2015,18:33 ~ 47

47 Thompson W, Kuske R, Monahan A. Stochastic averaging of dynamical systems with multiple time scales forced with α-stable noise. *Siam Journal on Multiscale Modeling & Simulation*, 2015,13(4):1194 ~ 1223

48 Backus D K, Zin S E. Long-memory inflation uncertainty: evidence from the term structure of interest rate. *Journal of Money Credit and Banking*, 1993,25(3):701 ~ 708

49 Rostek S. Option Pricing in Fractional Brownian Markets, Springer, Berlin, 2009

50 Granger C W, Joyeux R. An Introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 2010,1(1):15 ~ 29

51 Mandelbrot B B, Wallis J R. Some long-run properties of geophysical records. *Water Resources Research*, 1969,5(2):321 ~ 340

52 Peng C K, Havlin S V, et al. Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*, 1994,49(2):1685

53 Roche S, Bicout D, et al. Long range correlations in DNA: scaling properties and charge transfer efficiency. *Physical Review Letters*, 2003,91(22):228101

54 Maxim V, Sendur L, et al. Fractional Gaussian noise functional MRI and Alzheimer′s disease. *Neuroimage*, 2005,25(1):141 ~ 58.

55 Wink A M, Bernard F, et al. Age and cholinergic effects on hemodynamics and functional coherence of human hippocampus. *Neurobiology of Aging*, 2006,27(10):1395

56 Mandelbrot B B, Van Ness J W. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *Siam Review*, 1968,10(4):422 ~ 437

57 Xu Y, Guo R, et al. Stochastic averaging principle for dynamical systems with fractional Brownian motion. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 2014, 19(4):1197 ~ 1212

58 Xu Y, Pei B, Wu J L. Stochastic averaging principle for differential equations with non-Lipschitz coefficients driven by fractional Brownian motion. *Stochastics and Dynamics*, 2017,17:1750013

59 Xu Y, Pei B, Li Y G. An averaging principle for stochastic differential delay equations with fractional Brownian motion. *Abstract and Applied Analysis*, 2013,2014(1):1 ~ 10

60 Xu Y, Pei B, Guo R. Stochastic averaging for slow-fast dynamical systems with fractional Brownian motion. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 2015, 20(7):2257 ~ 2267

61 Xu Y, Guo R, et al. A limit theorem for the solutions of slow-fast systems with fractional Brownian motion. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2014,4(1):22 ~ 25

62 Lü Q F, Deng M L, Zhu W Q. Stochastic averaging of quasi integrable and resonant Hamiltonian systems excited by fractional Gaussian noise with Hurst index $1/2 < H < 1$. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2017,30(2):11 ~ 19

63 Deng M L, Zhu W Q. Responses of linear and nonlinear

oscillator to fractional Gaussian noise with Hurst index between 1/2 and 1. *Journal of Applied Mechanics*, 2015,82(10):101008

64 Deng M L, Zhu W Q. Stochastic averaging of quasi-non-integrable Hamiltonian systems under fractional Gaussian noise excitation. *Nonlinear Dynamics.*, 2016,83(1-2):1015 ~ 1027

65 Kats I, Krasovskii N. On the stability of systems with random parameters. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1960,24(5):1225 ~ 1246

66 Yin G, Yang H. Two-time-scale jump-diffusion models with Markovian switching regimes. *Stochastics and Stochastic Reports*, 2004,76(2):77 ~ 99

67 Yin G, Talafha Y, Xi F. Stochastic Liénard equations with random switching and two-time scales. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2014,43(7):1533 ~ 1547

68 Bao J, Yin G, Yuan C. Two-time-scale stochastic partial differential equations driven by alpha-stable noises: Averaging principles. *Bernoulli*, 2017,23(1):645 ~ 669

69 Huan R H, Zhu W, Ma F, et al. Stationary response of a class of nonlinear stochastic systems undergoing Markovian jumps. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2015, 82(5):051008

70 Huan R H, Zhu W Q, Ma F, et al. Asymptotic stability of a class of nonlinear stochastic systems undergoing Markovian jumps. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2016,45(5):13 ~ 21

71 Cerrai S. A khasminskii type averaging principle for stochastic reaction-diffusion equations. *Annals of Applied Probability*, 2008,19(3):899 ~ 948

72 Cerrai S, Freidlin M. Averaging principle for a class of stochastic reaction-diffusion equations. *Probability Theory & Related Fields*, 2009,144(1-2):137 ~ 177

73 Wang W, Roberts A J. Average and deviation for the stochastic FitzHugh-Nagumo system. *Australian & New Zealand Industrial & Applied Mathematics Journal*, 2008,50:292 ~ 307

74 Fu H, Duan J. An averaging principle for two time-scales stochastic partial differential equations. *Stochastic and Dynamics*, 2011,11:353 ~ 367.

75 Fu H, Liu J. Strong convergence in stochastic averaging principle for two time-scales stochastic partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2011,384(1):70 ~ 86

76 Xu J, Miao Y, Liu J. Strong averaging principle for slow-fast SPDEs with Poisson random measures. *Discrete and Continuous Dynamical Systems: B*, 2015,20(7):2233 ~ 2256

77 Xu J. L^p-strong convergence of the averaging principle for slow-fast SPDEs with jumps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017,445(1):342 ~ 373

78 Pei B, Xu Y, Wu J L. Two-time-scales hyperbolic-parabolic equations driven by Poisson random measures: Existence, uniqueness and averaging principles. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017,447(1):243 ~ 268

SOME RECENT DEVELOPMENTS OF STOCHASTIC AVERAGING PRINCIPLE *

Xu Yong† Pei Bin Xu Wei

(*Department of Applied Mathematics*, *Northwestern Polytechnical University*, *Xi'an* 710072, *China*)

Abstract Based on the recent research status and development trend of the stochastic averaging principle, we discussed the averaging principles with respect to non-Gaussian Lévy noise, fractional Gaussian noise and complex dynamics system with Markov switching.

Key words non-Gaussian Lévy noise, fractional Gaussian noise, Markov switching, stochastic complex dynamics system, stochastic averaging principle

Received 3 April 2017, revised 18 April 2017.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11372247, 11572247)

† Corresponding author E-mail: hsux3@nwpu.edu.cn