第 15 卷第 1 期 2017 年 2 月
1672-6553/2017/15(1)/006-4

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 15 No. 1
Feb. 2017

Lagrange 系统的广义斜梯度表示 *

楼智美[1†]　王元斌[2]

（1. 绍兴文理学院物理系，绍兴　312000）（2. 绍兴文理学院数学系，绍兴　312000）

摘要　提出广义斜梯度系统并研究其性质，给出非定常 Lagrange 系统成为广义斜梯度系统的条件，利用广义斜梯度系统的性质来研究力学系统的稳定性. 举例说明结果的应用.

关键词　Lagrange 系统，　广义斜梯度系统，　稳定性

DOI：　10. 6052/1672-6553-2016-020

引言

通常梯度系统的矩阵和函数都不含时间 t. 如果矩阵和函数都含时间 t，则称为广义梯度系统. 如果斜梯度系统的矩阵和函数都含时间 t，则称为广义斜梯度系统. 文献[1]指出，梯度系统特别适合用 Lyapunov 函数来研究. 文献[2]给出斜梯度系统，但它们都不含时间. 有关力学系统与梯度系统的关联研究已有一些结果，如文献[3－12]. 本文将通常斜梯度系统推广到包含时间的情形，并将非定常 Lagrange 系统的方程在一定条件下化成广义斜梯度系统的方程，进而借助广义斜梯度系统来研究力学系统的稳定性.

1　广义斜梯度系统

通常斜梯度系统的方程为[2]

$$\dot{x}_i = b_{ij}(X)\frac{\partial V(X)}{\partial x_j}(i,j=1,2,\cdots,m) \tag{1}$$

这里及以后相同指标表示求和，其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$b_{ij}(X)=-b_{ji}(X)$. 将方程(1)推广到包含时间的情形，有

$$\dot{x}_i = b_{ij}(t,X)\frac{\partial V(t,X)}{\partial x_j}(i,j=1,2,\cdots,m) \tag{2}$$

其中 $b_{ij}(t,X)=-b_{ji}(t,X)$，称系统(2)为广义斜梯度系统.

按方程(2)求 V 对时间的导数 $\dot{V}$，并利用(b_{ij})的反对称性，得

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x_i}b_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j}=\frac{\partial V}{\partial t} \tag{3}$$

因此，对广义斜梯度系统(2)，如果 $V=V(t,0)=0$，V 正定，且

$$\frac{\partial V}{\partial t}<0 \tag{4}$$

则由 Lyapunov 定理知，解 $X=0$ 稳定. 以上性质可用来研究可化成广义斜梯度系统的力学系统的稳定性.

2　Lagrange 系统的梯度表示

Lagrange 系统的微分方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0(s=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

其中 $L=L(t,q,\dot{q})$ 为系统的 Lagrange 函数. 假设系统非奇异，即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{6}$$

则由(5)式可解出所有广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,q,\dot{q})(s=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

令

$$a^s=q_s,a^{n+s}=\dot{q}_s \tag{8}$$

则方程(7)可写成如下形式

$$\dot{a}^\mu=F_\mu(t,a)(\mu=1,2,\cdots 2n) \tag{9}$$

其中

$$F_s=a^{n+s},F_{n+s}=\alpha_s \tag{10}$$

引进广义动量 p_s 和 Hamilton 函数 H

2016-01-25 收到第 1 稿，2016-02-25 收到修改稿.
＊国家自然科学基金资助项目(11472177)
† 通讯作者 E-mail：louzhimei@ usx. edu. cn

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot q_s},\ H=p_s\dot q_s-L \tag{11}$$

则方程(5)可写成

$$\dot q_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\ \dot p_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}(s=1,2,\cdots,n) \tag{12}$$

进而,方程(12)还可写成

$$\dot a^{\mu}=\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{13}$$

其中

$$a^s=q_s,a^{n+s}=\dot q_s,(\omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & 1_{n\times n}\\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix} \tag{14}$$

方程(9)或方程(13)一般不能成为广义斜梯度系统. 对方程(9)如果存在反对称矩阵($b_{\mu\nu}(t,a)$)和函数 $V=V(t,a)$满足下式

$$F_{\mu}=b_{\mu\nu}\frac{\partial V}{\partial a^{\nu}}(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{15}$$

则它可以成为广义斜梯度系统. 对方程(13),如果存在反对称矩阵($b_{\mu\nu}(t,a)$)和函数 $V=V(t,a)$满足下式

$$\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}=b_{\mu\rho}\frac{\partial V}{\partial a^{\rho}}(\mu,\nu,\rho=1,2,\cdots,2n) \tag{16}$$

则它可以成为广义斜梯度系统.

值得注意的是,如果式(15)或式(16)不满足,还不能断定它不是广义斜梯度,因为这与方程(5)的一阶形式的选取相关. 方程(5)的一阶形式可有多种选择,而式(9),式(13)是其中的两种. 例如,还可选一部分 a 为 q,另一部分 a 选为 $\dot q$ 的线性式. 对单自由度系统

$$\ddot q=\alpha(t,q,\dot q) \tag{17}$$

可令

$$a^1=q,\ a^2=\dot q f(t) \tag{18}$$

则有

$$\dot a^1=\frac{a^2}{f(t)},\ \dot a^2=f(t)\alpha(t,a^1,\frac{a^2}{f})+\frac{\dot f}{f}a^2 \tag{19}$$

取

$$\dot a^1=b_{12}\frac{\partial V}{\partial a^2},\dot a^2=b_{21}\frac{\partial V}{\partial a^1} \tag{20}$$

则有

$$b_{12}\frac{\partial V}{\partial a^2}=\frac{a^2}{f(t)},b_{21}\frac{\partial V}{\partial a^1}=f\alpha(t,a^1,\frac{a^2}{f})+\frac{\dot f}{f}a^2 \tag{21}$$

将第一个方程两边对 a^1 求偏导数,将第二个方程两边对 a^2 求偏导数,分别得到

$$b_{12}\frac{\partial^2 V}{\partial a^1\partial a^2}+\frac{\partial b_{12}}{\partial a^1}\frac{\partial V}{\partial a^2}=0$$

$$b_{21}\frac{\partial^2 V}{\partial a^2\partial a^1}+\frac{\partial b_{21}}{\partial a^2}\frac{\partial V}{\partial a^1}=f\frac{\partial\alpha}{\partial a^2}+\frac{\dot f}{f} \tag{22}$$

这样,对给出的 α,可按式(22)选 b_{12},V,f 使之成为广义斜梯度系统. 如果

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial a^1}=\frac{\partial b_{12}}{\partial a^2}=0 \tag{23}$$

则有

$$f\frac{\partial\alpha}{\partial a^2}+\frac{\dot f}{f}=0 \tag{24}$$

3　算例

例 1　单自由度系统为

$$L=\frac{1}{4(1+t^2)}\dot q^2-(1+\frac{1}{1+t})(1+t^2)q^2 \tag{25}$$

试将其化成广义斜梯度系统,并研究零解的稳定性.

解:将式(25)代入式(5)可得

$$\ddot q=-4q(1+\frac{1}{1+t})(1+t^2)^2+\frac{2t}{1+t^2}\dot q$$

若按方程(9)或方程(13)选取 a^1,a^2,还不能成为广义斜梯度系统. 现令

$$a^1=q,\ a^2=\frac{\dot q}{2(1+t^2)}$$

则有

$$\dot a^1=2a^2(1+t^2),\ \dot a^2=-2a^1(1+\frac{1}{1+t})(1+t^2)$$

它可写成形式

$$\begin{pmatrix}\dot a^1\\ \dot a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & (1+t^2)\\ -(1+t^2) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial V}{\partial a^1}\\ \frac{\partial V}{\partial a^2}\end{pmatrix}$$

其中矩阵是反对称的,而函数 V 为

$$V=(a^1)^2(1+\frac{1}{1+t})+(a^2)^2$$

它在 $a^1=a^2=0$ 邻域内是正定的,且有

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-\frac{1}{(1+t)^2}(a^1)^2<0$$

因此,零解 $a^1=a^2=0$ 是稳定的.

对比式(24),所选

$$f=\frac{1}{2(1+t^2)}$$

满足式(24).

例2 单自由度系统为

$$L=\frac{\dot{q}^2}{4(2+\sin t)(1+\exp(-t))}-(q^2+\frac{1}{3}q^3)(2+\sin t) \tag{26}$$

试将其化成广义斜梯度系统,并研究零解的稳定性.

解:将式(26)代入式(5)可得

$$\ddot{q}=-2(2+\sin t)^2(1+\exp(-t))(2q+q^2)+\dot{q}(\frac{\cos t}{2+\sin t}-\frac{\exp(-t)}{1+\exp(-t)})$$

为将其化成广义斜梯度系统,可按式(23),(24)计算.令

$$\frac{\partial b_{12}}{\partial a^1}=\frac{\partial b_{12}}{\partial a^2}=0,\ a^1=q,\ a^2=\dot{q}f(t)$$

则有

$$\alpha=-2(2+\sin t)^2(1+\exp(-t))(2a^1+(a^1)^2)+\frac{a^2}{f}(\frac{\cos t}{2+\sin t}-\frac{\exp(-t)}{1+\exp(-t)}),$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a^2}=\frac{1}{f}(\frac{\cos t}{2+\sin t}-\frac{\exp(-t)}{1+\exp(-t)})$$

将 $\alpha,\frac{\partial\alpha}{\partial a^2}$ 代入式(24),得

$$(\frac{\cos t}{2+\sin t}-\frac{\exp(-t)}{1+\exp(-t)})+\frac{\dot{f}}{f}=0$$

由此可得

$$f=\frac{1}{2(2+\sin t)(1+\exp(-t))}$$

这样就有

$$a^1=q,a^2=\frac{\dot{q}}{2(2+\sin t)(1+\exp(-t))}$$

而方程(19)成为

$$\dot{a}^1=2a^2(2+\sin t)(1+\exp(-t))$$

$$\dot{a}^2=-(2a^1+(a^1)^2)(2+\sin t)$$

它可写成形式

$$\begin{pmatrix}\dot{a}^1\\ \dot{a}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & (2+\sin t)\\ -(2+\sin t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial V}{\partial a^1}\\ \frac{\partial V}{\partial a^2}\end{pmatrix}$$

其中

$$V=(a^1)^2+\frac{1}{3}(a^1)^3+(a^2)^2(1+\exp(-t))$$

它在 $a^1=a^2=0$ 邻域内正定,且

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-(a^2)^2\exp(-t)<0$$

因此,零解 $a^1=a^2=0$ 是稳定的.

4 结论

非定常力学系统的稳定性研究是一困难问题,直接从微分方程出发来构造 Lyapunov 函数往往不易实现.本文通过广义斜梯度系统来研究一些非定常 Lagrange 系统的稳定性问题.力学系统一旦成为广义斜梯度系统,并且使 $V=V(t,a)$ 成为 Lyapunov 函数,那么只要满足 $\frac{\partial V}{\partial t}<0$ 就可判断系统的稳定性.

参考文献

1 Hirsch M W, Smale S, Devaney R L. Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos. Singapore: Elsevier, 2008

2 Mclachlan R I, Quispel G R W, Robidoux N. Geometric integration using discrete gradients. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 1999,357:1021~1045

3 梅凤翔. 关于梯度系统. 力学与实践,2012,34(1):89~90 (Mei F X. On the gradient system. *Mechanics in Engineering*, 2012,34(1):89~90 (in Chinese))

4 梅凤翔,吴惠彬. 广义 Birkhoff 系统的梯度表示. 动力学与控制学报,2012,10(4):289~292 (Mei F X, Wu H B. A gradient representation of generalized Birkhoff system. *Journal of Dynamics and Control*,2012,10(4):289~292 (in Chinese))

5 楼智美,梅凤翔. 力学系统的二阶梯度表示. 物理学报,2012,61(2):024502 (Lou Z M, Mei F X. A second order gradient representation of mechanics system. *Acta Physica Sinica*, 2012,61(2):024502 (in Chinese))

6 梅凤翔, 崔金超,吴惠彬. Birkhoff 系统的梯度表示和分数维梯度表示. 北京理工大学学报,2012,32(12):1298~1300 (Mei F X, Cui J C, Wu H B. A gradient representation and a fractional gradient representation of Birkhoff system. *Journal of Beijing Institute of Technology*,2012,32(12):1298~1300 (in Chinese))

7 梅凤翔. 分析力学Ⅱ. 北京:北京理工大学出版社,2013 (Mei F X. 2013 Analytical mechanics Ⅱ. Beijing: Beijing Institute of Technology Press (in Chinese))

8 葛伟宽,薛纭,楼智美. 完整力学系统的广义梯度表示. 物理学报,2014,63(11):110202 (Ge W K, Xue Y, Lou Z M. Generalized gradient representation of holonomic me-

chanical systems. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63 (11): 110202 (in Chinese))

9 梅凤翔,吴惠彬. 事件空间中完整力学系统的梯度表示. 物理学报,2015,64(23):234501 (Mei F X, Wu H B. A gradient representation of holonomic system in the event space. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64 (23): 234501 (in Chinese))

10 Mei F X, Wu H B. Skew-gradient representation of generalized Birkhoffian system. *Chinese Physics B*, 2015, 24 (10):104502

11 梅凤翔,吴惠彬. 一阶 Lagrange 系统的梯度表示. 物理学报,2013,62(21):214501 (Mei F X, Wu H B. A gradient representation of first-order Lagrange system. *Acta Physica Sinica*,2013,62(21):214501 (in Chinese))

12 Mei F X, Cai J C. Skew-gradient representation of constrained mechanical systems. *Applied Mathematics and Mechanics*,2015,36(7):873 ~ 882

GENERALIZED SKEW-GRADIENT REPRESENTATION FOR LAGRANGE SYSTEM *

Lou Zhimei[1†]　Wang Yuanbin[2]

(1. *Department of Physics*, *Shaoxing University*, *Shaoxing* 312000, *China*)

(2. *Department of Mathematics*, *Shaoxing University*, *Shaoxing* 312000, *China*)

Abstract A generalized skew-gradient system is proposed, and the characteristic of the system is also studied. Additionally, the condition under which a Lagrange system can be considered as a generalized skew-gradient system is obtained. It shows that the characteristic of the generalized skew-gradient system can be used to study the stability of the mechanics system. Moreover, some examples are given to illustrate the application of the results.

Key words lagrange system, generalized skew-gradient system, stability

Received 25 January 2016, revised 25 February 2016.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11472177)

† Corresponding author E-mail: louzhimei@ usx. edu. cn