第 15 卷第 1 期 2017 年 2 月
1672-6553/2017/15(1)/010-5
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 15 No. 1
Feb. 2017

导出变系数非线性动力学系统拉格朗日函数的两种方法*

丁光涛†
（安徽师范大学物理与电子信息学院，芜湖 241000）

摘要 利用从运动微分方程出发和从第一积分出发导出拉格朗日函数的两种直接方法，构造变系数非线性动力学系统 $\ddot{x}+b(x)\dot{x}^2+c(x)x=0$ 的拉格朗日函数和 $c(x)=0$ 特殊情况的拉格朗日函数族. 另外，讨论了这种非保守系统广义能量守恒的物理意义.

关键词 非线性动力学系统， Lagrange 函数， 变分法逆问题

DOI： 10.6052/1672-6553-2016-011

引言

非线性动力学系统的研究是数学物理学中的重要课题，一个时期以来关于利用多种分析力学方法来求解非线性微分方程，成为讨论的热点之一[1-8]. 例如，V. K. Chandrasekar 等对修改的 Emden 型方程（MEE）

$$\ddot{x}+\alpha x\dot{x}+\beta x^3=0 \tag{1}$$

得到与时间无关的第一积分后，构造出哈密顿函数和拉格朗日函数，再通过正则变换求得不同的参数（α,β）值范围的方程通解[1]；Z. E. Musielak 等提出通过变量变换方法，对一个变系数非线性动力学系统

$$\ddot{x}+b(x)\dot{x}^2+c(x)x=0 \tag{2}$$

导出拉格朗日函数和哈密顿函数[2]，其拉格朗日函数为

$$L(\dot{x},x)=\frac{1}{2}\dot{x}^2e^{2I_b(x)}-\int_{x_0}^{x}\bar{x}c(\bar{x})e^{2I_b(\bar{x})}d\bar{x} \tag{3}$$

式中

$$I_b(x)=\int_{x_0}^{x}b(\bar{x})d\bar{x} \tag{4}$$

S. Ghosh 等也讨论了具有速度平方耗散项的修改的 Emden 方程

$$\ddot{x}+\alpha x\dot{x}^2+\beta x^3+\lambda_1 x=0 \tag{5}$$

导出第一积分和拉格朗日函数，并讨论方程的解[3]. 显然，方程（5）是方程（2）的特例. 此外，还有不少工作涉及构建非线性微分方程多种形式的拉格朗日函数，讨论特殊非线性系统的分析力学化问题[4-9].

非线性系统分析力学化的关键在于构造出对应的拉格朗日函数以及哈密顿函数，即这种研究与变分法逆问题密切相关. 变分法逆问题是数学力学物理学领域中古老而又常新的问题，它讨论给定的微分方程能否通过变分原理导出，以及如何构建对应的拉格朗日函数. 构建拉格朗日函数有多种不同的途径[10-15]，只是这些途径的适用范围和难易程度不同，文献[14]和[15]分别提出从微分方程本身出发以及从第一积分出发来直接构造拉格朗日函数的两种比较普遍的方法，本文利用这两种方法实现方程（2）的分析力学化，并与文献[2]中方法相对照；此外，又进一步讨论方程（2）中 $c(x)=0$ 的情况，导出对应的拉格朗日函数族，这是文献[2]中没有得到的结果. 最后，讨论这种非保守的系统“广义能量守恒”的意义.

1 从微分方程（2）直接导出拉格朗日函数

1.1 从微分方程直接导出拉格朗日函数的方法

文献[14]提出一种直接从运动微分方程构造

2016-01-20 收到第 1 稿，2016-02-23 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目（11472063）
† 通讯作者 E-mail：dgt695@ sina. com

拉格朗日函数的方法. 如果系统是一维的,运动微分方程为

$$\ddot{x}+f(t,x,\dot{x})=0 \tag{6}$$

设其拉格朗日函数具有如下形式

$$L=\frac{1}{2}u(t,x,\dot{x})\dot{x}^2+v(t,x) \tag{7}$$

将式(7)代入拉格朗日方程,展开得到

$$A\ddot{x}+A_1\dot{x}+A_2\dot{x}^2+A_3\dot{x}^3+A_0=0$$

$$A(t,x,\dot{x})=u+2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial \dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial^2 u}{\partial \dot{x}^2}$$

$$A_1(t,x,\dot{x})=\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$A_2(t,x,\dot{x})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \dot{x}}\right)$$

$$A_3(t,x,\dot{x})=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \dot{x}}$$

$$A_0(t,x,\dot{x})=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{8}$$

由式(6)和式(8),得到

$$Af(t,x,\dot{x})=A_1\dot{x}+A_2\dot{x}^2+A_3\dot{x}^3+A_0 \tag{9}$$

这是确定函数 $u(t,x,\dot{x})$ 和 $v(t,x)$ 的偏微分方程. 显然,当函数 $f(t,x,\dot{x})$ 为某些特殊形式,如为速度一次函数或二次函数时,可以根据情况选择函数 u 的宗量以简化方程(9)的求解.

1.2　从方程(2)直接导出拉格朗日函数(3)

利用上述方法构建方程(2)的拉格朗日函数,此时式(9)写成

$$A[b(x)\dot{x}^2+c(x)x]=A_1\dot{x}+A_2\dot{x}^2+A_3\dot{x}^3+A_0 \tag{10}$$

根据方程(2)的特点,可以选取 $u=u(x)$,则式(10)写成

$$u[b(x)\dot{x}^2+c(x)x]=\frac{1}{2}\frac{du}{dx}\dot{x}^2-\frac{dv}{dx} \tag{11}$$

将速度平方项与不含速度项分开,可以得到

$$u=e^{2I_b(x)}\qquad \left(I_b=\int_{x_0}^{x}b(\bar{x})d\bar{x}\right) \tag{12}$$

$$v(x)=-\int_{x_0}^{x}e^{2I_b(\bar{x})}c(\bar{x})\bar{x}d\bar{x} \tag{13}$$

代入式(7),就导出拉格朗日函数(3).

1.3　变系数与速度平方相关运动的拉格朗日函数族

运动方程(2)的一种特殊情况是 $c(x)=0$,即运动是变系数与速度平方相关的运动. 显然,由式(3)可以直接导出这种运动的一个拉格朗日函数. 但是,实际上这种运动存在拉格朗日函数族. 证明如下:取式(10)中 $A_0=0$,即式(6)中 $v=0$,并设

$$u=u(x,\dot{x}), \tag{14}$$

由方程(10)得到确定 u 的方程为

$$\left(u+2\dot{x}\frac{\partial u}{\partial \dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}^2\frac{\partial^2 u}{\partial \dot{x}^2}\right)b(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \dot{x}}\dot{x}\right) \tag{15}$$

方程的一个解族是

$$u=\frac{2}{\dot{x}^2}F(\dot{x}e^{I_b(x)}) \tag{16}$$

代入式(7),得到变系数速度平方相关的非保守运动的拉格朗日函数族

$$\bar{L}=F(\dot{x}e^{I_b(x)}) \tag{17}$$

函数 F 应当满足下列条件

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\neq 0 \tag{18}$$

即函数 F 不能是常数或仅是坐标的函数,也不能是速度的线性函数. 当函数 F 为宗量的二次函数时,有

$$L_1=F(\dot{x}e^{I_b(x)})=\dot{x}^2e^{2I_b(x)} \tag{19}$$

这是与式(3)中 $c(x)=0$ 的情况相一致的,只是系数上存在区别. 下面列出几个具体的拉格朗日函数,例如

$$L_2=\ln(\dot{x}e^{I_b(x)})=\ln\dot{x}+\int_{x_0}^{x}b(x)dx \tag{20}$$

$$L_3=(\dot{x}e^{I_b(x)})^{\alpha}\qquad(\alpha\neq 0,1) \tag{21}$$

式(21)中 α 取不同值就导出不同函数形式的拉格朗日函数,取值 2 时,就是式(19)中 L_1;取值$\frac{1}{2}$时,就是根式形式的拉格朗日函数;取值 -1 时,就是倒数形式的拉格朗日函数等等. 这表明式(17)拉格朗日函数族中既有标准形式的,即可以看成动能项与势能项之差的拉格朗日函数,也有非标准形式的,即不再是动能项与势能项之差的拉格朗日函数[7-8].

2　从方程(2)的第一积分直接构造拉格朗日函数

2.1　导出方程(2)第一积分

引入变量变换,将方程(2)写成两个一阶方程

$$\dot{x}=y$$

$$\dot{y}+b(x)y^2+c(x)x=0 \tag{22}$$

消除时间变量 t,导出一阶微分方程

$$y\frac{dy}{dx}+b(x)y^2+c(x)x=0 \tag{23}$$

利用积分因子法[16]，可得到上述一阶微分方程组的积分

$$\frac{1}{2}y^2e^{2I_b(x)}+\int_{x_0}^{x}\bar{x}c(\bar{x})e^{2I_b(\bar{x})}d\bar{x}=const. \tag{24}$$

变换为原来变量，即得到方程(2)的第一积分

$$I=\dot{x}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}-L=\frac{1}{2}\dot{x}^2e^{2I_b(x)}+\int_{x_0}^{x}\bar{x}c(\bar{x})e^{2I_b(\bar{x})}d\bar{x} \tag{25}$$

2.2 从第一积分构造 *Lagrange* 函数

文献[15]给出一种从第一积分 $I(t,x,\dot{x})$ 直接构造拉格朗日函数的方法. 对一维系统(6)，设

$$L=A(t,x)I(t,x,\dot{x})+B(t,x) \tag{26}$$

其中第一积分应当满足条件

$$\frac{\partial^2 I}{\partial\dot{x}^2}\neq 0 \tag{27}$$

系数 $A(t,x)$ 和 $B(t,x)$ 由下列方程确定

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\right)\frac{\partial I}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial A}{\partial x}I-2A\frac{\partial I}{\partial x}+A\frac{\partial I}{\partial\dot{x}}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial B}{\partial x}=0 \tag{28}$$

将式(25)积分代入，上式写成

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\right)\dot{x}e^{2I_b(x)}-\frac{\partial A}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2e^{2I_b(x)}+\int_{x_0}^{x}\bar{x}c(\bar{x})e^{2I_b(\bar{x})}d\bar{x}\right]-2A\left[b(x)\dot{x}^2+c(x)x\right]e^{2I_b(x)}+2Ab(x)\dot{x}^2e^{2I_b(x)}-\frac{\partial B}{\partial x}=0 \tag{29}$$

上述方程的一个解是

$$A=1,$$

$$B=-2\int_{x_0}^{x}\bar{x}c(\bar{x})e^{2I_b(\bar{x})}d\bar{x} \tag{30}$$

将积分 I 和 A,B 代入式(26)，即得到式(3)拉格朗日函数.

2.3 从第一积分构造平方阻尼运动的拉格朗日函数族

对 $c(x)=0$ 时的运动，方程(2)可以变换为

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}+b(x)\dot{x}^2=0 \tag{31}$$

方程的第一积分可以写成

$$I_1=\dot{x}e^{I_b(x)} \tag{32}$$

积分 I_1 不满足条件(27)，为此引入它的任意函数作为新的积分

$$\bar{I}=F(I_1)=F(\dot{x}e^{I_b(x)}) \tag{33}$$

并要求其满足条件(27)，即

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\dot{x}^2}\neq 0 \tag{34}$$

容易证明，对 $\bar{f}=b(x)\dot{x}^2$ 和式(32)中 I_1，有下列关系成立

$$-2\frac{\partial I_1}{\partial x}+\frac{\partial I_1}{\partial\dot{x}}\frac{\partial\bar{f}}{\partial\dot{x}}=0 \tag{35}$$

即满足存在拉格朗日函数族的条件[17]. 将 $\bar{f}$ 和 $\bar{I}$ 代入式(28)，有

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\right)\frac{\partial\bar{I}}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial A}{\partial x}\bar{I}-A\left(2\frac{\partial I_1}{\partial x}-A\frac{\partial I_1}{\partial\dot{x}}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)\frac{d\bar{I}}{dI_1}-\frac{\partial B}{\partial x}=\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\right)\frac{\partial\bar{I}}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial A}{\partial x}\bar{I}-\frac{\partial B}{\partial x}=0 \tag{36}$$

即 A 和 B 都为常数，例如，可取 $A=1,B=0$. 这就是说，与速度平方相关的运动存在拉格朗日函数族

$$\bar{L}=F(\dot{x}e^{I_b(x)}) \tag{37}$$

这与式(17)所示的结果相同，即利用第一积分也能够导出变系数与速度平方相关运动的拉格朗日函数族.

3 关于非线性耗散系统守恒量问题的讨论

在拉格朗日函数(3)中，$\frac{1}{2}\dot{x}^2e^{2I_b(x)}$ 可以看成“动能”项，$\int_{x_0}^{x}\bar{x}c(\bar{x})e^{2I_b(\bar{x})}d\bar{x}$ 则看成“势能”项，由于拉格朗日函数不显含时间 t，故方程(2)所表示的系统存在广义能量积分(25)，对应地，系统广义动量和哈密顿函数为

$$p=\dot{x}e^{2I_b(x)} \tag{38}$$

$$H=\frac{1}{2}p^2e^{-2I_b(x)}+\int_{x_0}^{x}\bar{x}c(\bar{x})e^{2I_b(\bar{x})}d\bar{x} \tag{39}$$

H 中不显含时间，是“守恒”量.

如何理解这种在与速度平方相关的非保守力作用下系统的广义能量“守恒”？应当注意的是，这里涉及到的“动能”、“势能”和“广义能量”，以及“广义动量”的表达式中，都包含了含有空间积分的因子 $I_b=\int_{x_0}^{x}b(\bar{x})d\bar{x}$. 这个因子反映了非保守力作用累积效应，与系统运动过程相关，即是非局域的量，故这里所讲的“动能”、“势能”、“广义能量”和“广义动量”，不仅与状态有关，而且与相关过程有关. 这些量的属性与通常所说的状态量“动量”、“能量”不同，也与“冲量”、“功”等传统的过程量有

别，实际上这是新型的物理量. 这种既与状态相关又与过程相关的物理量的引入，意味着推广了传统的物理量的分类，所以当说到系统(2)的“广义能量守恒”时，这种守恒律也与传统力学意义上的守恒律不同，是一种推广的守恒律. 然而，从对非线性非保守系统的研究来看，这样的推广是有意义的，意味着能够利用“守恒”的拉格朗日函数和哈密顿函数来描述这种系统，利用对应的分析力学理论来处理这种系统的运动.

4　结论

1) 研究非线性动力学系统课题常常需要利用多种分析力学方法，即要实现非线性微分方程的分析力学化，这就涉及变分法逆问题. 本文分别利用直接从运动方程出发和从第一积分出发构造拉格朗日函数的两种方法，导出了带有变系数速度平方相关运动方程(2)的拉格朗日函数(3)；同时还导出了方程(2)的特殊情况的拉格朗日函数族(17)，给出了这个族中的若干不同的拉格朗日函数，两种方法给出的结果相同. 与相关文献中提出的方法相比较，本文构造拉格朗日函数的两种方法更普遍，也简便可行，而且还可能导出新的重要结果. 这意味着在研究非线性系统运动方程的分析力学化时，直接从运动方程出发或从第一积分出发构造拉格朗日函数的两种方法是规范而且实用的方法. 然而，必须指出本文给出的方法只涉及一维系统，对于多维系统仍需要继续研究.

2) 在处理线性或非线性非保守系统的分析力学化问题时，常常出现广义能量“守恒”，某些作者直接将这种守恒量作为哈密顿函数，然后导出系统的拉格朗日函数. 本文对这种广义能量守恒作了深入的分析，认为它不同于传统的守恒定律，因为其中出现了既与状态相关又与过程相联系的新型物理量. 这种新型物理量的出现和守恒律的推广对于处理非线性耗散系统运动问题是有意义的，值得进一步深入研究.

参　考　文　献

1　Chandrasekar V K, Senthilvelan M, Lakshmanan M. On the general solution for the modified equation $\ddot{x}+\alpha x\dot{x}+\beta x^3=0$. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2007,40(40):4717～4727

2　Musielak Z E, Roy D, Swift L. D. Method to derive Lagrangian and Hamiltonian for a nonlinear dynamical system with variable coefficients. *Chaos, Solitons and Fractols*, 2008,38(3):894～902

3　Ghosh S, Talukdar B, Das U, Saha A. Modified Emden－type equation with dissipative term quadratic in velocity. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2012, 45(45):155207

4　Saha A, Talukdar B. Inverse variational problem for nonstandard Lagrangians. *Reports on Mathematical Physics*, 2014,73(3):299～309

5　Nucci M C, Tamizhmani K M. Lagrangians for dissipative nonlinear oscillators: the method of Jacobi last multiplier. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2010,17(2): 167～178

6　Mei F X, Xie J F, Gang T Q. Analytical mechanics methods for solving Whittaker equations. *Chinese Physics*, 2007,16(10):2845～2847

7　Cieslinski J L. Nikiciuk T. A direct approach to the construction of standard and nonstandard Lagrangians for dissipative dynamical systems with variable coefficients. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2009, 43(17):1489～1499

8　Chandrasekar V K, Senthilvelan M, Lakshmanan M. On th Lagrangian and Hamiltonian description of the damped linear harmonic oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, 2007,48(3):066203

9　丁光涛. 关于线性阻尼振子第一积分的研究. 物理学报,2013,62: 064501 (Ding G T. On the ferst integrals of linear damped oscillators. *Acta Physica Sinica*, 2013,62(6):064501 (in Chinese))

10　Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics I, New York: Springer-Verlag,1978

11　Lopuszanski J. The inverse variational problems in classical mechanics, Singapore: World Scientific,1999

12　Sarlet W. The Helmholtz conditions revisited: A new approach to the inverse problem of Lagrangian dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and Gen.*, 1982,15(5):1503～1517

13　Riewe F. Nonconservative Lagranian and Hamiltonian mechanics. *Physical Review E*, 1996,53(2):1890～1899

14　丁光涛. 从运动方程构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报,2010,8(4):305～310 (Ding G T. A direct approach to the construction of Lagrangians from the motion equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2010,8(4):305 ~ 310 (in Chinese))

15 丁光涛. 从第一积分构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报,2011,9(2):102 ~ 106 (Ding G T. A direct approach to the construction of Lagrangians from the first integral. *Journal of Dynamics and Control*, 2011,9(2):102 ~ 106 (in Chinese))

16 王高雄. 常微分方程(第三版). 北京:高等教育出版社,2006 (Wang G S, et al. Ordinary differential equation. 3 - rd ed. Beijing: Higher Education Press,2006 (in Chinese))

17 丁光涛. 关于一类 Lagrange 函数族存在的条件. 动力学与控制学报,2011,9(3): 219 ~ 221 (Ding G T. On the existence conditions for a class of the Lagrangians families. *Journal of Dynamics and Control*, 2011,9(3):219 ~ 221 (in Chinese))

TWO METHODS TO DERIVE LAGRANGIAN FOR A NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM WITH VARIABLE COEFFICIENTS *

Ding Guangtao†

(*College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

Abstract By using two direct methods to derive Lagrangian from the equation of motion and from the first integral respectively, the Lagrangian for a nonlinear dynamical system with variable coefficients $\ddot{x}+b(x)\dot{x}^2+c(x)x=0$ and a family of Lagrangians for the special case that $c(x)=0$ are constructed. In addition, the physical significance of conservation of general energy for the non - conservative systems is also discussed.

Key words nonlinear dynamical system, Lagrangian, inverse problem of the calculus of variations

Received 20 January 2016, revised 23 February 2016.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11472063)

† Corresponding author E-mail: dgt695@sina.com