

一类不确定分数阶混沌系统同步的自适应滑模控制方法*

李特 袁建宝 吴莹[†]

(西安交通大学航天航空学院, 机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

摘要 针对一类系统不确定及受外界干扰的分数阶混沌系统, 本文首先将分数阶微积分应用到滑模控制中, 构造了一个具有分数阶积分项的滑模面. 针对系统不确定及外界干扰项, 基于分数阶 Lyapunov 稳定性理论与自适应控制方法, 设计了一种滑模控制器以及分数阶次的参数自适应律, 实现了两不确定分数阶混沌系统的同步控制, 并辨识出相应误差系统中不确定项及外界干扰项的边界. 在分数阶系统稳定性分析中使用的分数阶 Lyapunov 稳定性理论及相关函数都可以很好地运用到其它分数阶系统同步控制方法中. 最后数值仿真验证了所提控制方法的可行性与有效性.

关键词 系统不确定, 滑模控制, 分数阶自适应律, 分数阶 Lyapunov 稳定性理论

DOI: 10.6052/1672-6553-2016-026

引言

尽管分数阶微积分已经有超过三百年的历史了, 但将其应用到物理学和工程学的研究直到最近几十年才逐渐引起关注. 相对于传统的整数阶微积分, 分数阶微积分为描述各种物质和动态过程的记忆及遗传效应提供了有力的数学工具^[1]. 随着分数阶微积分的不断发展, 越来越多的研究发现利用分数阶导数能更准确地描述现实中的一些物理现象和动力学系统, 因此分数阶导数被广泛应用到众多学科研究及工程领域^[2-6]. 由于分数阶系统更容易稳定的特性, 近年来分数阶微积分已经被广泛地应用到系统控制中. 尤其在鲁棒性控制方面, 分数阶控制表现出更好的控制效果, 文献^[7]也证实分数阶控制器相较于传统控制器, 具有更好的抗干扰性及对外界变化的不敏感性.

混沌作为非线性动力学系统的一种特有运动形式, 在物理、化学、生物和信息科学等领域得到了广泛的研究, 许多研究已经证实将分数阶微积分引入到一些传统混沌系统中也能表现出混沌特性, 比如分数阶 Lorenz 系统^[8], 分数阶 Duffing 系统^[9], 分

数阶 Chua 电路^[10], 分数阶 Van der Pol 振荡器^[11]及分数阶 Chen 系统^[12]等等. 分数阶混沌系统作为整数阶混沌系统的推广, 其动力学特性不仅秉承了混沌系统几乎所有的特点, 还具有历史记忆效应、动力学特性与系统阶次密切相关等特点, 因此分数阶混沌系统具有比整数阶混沌系统更加复杂的动力学行为.

近年来, 分数阶混沌系统的同步控制在保密通信、信号处理和系统控制及其它领域得到了广泛关注和研究, 具有比整数阶混沌系统更突出的应用前景和发展前途. 目前已经有一些同步控制方法, 比如非线性反馈控制^[13-14]、主动控制^[15]、分数阶控制器^[16]、最优化控制^[17]、自适应控制^[18-19]及滑模控制^[20-22]等都被成功应用到分数阶混沌系统的同步问题中. 但需要指出, 上述控制方法中大多都忽略了系统不确定性及外界环境的干扰, 而这些因素在实际工程系统中是不可避免的. 但自适应控制可以克服系统参数未知或不确定性, 滑膜控制则具有良好的鲁棒性和抗干扰能力, 因此这两种控制方法在分数阶非线性系统中的应用研究更具有实际意义^[23-24].

2015-11-30 收到第1稿, 2016-03-20 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(11272242, 11472202)和陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(S2014JC12575)

[†] 通讯作者 E-mail: wuying36@163.com.

目前,混沌同步研究中最常见的方法是直接研究驱动-响应混沌系统对应的误差系统的稳定性,这样就将同步问题转变成稳定性问题来研究.因此,分数阶混沌系统的同步往往与其误差系统的稳定性密切相关.近年来,关于分数阶混沌系统同步控制的研究^[22-30]大多都是基于传统的 Lyapunov 稳定性理论,通过对受控分数阶误差系统进行稳定性判断,从而实现驱动-响应系统的同步控制.然而,文献[31]中指出利用传统的 Lyapunov 稳定性理论在论证分数阶系统轨迹对滑模面的收敛性时是不恰当的,而利用分数阶稳定性理论会更合适.最近,文献[32-33]提出了针对分数阶非线性系统的 Mittag-Leffler 稳定性理论及分数阶 Lyapunov 方法,为分析分数阶混沌系统同步控制的稳定性提供了潜在的有效方法.

在上述文献研究的基础上,本文主要研究了基于自适应滑模控制的不确定分数阶混沌系统同步问题.首先将分数阶微积分应用到滑模控制中,构造了一个具有分数阶积分项的滑模面,并利用分数阶非线性系统 Mittag-Leffler 稳定性理论证明了对应的滑模运动模态的稳定性.针对系统不确定及外界干扰项,基于分数阶 Lyapunov 稳定性理论与自适应控制方法,设计了一种滑模控制器以及分数阶次的参数自适应律,实现了两分数阶混沌系统的同步控制,并辨识出相应误差系统中不确定项及外界干扰项的边界.通过理论分析和数值模拟仿真验证了所设计的控制器的有效性和可行性.

1 预备知识

1.1 分数阶混沌系统与同步问题描述

考虑含不确定性及干扰项的分数阶混沌系统如下:

$$D_t^q x = f(x) + \Delta f(x) + c(t), \quad 0 < q < 1 \quad (1)$$

其中, D_t^q 是分数阶微分算子, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是系统(1)的状态向量, $f(x)$ 为系统的非线性项, $\Delta f(x)$ 为系统不确定性项, $c(t)$ 为外界干扰项.

将系统(1)看作驱动系统,则对应的响应系统可表示为:

$$D_t^q y = g(y) + \Delta g(y) + d(t) + u(t), \quad 0 < q < 1 \quad (2)$$

其中, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 是系统(2)的状态向

量, $g(y)$ 为系统的非线性项, $\Delta g(y)$ 为系统不确定性项, $d(t)$ 为外界干扰项, $u(t)$ 为控制输入.

为了提出新的设计理论和方法,需要做如下的假设:

假设 1 假设 $\Delta f(x)$ 、 $\Delta g(y)$ 、 $c(t)$ 及 $d(t)$ 均为有界函数,并且存在合适的正常数 μ 和 σ 满足:

$$|\Delta g(y) - \Delta f(x)| \leq \sigma \quad \text{and} \quad |d(t) - c(t)| \leq \mu \quad (3)$$

其中, μ 和 σ 均为未知正常数.

我们定义如果存在一个控制输入 $u(t)$ 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0 \quad (4)$$

其中 $e(t) = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ 为驱动系统与响应系统的状态误差,那么就可以说明驱动系统(1)和响应系统(2)实现了同步.因此,我们就将两混沌系统的同步问题转化为误差系统的稳定性问题,即利用控制函数 $u(t)$ 使误差 $e(t)$ 趋于 0. 由驱动系统(1)和响应系统(2)可以得到误差系统为:

$$D_t^q e = g(y) - f(x) + \Delta g(y) - \Delta f(x) + d(t) - c(t) + u(t) \quad (5)$$

本文主要针对误差系统(5)设计合适的控制器方案,通过判断误差系统(5)的稳定性来实现驱动系统(1)和响应系统(2)的同步控制.

1.2 分数阶微积分概述

定义 1 函数 $f(t)$ 的分数阶积分式定义^[34]为:

$$I_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (6)$$

其中 $t_0 \geq 0$, $\alpha > 0$, 且 $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数.

定义 2 函数 $f(t)$ 的 Caputo 分数阶导数定义^[34]为:

$${}_t^c D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \end{cases} \quad (7)$$

由于 Caputo 分数阶微分定义的拉普拉斯变换所需初值与整数阶微积分的拉普拉斯变换相同,其几何和物理意义明确,在工程实际等广泛应用.因此下文中均采用 Caputo 定义.

与指数函数 e^t 在整数阶微分方程中的作用相似, Mittag-Leffler 函数在分数阶微积分中同样具有相当重要的作用.

定义3 双参数的 Mittag-Leffler 函数^[35] 可以表示为:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \quad (8)$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, z \in C$.

当 $\beta = 1$ 时, $E_{\alpha}(z) = E_{\alpha,1}(z)$. 特别地, $E_{1,1}(z) = e^z$.

考虑上述双参数, Mittag-Leffler 函数的拉普拉斯变换可以表示为:

$$L\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} + \lambda}, \quad (\text{Re}(s) > |\lambda| \frac{1}{\alpha}) \quad (9)$$

其中, t 和 s 分别为时域和频域变量, $\text{Re}(s)$ 为 s 的实数部分.

引理1^[33] 假设 $x = 0$ 是分数阶系统 $D_t^{\alpha}x = f(x, t)$ 的平衡点, 如果该系统的解满足:

$$\|x(t)\| \leq \{m[x(t_0)]E_{\alpha}(-\lambda(t-t_0)^{\alpha})\}^b \quad (10)$$

那么, 我们认为该系统的解是 Mittag-Leffler 稳定 (渐近稳定) 的.

其中, $\lambda > 0, b > 0, \alpha \in (0, 1)$, 且 $m(x) \geq 0$ 在 $x \in R^n$ 上满足 Lipschitz 条件.

引理2^[36] 设分数阶系统 $D_t^{\alpha}x = f(x, t)$ 的平衡点是 $x = 0$, 令 $D \subset R^n$ 是原点的某个值域. 假设存在一个连续可微函数 $V(x, t): [0, \infty) \times D \rightarrow R^+$ 和 K 类函数 γ 使之满足:

$$\begin{aligned} V(x, t) &\geq \gamma(\|x\|), \\ D^{\alpha}V(x, t) &\leq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $x \in D, \alpha < 1$. 如果 $D = R^n$, 那么该系统在 $x_{eq} = 0$ 处是渐近稳定的.

引理3^[37] 令 $x(t) \in R$ 为一个连续且可导的函数. 则对于任意时刻 $t \geq t_0$, 都有:

$$\frac{1}{2} {}_t_0^c D_t^q x^2(t) \leq x(t) {}_t_0^c D_t^q x(t), \quad \forall q \in (0, 1) \quad (12)$$

引理4^[38] 假设 $x(t) \in C^1[a, b]$, 如果对于所有 $t \in [a, b]$ 都满足 $D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)) \geq 0$, 那么 $x(t)$ 对于 $0 < \alpha < 1$ 是单调非递减的; 如果满足 $D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)) \leq 0$, 那么 $x(t)$ 对于 $0 < \alpha < 1$ 是单调非递增的.

2 同步控制器设计及稳定性分析

2.1 滑模面设计及稳定性分析

为了针对误差系统(5)设计合适的滑模控制

器, 我们首先构造一个具有分数阶积分项的滑模面如下:

$$s_i(t) = e_i(t) + I_t^q a_i e_i(t) \quad (13)$$

其中, a_i 为正常数, $0 < q < 1, i = 1, 2, \dots, n$. 这里, 我们对滑模面 $s_i(t)$ 关于时间取 q 阶分数阶导数如下:

$$D^q s_i(t) = D^q e_i(t) + a_i e_i(t) \quad (14)$$

当误差系统(5)在滑模面运动时, 滑模面及其分数阶导数需要满足:

$$s_i(t) = 0, D^q s_i(t) = 0 \quad (15)$$

依据上述滑模面可达条件, 我们可以得到对应的滑模运动模式如下:

$$D^q e_i(t) = -a_i e_i(t) \quad (16)$$

这里, 我们需要证明滑模运动模式(16)的渐近稳定性, 以此保证从任意初值出发的受控误差系统(5)的轨迹在到达滑模面后渐近收敛到滑模面 $s(t) = 0$.

定理1 滑模运动模式(16)是渐近稳定的, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 处在滑模面上的误差系统(5)的状态变量及轨迹也将渐近收敛到零点.

证明: 选择如下形式的 Lyapunov 函数:

$$V_1(t) = \sum_{i=1}^n |e_i(t)| \quad (17)$$

对式(17)两边同时取 q 阶分数阶导数, 可以得到:

$$D^q V_1(t) = D^q \sum_{i=1}^n |e_i(t)| \quad (18)$$

根据文献[39]中的结论, 我们可以得到:

$$D^q V_1(t) = D^q \sum_{i=1}^n |e_i(t)| \leq \sum_{i=1}^n \text{sgn}(e_i(t)) D^q e_i(t) \quad (19)$$

将式(16)代入式(19)中, 可以得到:

$$\begin{aligned} D^q V_1(t) &\leq \sum_{i=1}^n \text{sgn}(e_i(t)) (-a_i e_i(t)) \leq \\ &-\lambda \sum_{i=1}^n |e_i(t)| = -\lambda V_1(t) \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $\lambda = \min_{1 \leq i \leq n} \{a_1, a_2, \dots, a_n\} > 0$. 根据式(20)所得结果, 我们可以假设存在一个非负函数 $M(t)$ 满足如下等式:

$$D^q V_1(t) + \lambda V_1(t) + M(t) = 0 \quad (21)$$

对式(21)进行拉普拉斯变换, 可以得到:

$$s^q V_1(s) - s^{q-1} V_1(0) + \lambda V_1(s) + M(s) = 0 \quad (22)$$

其中, $V_1(s) = L\{V_1(t)\}, M(s) = L\{M(t)\}$. 对式

(22)化简可得:

$$V_1(s) = \frac{s^{q-1}V_1(0) - M(s)}{s^q + \lambda} \quad (23)$$

进一步对式(23)进行拉普拉斯逆变换,可以得到:

$$V_1(t) = V_1(0)E_q(-\lambda t^q) - M(t) * [t^{q-1}E_{q,q}(\lambda t^q)] \quad (24)$$

由于 $M(t)$ 和 $t^{q-1}E_{q,q}(\lambda t^q)$ 均为非负函数,式(24)可简化近似为:

$$V_1(t) \leq V_1(0)E_q(-\lambda t^q) \quad (25)$$

由引理 1 可以得到滑模运动模态(16)是渐近稳定的,当 $t \rightarrow \infty$ 时,处在滑模面上的误差系统(5)的状态变量及轨迹也将渐近收敛到零点,即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0$.

2.2 同步控制器设计及稳定性分析

由于在工程等实际应用中,系统不确定性项 $\Delta f(x)$ 、 $\Delta g(y)$ 及外界干扰 $c(t)$ 、 $d(t)$ 均为边界未知的,这里我们利用自适应控制法来解决这一问题.根据假设 1,为了使误差系统(5)的运动轨迹收敛到所设计的滑模面并始终停留在滑模面上,我们设计的自适应滑模控制器如下:

$$u_i = f_i(x) - g_i(y) - a_i e_i - (\hat{k}_i + \hat{\sigma}_i + \hat{\mu}_i) \operatorname{sgn}(s_i) - \hat{l}_i s_i, \quad (26)$$

其中,参数 \hat{k}_i 、 \hat{l}_i 、 $\hat{\sigma}_i$ 及 $\hat{\mu}_i$ 均未知,因此采用分数阶自适应率,即:

$$D^q \hat{k}_i = \xi_1 |s_i|, \quad D^q \hat{l}_i = \xi_2 s_i^2 \quad (27)$$

$$D^q \hat{\sigma}_i = \xi_3 |s_i|, \quad D^q \hat{\mu}_i = \xi_4 |s_i| \quad (28)$$

其中 \hat{k}_i 、 \hat{l}_i 、 $\hat{\sigma}_i$ 及 $\hat{\mu}_i$ 分别为 k_i 、 l_i 、 σ_i 及 μ_i 的评估值, ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 及 ξ_4 均为大于零的常数,且 $0 < q < 1$.

定理 2 基于假设 1 和滑模面方程(13),受控误差系统(5)在滑模控制器(26)和自适应率(27)、(28)的控制作用下,其运动轨迹将在有限时间内渐近地收敛到滑模面.

我们选择如下形式的 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i)^2 + \frac{1}{2\xi_1} \sum_{i=1}^n (\bar{k}_i)^2 + \frac{1}{2\xi_2} \sum_{i=1}^n (\bar{l}_i)^2 + \frac{1}{2\xi_3} \sum_{i=1}^n (\bar{\sigma}_i)^2 + \frac{1}{2\xi_4} \sum_{i=1}^n (\bar{\mu}_i)^2 \quad (29)$$

其中, $\bar{k} = \hat{k} - k$, $\bar{l} = \hat{l} - l$, $\bar{\sigma} = \hat{\sigma} - \sigma$ 及 $\bar{\mu} = \hat{\mu} - \mu$.

显然上述 Lyapunov 函数 V 满足引理 2 中的条件.利用引理 3,对式(29)关于时间取 q 阶分数阶导数可得:

$$\begin{aligned} D_t^q V &\leq \sum_{i=1}^n s_i D_t^q s_i + \frac{1}{\xi_1} \sum_{i=1}^n (\bar{k}_i) D_t^q \bar{k}_i + \\ &\frac{1}{\xi_2} \sum_{i=1}^n (\bar{l}_i) D_t^q \bar{l}_i + \frac{1}{\xi_3} \sum_{i=1}^n (\bar{\sigma}_i) D_t^q \bar{\sigma}_i + \\ &\frac{1}{\xi_4} \sum_{i=1}^n (\bar{\mu}_i) D_t^q \bar{\mu}_i = \\ &\sum_{i=1}^n s_i (D_t^q e_i + a_i e_i) + \sum_{i=1}^n (\bar{k}_i) |s_i| + \\ &\sum_{i=1}^n (\bar{l}_i) s_i^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{\sigma}_i) |s_i| + \sum_{i=1}^n (\bar{\mu}_i) |s_i| = \\ &\sum_{i=1}^n s_i \cdot (g_i(y_i) - f_i(x_i) + \Delta g_i(y_i) - \\ &\Delta f_i(x_i) + d_i - c_i + u_i + a_i e_i) + \sum_{i=1}^n (\bar{k}_i) |s_i| + \\ &\sum_{i=1}^n (\bar{l}_i) s_i^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{\sigma}_i) |s_i| + \sum_{i=1}^n (\bar{\mu}_i) |s_i| \end{aligned} \quad (30)$$

将控制器(26)代入到上式(30)中,可以得到:

$$\begin{aligned} D_t^q V &\leq \sum_{i=1}^n s_i \left[\Delta g_i(y_i) - \Delta f_i(x_i) + d_i - c_i - \right. \\ &\left. (\hat{k}_i + \hat{\sigma}_i + \hat{\mu}_i) \operatorname{sgn}(s_i) - \hat{l}_i s_i \right] + \sum_{i=1}^n (\bar{k}_i) |s_i| + \\ &\sum_{i=1}^n (\bar{l}_i) s_i^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{\sigma}_i) |s_i| + \sum_{i=1}^n (\bar{\mu}_i) |s_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n s_i [\sigma + \mu - (\hat{k}_i + \hat{\sigma}_i + \hat{\mu}_i) \operatorname{sgn}(s_i) - \\ &\hat{l}_i s_i] + \sum_{i=1}^n (\bar{k}_i) |s_i| + \sum_{i=1}^n (\bar{l}_i) s_i^2 + \\ &\sum_{i=1}^n (\bar{\sigma}_i) |s_i| + \sum_{i=1}^n (\bar{\mu}_i) |s_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\sigma + \mu) |s_i| - \sum_{i=1}^n (\hat{k}_i + \hat{\sigma}_i + \hat{\mu}_i) |s_i| - \\ &\sum_{i=1}^n \hat{l}_i s_i^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{k}_i) |s_i| + \sum_{i=1}^n (\bar{l}_i) s_i^2 + \\ &\sum_{i=1}^n (\bar{\sigma}_i) |s_i| + \sum_{i=1}^n (\bar{\mu}_i) |s_i| \end{aligned} \quad (31)$$

将上式(31)化简得到:

$$\begin{aligned} D_t^q V &\leq \sum_{i=1}^n (\sigma + \mu) |s_i| - \sum_{i=1}^n (\hat{k}_i + \hat{\sigma}_i + \hat{\mu}_i) |s_i| - \\ &\sum_{i=1}^n \hat{l}_i s_i^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{k}_i) |s_i| + \sum_{i=1}^n (\bar{l}_i) s_i^2 + \\ &\sum_{i=1}^n (\bar{\sigma}_i) |s_i| + \sum_{i=1}^n (\bar{\mu}_i) |s_i| = \\ &- \sum_{i=1}^n l_i s_i^2 - \sum_{i=1}^n k_i |s_i| \\ &\leq -\rho - \sum_{i=1}^n k_i |s_i| \end{aligned}$$

$$\leq -\rho \leq 0. \quad (32)$$

其中, $\rho = \sum_{i=1}^n l_i s_i^2 > 0$. 由引理2中分数阶 Lyapunov 稳定性理论可以得出, 在滑模控制器(26)及自适应率(27)、(28)的作用下, 从任意初值出发的受控误差系统(5)的运动轨迹在有限时间内都将到达滑模面上, 且到达滑模面上的轨迹在有限时间内将收敛到原点, 由此说明驱动系统(1)和响应系统(2)实现了同步. 为了说明系统的运动轨迹是在有限时间内到达滑模面的, 这里我们将计算出到达滑模面的时间.

根据式(32)所得结果, 我们可以假设存在一个非负函数 $M(t)$ 满足如下等式:

$$D^q V(t) + \rho + M(t) = 0 \quad (33)$$

对式(33)两边进行拉普拉斯变换, 可以得到:

$$s^q V(s) - s^{q-1} V(0) + \rho \frac{1}{s} + M(s) = 0 \quad (34)$$

其中, $V(s) = L\{V(t)\}$, $M(s) = L\{M(t)\}$. 对式(34)变形可得:

$$V(s) = \frac{1}{s} V(0) - \rho \frac{1}{s^{q+1}} - \frac{M(s)}{s^q} \quad (35)$$

进一步对式(35)进行拉普拉斯逆变换, 可以得到:

$$V(t) = V(0) - \frac{\rho t^q}{\Gamma(q+1)} - \int_0^t (t-\tau)^{q-1} M(\tau) d\tau \quad (36)$$

由于 $\int_0^t (t-\tau)^{q-1} M(\tau) d\tau \geq 0$, 式(36)可简化近似为:

$$\frac{\rho t^q}{\Gamma(q+1)} \leq V(0) - V(t) \quad (37)$$

根据引理4可知, 函数 $V(t)$ 时单调非递增的, 我们可以得到 $V(0) - V(t) \geq 0$. 因此, 由上述不等式(37)可以得到

$$t \leq \sqrt[q]{\frac{(V(0) - V(t)) \Gamma(q+1)}{\rho}} \quad (38)$$

从上述不等式(38)可以清楚地得到, 受控误差系统(5)的运动轨迹是在有限时间内到达滑模面的.

3 数值仿真

为了验证所提理论结果的正确性和有效性, 我们分别选取分数阶 Chen 系统、分数阶 Lorenz 系统及分数阶 Liu 系统进行数值模拟, 利用本文所提出的分数阶自适应滑模控制器, 在系统含不确定性及

外界干扰的情况下, 分别实现相同分数阶混沌系统及不同分数阶混沌系统之间的同步.

3.1 分数阶 Chen 系统的自适应滑模控制同步

含系统不确定性项及外界干扰的分数阶 Chen 系统表示为:

$$\begin{aligned} D^q x_1 &= a(x_2 - x_1) + \Delta f_1 + c_1, \\ D^q x_2 &= (c - a)x_1 - x_1 x_3 + cx_2 + \Delta f_2 + c_2, \\ D^q x_3 &= x_1 x_2 - bx_3 + \Delta f_3 + c_3 \end{aligned} \quad (39)$$

其中, $a = 35, b = 3, c = 28, 0 < q < 1$. 上述系统中不确定性项及干扰项函数分别假定为 $\Delta f_1 = 0.1 \sin(x_1) \sin(x_2)$, $c_1 = 0.2 \cos t$, $\Delta f_2 = 0.2 \sin(x_1) \cos(x_2)$, $c_2 = -0.2 \sin(2t)$, $\Delta f_3 = 0.1 \cos(x_1) \cos(x_3)$, $c_3 = 0.3 \sin(3t)$. 将系统(39)作为驱动系统, 则对应的响应系统为:

$$\begin{aligned} D^q y_1 &= a(y_2 - y_1) + \Delta g_1 + d_1 + u_1, \\ D^q y_2 &= (c - a)y_1 - y_1 y_3 + cy_2 + \Delta g_2 + d_2 + u_2, \\ D^q y_3 &= y_1 y_2 - by_3 + \Delta g_3 + d_3 + u_3 \end{aligned} \quad (40)$$

其中, 系统不确定性项及外界干扰项函数分别假定为 $\Delta g_1 = 0.3 \sin(y_1) \cos(y_2)$, $d_1 = 0.2 \sin(3t)$, $\Delta g_2 = 0.1 \cos(y_1) \cos(y_3)$, $d_2 = 0.3 \cos t$, $\Delta g_3 = 0.2 \sin(y_2) \sin(y_3)$, $d_3 = -0.1 \cos(5t)$, u_1, u_2, u_3 分别为控制函数(26)的形式.

则误差系统可以表示为:

$$\begin{aligned} D^q e_1 &= a(e_2 - e_1) + \Delta g_1 - \Delta f_1 + d_1 - c_1 + u_1, \\ D^q e_2 &= (c - a)e_1 + ce_2 - x_1 e_3 - y_3 e_1 + \Delta g_2 - \Delta f_2 + d_2 - c_2 + u_2, \\ D^q e_3 &= x_1 e_2 + y_2 e_1 - be_3 + \Delta g_3 - \Delta f_3 + d_3 - c_3 + u_3 \end{aligned} \quad (41)$$

选取分数阶次为 $q = 0.95$, 驱动系统(39)的状态变量初始值取为 $x_1(0) = -0.5, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0.1$; 响应系统(40)的变量初始值取为 $y_1(0) = 0.2, y_2(0) = -0.5, y_3(0) = 0.8$; 控制器参数初值取为 $\hat{k}_i(0) = 3, \hat{l}_i(0) = 3, \hat{\sigma}_i(0) = 3, \hat{\mu}_i(0) = 3, i = 1, 2, 3; \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 2$, 时间步长为 $h = 0.001$, 采用分数阶微分方程预估-校正法^[40]进行数值仿真, 在 $t = 5s$ 时加入控制, 仿真结果如图1和图2所示.

从数值模拟结果可以看出, 在 $t = 5s$ 时加入控制后, e_1, e_2, e_3 在较短的时间内很快趋近于零, 滑模面函数 $s_i(t)$ 也很快地趋近于零, 各控制器参数也趋近于某一定值, 表明受控误差系统(41)的状态

变量在所设计控制器(26)的作用下,很快地渐近收敛到零点并保持稳定.结果表明在系统含不确定性及外界干扰的情况下,驱动系统(39)和响应系统(40)能够实现同步,所提出的方法取得了较好的控制效果.

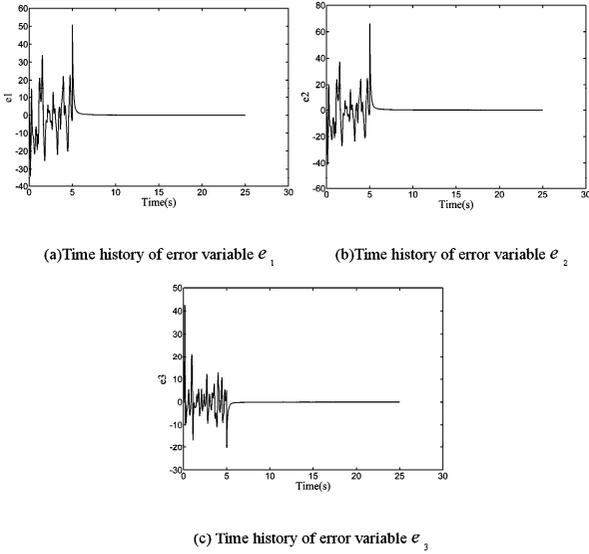


图1 误差系统(41)同步误差随时间的变化

Fig. 1 Timehistory of synchronized errors of the error system (41)

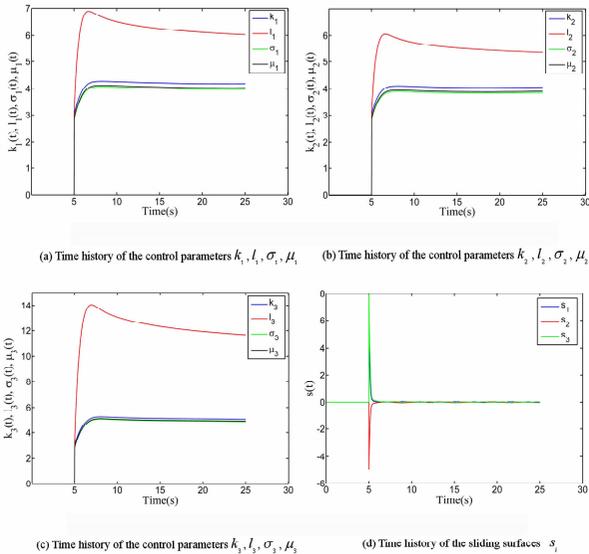


图2 误差系统(41)各参数及滑模面函数随时间的变化

Fig. 2 Time history of the control parameters and sliding surfaces of the error system (41)

3.2 分数阶 Lorenz 系统与分数阶 Liu 系统的自适应滑模控制同步

含系统不确定性项及外界干扰的分数阶 Lorenz 系统表示为:

$$D^q x_1 = -a(x_1 - x_2) + \Delta f_1 + c_1,$$

$$D^q x_2 = rx_1 - x_2 - x_1 x_3 + \Delta f_2 + c_2,$$

$$D^q x_3 = -bx_3 + x_1 x_2 + \Delta f_3 + c_3. \quad (42)$$

其中, $a = 10, r = 28, b = 8/3, 0 < q < 1$. 上述系统中不确定性项及外界干扰项函数分别假定为 $\Delta f_1 = 0.1 \sin(x_1) \sin(x_2), c_1 = 0.2 \cos t, \Delta f_2 = 0.2 \sin(x_1) \cos(x_2), c_2 = -0.2 \sin(2t), \Delta f_3 = 0.1 \cos(x_1) \cos(x_3), c_3 = 0.3 \sin(3t)$. 将系统(42)作为驱动系统,而响应系统则采用含系统不确定性项及外界干扰的分数阶 Liu 系统,有:

$$D^q y_1 = a(y_2 - y_1) + \Delta g_1 + d_1 + u_1,$$

$$D^q y_2 = by_1 - y_1 y_3 + \Delta g_2 + d_2 + u_2,$$

$$D^q y_3 = -cy_3 + dy_1^2 + \Delta g_3 + d_3 + u_3 \quad (43)$$

其中, $a = 10, b = 40, c = 2.5, d = 4, 0 < q < 1$. 上述系统中不确定性项及干扰项函数分别假定为 $\Delta g_1 = 0.3 \sin(y_1) \cos(y_2), d_1 = 0.2 \sin(3t), \Delta g_2 = 0.1 \cos(y_1) \cos(y_3), d_2 = 0.3 \cos t, \Delta g_3 = 0.2 \sin(y_2) \sin(y_3), d_3 = -0.1 \cos(5t), u_1, u_2, u_3$ 分别为控制函数(26)的形式.

则误差系统表示为:

$$D^q e_1 = 10e_2 - 10e_1 + \Delta g_1 - \Delta f_1 + d_1 - c_1 + u_1,$$

$$D^q e_2 = 40y_1 - y_1 y_3 - 28x_1 + x_1 x_3 + x_2 + \Delta g_2 - \Delta f_2 + d_2 - c_2 + u_2,$$

$$D^q e_3 = -2.5y_3 + 4y_1^2 - x_1 x_2 + (8/3)x_3 + \Delta g_3 - \Delta f_3 + d_3 - c_3 + u_3 \quad (44)$$

选取分数阶次为 $q = 0.9$, 驱动系统(42)的变量初始值取为 $x_1(0) = -0.5, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0.1$; 响应系统(43)的变量初始值取为 $y_1(0) = 0.2, y_2(0) = -0.4, y_3(0) = 0.6$; 控制器参数初值取为 $\hat{k}_i(0) = 2, \hat{l}_i(0) = 2, \hat{\sigma}_i(0) = 2, \hat{\mu}_i(0) = 2, i = 1, 2, 3; \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 2$, 时间步长为 $h = 0.001$, 采用分数阶微分方程预估-校正法进行数值仿真, 在 $t = 5s$ 时加入控制, 仿真结果如图3和图4所示.

从数值模拟结果可以看到, 在 $t = 5s$ 时加入控制后, 误差变量 e_1, e_2, e_3 在较短的时间内很快趋近于零, 滑模面函数 $s_i(t)$ 也很快地趋近于零, 各控制参数也趋近于某一定值, 表明受控误差系统(44)的状态变量在所设计控制器(26)的作用下, 很快地渐近收敛到零点并保持稳定. 结果表明在系统含不确定性及外界干扰的情况下, 分数阶 Lorenz 系统(42)和分数阶 Liu 系统(43)能够实现同步, 所提

出的方法取得了较好的控制效果.

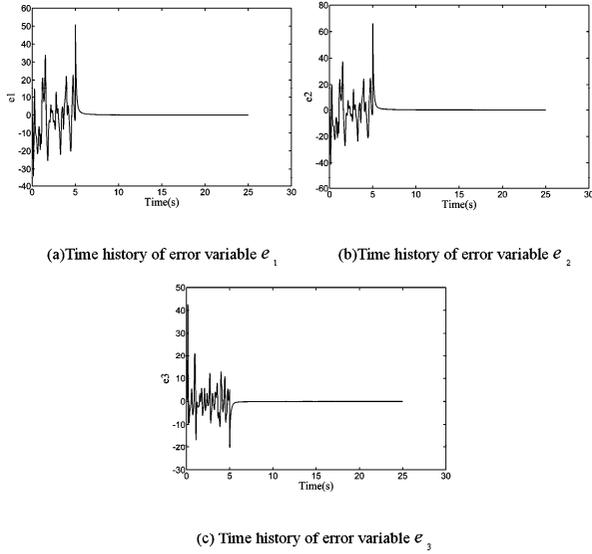


图3 误差系统(44)的同步误差随时间的变化

Fig. 3 Time history of synchronized errors of the error system (44)

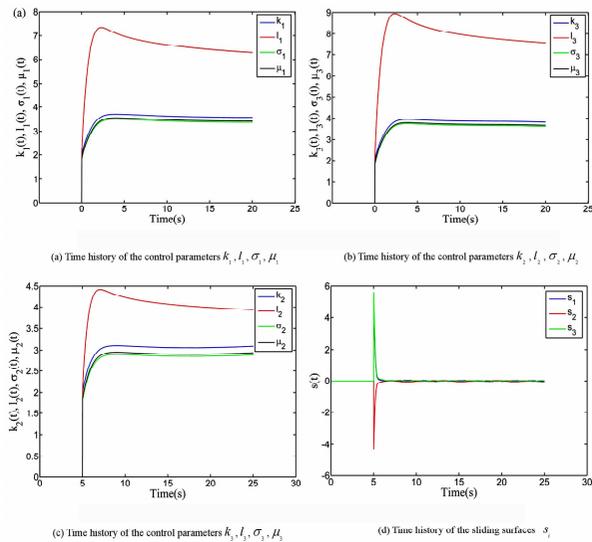


图4 误差系统(44)各参数及滑模面函数随时间的变化

Fig. 4 Time history of the control parameters and sliding surfaces of the error system (44)

4 结论

本文基于分数阶 Lyapunov 稳定性理论,设计了一种滑模同步控制器和分数阶参数自适应律,实现了含系统不确定项及外界干扰项的分数阶混沌系统的同步,并辨识出相应误差系统中不确定项及外界干扰项的边界.所提出的控制器针对不确定分数阶混沌系统,具有较好的同步控制效果和较强的抗干扰能力.文中构造的具有分数阶积分项的滑模面为分数阶混沌系统的滑模控制研究提供了一

定的参考价值.同时,在分数阶系统稳定性分析中使用的分数阶 Lyapunov 稳定性理论及相关函数也可以很好地运用到其它分数阶系统同步控制方法中.

参 考 文 献

- Petráš I. A note on the fractional-order cellular neural networks. In: The 2006 IEEE International Joint Conference on Neural Network Proceedings. Vancouver, Canada, IEEE, 2006:1021 ~ 1024
- Bagley R L, Calico R A. Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1991, 14 (2): 304 ~ 311
- Sun H H, Abdelwahab A A, Onaral B. Linear approximation of transfer function with a pole of fractional power. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, 29(5): 441 ~ 444
- Dadras S, Momeni H R. Control of a fractional-order economical system via sliding mode. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2010, 389(12): 2434 ~ 2442
- Engheia N. On the role of fractional calculus in electromagnetic theory. *Antennas and Propagation Magazine*, 1997, 39(4): 35 ~ 46
- Metzler R, Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, 2000, 339(1): 1 ~ 77
- Tavazoei M S, Haeri M. Chaos control via a simple fractional-order controller. *Physics Letters A*, 2008, 372(6): 798 ~ 807
- Grigorenko I, Grigorenko E. Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system. *Physical Review Letters*, 2003, 91(3): 034101
- Gao X, Yu J. Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 24(4): 1097 ~ 1104
- Petráš I. A note on the fractional-order Chua's system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 38(1): 140 ~ 147
- Tavazoei M S, Haeri M, Attari M, et al. More details on analysis of fractional-order van der Pol oscillator. *Journal of Vibration and Control*, 2009, 15(6): 803 ~ 819
- Lu J G, Chen G. A note on the fractional-order Chen system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, 27(3): 685 ~ 688
- Chen M, Han Z. Controlling and synchronizing chaotic

- Genesio system via nonlinear feedback control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, 17(4):709 ~ 716
- 14 Chen B M, Lee T H, Peng K, et al. Composite nonlinear feedback control for linear systems with input saturation; theory and an application. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(3):427 ~ 439
 - 15 Radwan A G, Moaddy K, Salama K N, et al. Control and switching synchronization of fractional order chaotic systems using active control technique. *Journal of Advanced Research*, 2014, 5(1):125 ~ 132
 - 16 Mahmoudian M, Ghaderi R, Ranjbar A, et al. Synchronization of fractional-order chaotic system via adaptive PID controller. *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications. Springer Netherlands*, 2010:445 ~ 452
 - 17 Kamocki R. On the existence of optimal solutions to fractional optimal control problems. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 235:94 ~ 104
 - 18 Ladaci S, Charef A. On fractional adaptive control. *Nonlinear Dynamics*, 2006, 43(4):365 ~ 378
 - 19 Shi B, Yuan J, Dong C. On fractional model reference adaptive control. *The Scientific World Journal*, 2014, 7:521625
 - 20 Razminia A, Baleanu D. Complete synchronization of commensurate fractional order chaotic systems using sliding mode control. *Mechatronics*, 2013, 23(7):873 ~ 879
 - 21 Yin C, Dadras S, Zhong S, et al. Control of a novel class of fractional-order chaotic systems via adaptive sliding mode control approach. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(4):2469 ~ 2483
 - 22 Dadras S, Momeni H R. Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(1):367 ~ 377
 - 23 Yin C, Zhong S, Chen W. Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(1):356 ~ 366
 - 24 Faieghi M R, Delavari H, Baleanu D. A note on stability of sliding mode dynamics in suppression of fractional-order chaotic systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 2013, 66(5):832 ~ 837
 - 25 Delavari H. A novel fractional adaptive active sliding mode controller for synchronization of non-identical chaotic systems with disturbance and uncertainty. *International Journal of Dynamics and Control*, 2015:1 ~ 13
 - 26 曹鹤飞,张若洵. 基于滑模控制的分数阶混沌系统的自适应同步. *物理学报*, 2011, 60(5):121 ~ 125 (Cao H F, Zhang R X. Adaptive synchronization of fractional-order chaotic system via sliding mode control. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(5):121 ~ 125 (in Chinese))
 - 27 潘光,魏静. 一种分数阶混沌系统同步的自适应滑模控制器设计. *物理学报*, 2015, 64(4):40505 ~ 40505 (Pan G, Wei J. Design of an adaptive sliding mode controller for synchronization of fractional-order chaotic systems. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(4):40505 ~ 40505 (in Chinese))
 - 28 Yuan J, Shi B, Ji W. Adaptive sliding mode control of a novel class of fractional chaotic systems. *Advances in Mathematical Physics*, 2013, (4):594 ~ 603
 - 29 Lin J S, Yan J J. Adaptive synchronization for two identical generalized Lorenz chaotic systems via a single controller. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10(2):1151 ~ 1159
 - 30 Tian X, Fei S, Chai L. Adaptive control of a class of fractional-order nonlinear complex systems with dead-zone nonlinear inputs. In: The 33rd Chinese Control Conference, Nanjing, China, IEEE, 2014: 1899 ~ 1904
 - 31 Chen L, Wu R, He Y, et al. Adaptive sliding-mode control for fractional-order uncertain linear systems with nonlinear disturbances. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 80(1 - 2):51 ~ 58
 - 32 Li Y, Chen Y Q, Podlubny I. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 2009, 45(8):1965 ~ 1969
 - 33 Li Y, Chen Y Q, Podlubny I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, 59(5):1810 ~ 1821
 - 34 Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam; Elsevier Science Limited, 2006
 - 35 Podlubny I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Pittsburgh: Academic Press, 1998
 - 36 Zhang F, Li C, Chen Y Q. Asymptotical stability of nonlinear fractional differential system with Caputo derivative. *International Journal of Differential Equations*, 2011: 635165

- 37 Aguila-Camacho N, Duarte-Mermoud M A, Gallegos J A. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, 19(9): 2951 ~ 2957
- 38 Yu J, Hu C, Jiang H, et al. Projective synchronization for fractional neural networks. *Neural Networks*, 2014, 49(1): 87 ~ 95
- 39 Zhang S, Yu Y, Hu W. Robust stability analysis of fractional-order hopfield neural networks with parameter uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, (4): 1 ~ 14
- 40 Diethelm K, Ford N J, Freed A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 29(1-4): 3 ~ 22

A METHOD OF ADAPTIVE SLIDING MODE CONTROL FOR SYNCHRONIZATION OF ONE CLASS OF UNCERTAIN FRACTIONAL-ORDER CHAOTIC SYSTEMS*

Li Te Yuan Jianbao Wu Ying[†]

(State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structure, School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract For one class of fractional-order chaotic system with systematic uncertainties and external disturbances, firstly, fractional calculus is applied into sliding controller, and a sliding surface with a fractional integral term is designed. Based on the theory of fractional Lyapunov stability and adaptive control, a sliding mode controller with the fractional - order adaptive laws of the parameters is proposed to achieve the synchronization of two uncertain fractional - order chaotic systems emphasizing the systematic uncertainties and the external disturbances, and the bounds of uncertainty and the disturbance in corresponding error system are estimated. It should be pointed out that the fractional Lyapunov stability theorem and functions introduced in the stability analysis of the fractional-order chaotic systems can be applied to many other control methods for fractional-order nonlinear systems. Finally, numerical examples are given to verify the effectiveness and feasibility of the proposed control method.

Key words systematic uncertainty, sliding mode control, fractional adaptive law, Lyapunov stability theorem