

# 周期激励下四维非线性系统的簇发共存现象\*

张晓芳<sup>†</sup> 吴磊 毕勤胜

(江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013)

**摘要** 在一个周期激励的四维非自治系统中, 当激励的频率远小于系统的固有频率时, 系统表现出了两时间尺度的动力学行为. 将激励项定义为慢变参数, 激励系统可以转化为广义自治系统. 分析了广义自治系统平衡点的稳定性及其分岔条件. 应用快慢分析法和转换相图, 探讨了系统对应于不同初始条件的簇发现象及其产生机制, 并对其中多种簇发共存的形成机理进行了讨论. 同时, 由于慢过效应的存在, 簇发振荡的激发态和沉寂态的连接点和理论分析中的分岔点相比存在一定的滞后现象.

**关键词** 周期激励, 分岔, 簇发, 两时间尺度

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-68

## 引言

在非线性动力系统中, 两时间尺度会导致系统产生复杂的动力学行为, 因而受到国内外学术界广泛的关注<sup>[1-4]</sup>. 其动力学行为通常表现为周期簇发(periodic bursting)<sup>[5-6]</sup>, 即在一个周期过程中呈现出大幅振荡和小幅振荡的组合. 大幅振荡可看作是快慢系统的激发态(spiking state)<sup>[7]</sup>. 小幅振荡可看作是快慢系统的静息态(quiescent state)<sup>[8]</sup>.

近几十年来, 国内外学者分别从理论分析和数值模拟等多方面对两时间尺度的动力学行为进行了研究. 起初, 人们通过将整个系统约化到单时间尺度上, 给出系统的近似解<sup>[9]</sup>. 随后, 奇异摄动法被用来分析多时间尺度系统的解析解<sup>[10]</sup>. 然而, 这两种方法都无法深入探讨不同时间尺度相互影响下产生的复杂动力学特性. 直到 Rinzel 提出了快慢分析法<sup>[11]</sup>, 不同时间尺度之间的相互作用及其所导致的簇发振荡机理才得到很好的揭示. 例如, 利用该方法和几何分岔理论, Simo 等<sup>[12]</sup>研究了双阱磁耦合电子振荡器组合系统的簇发振荡; Bertrain 等<sup>[13]</sup>研究了具有双参 Chay-Cook 模型的簇发行为; Izhikevich<sup>[14]</sup>则提出了根据连接簇发态和静息态的两个分岔来命名不同簇发行为的方法, 并给出了所有余维一分岔的簇发模式. 到目前为止, 虽

然在多时间尺度的研究领域取得了一定的成果<sup>[15]</sup>, 但大多数成果都基于低维系统而展开的, 对于高维系统中的两时间尺度问题则涉及较少. 高维系统由于其自身的复杂性, 如多平衡态共存<sup>[16-18]</sup>, 使得系统所表现出的簇发行为也尤为复杂. 所以, 高维系统的多时间尺度问题还有待进一步深入探索.

本文针对一个周期激励的四维非线性系统, 通过参数调节使得激励频率远小于系统的固有频率, 系统具有频域上的两个时间尺度, 从而表现出明显的快慢效应. 应用快慢分析法重点分析不同初始条件下系统产生的簇发共存现象, 揭示簇发产生的机理. 同时, 进一步探讨了簇发共存现象的产生机制.

## 1 系统模型及分岔分析

为探讨高维系统的复杂簇发行为, 我们在 Abooe 等<sup>[19]</sup>提出的一个三维混沌系统的基础上增加一个控制项  $u$ , 并引入周期激励, 得到了一个新的四维非自治系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) + byz^2 \\ \dot{y} &= cx + dxz^2 \\ \dot{z} &= hz + kx^2 + \alpha u + A\sin(\omega t) \\ \dot{u} &= \beta(x^2 - 1)u - u^3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中,  $A$  为激励幅值,  $\omega$  为相应的激励频率. 定义  $w = A\sin(\omega t)$ , 系统(1)可转换为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x) + byz^2 \\ \dot{y} &= cx + dxz^2 \\ \dot{z} &= hz + kx^2 + \alpha u + w \\ \dot{u} &= \beta(x^2 - 1)u - u^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

当激励频率  $\omega$  远小于系统固有频率  $\Omega_N$  时,系统存在两个时间尺度. 在每一个与固有频率有关的快变周期  $T_N = 2\pi/\Omega_N$  中,激励项  $w = A\sin(\omega t)$  在  $W_A = A\sin(\omega t_0)$  和  $W_B = A\sin(\omega t_0 + 2\pi\omega/\Omega_N)$  之间变化. 由于  $\omega/\Omega_N \ll 1$ ,对于任意一个快变周期,激励项  $w$  变化很小,因此可以将其作为系统(2)的一个慢变参数. 相应地,系统(2)可称之为广义自治系统,这样就可以应用传统的快慢分析法来揭示周期激励中不同簇发的产生机制.

当  $\beta > 0, c > 0, d < 0$  时,广义自治系统的平衡点可以表示为  $E_0 = (0, 0, -w/h, 0)$ ,  $E_{i\pm} = (x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}, 0)$  以及  $E_{j\pm} = (x_{j0}, y_{j0}, z_{j0}, u_{j0})$ , 其中,

$$z_{i0} = z_{j0} = \pm\sqrt{-c/d}, \quad y_{i0} = adx_{i0}/(ad - bc),$$
$$y_{j0} = adx_{j0}/(ad - bc), \quad x_{j0} = \pm\sqrt{(\beta + u_{j0}^2)/\beta} \quad (3)$$

而  $x_{i0}, u_{j0}$  分别满足  $hz_{i0} + kx_{i0}^2 + w = 0$ ,  $ku_{j0}^2 + \alpha\beta u_{j0} + h\beta z_{j0} + k\beta + \beta w = 0$ .

平衡点的稳定性决定于相应的特征方程  $\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$ , (4)

由 Routh-Hurwitz 准则可知,当  $a_1 > 0, a_4 > 0, a_1a_2 - a_3 > 0, a_4(a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4) > 0$  时平衡点稳定.

我们讨论  $E_0$  的稳定性及其分岔条件. 其中,  $E_0$  所对应的特征方程的系数分别为

$$a_1 = \beta - h + a$$
$$a_2 = -ca - h\beta + a\beta - ah - (cb + da)w^2/h^2 - bdw^4/h^4$$
$$a_3 = cah - ah\beta - ca\beta + (cb + da)w^2/h - (cb + da)\beta w^2/h^2 + dbw^4/h^3 - db\beta w^4/h^4$$
$$a_4 = cah\beta + (cb + da)\beta w^2/h + db\beta w^4/h^3 \quad (5)$$

显然,  $E_0$  发生简单分岔的条件为  $a_4 = 0$ , 即

$$cah\beta + (cb + da)\beta w^2/h + db\beta w^4/h^3 = 0 \quad (6)$$

将  $\lambda = i\omega_0$  代入特征方程,可以得到  $E_0$  产生 Hopf 分岔的条件为

$$a_3^2 - a_1a_2a_3 + a_1^2a_4 = 0 \quad (7)$$

由于表达式繁琐,就不在此列出. 为了进一步讨论平衡点的稳定性及其分岔,将参数取定为  $a = 40.0, b = 1.0, c = 5.0, d = -1.0, h = -5.0, k = -6.0, \alpha = 1.0, \beta = 5.0$ , 不难得到,  $E_0 = (0, 0, w/5, 0)$

在  $w = \pm 11.180$  处产生简单分岔. 并且,在  $|w| > 11.180$  时稳定,  $E_0$  在  $[-11.180, 11.180]$  内不稳定,  $E_0$  不满足产生 Hopf 分岔的条件.

同样方法也可以分析其他平衡点的稳定性及其分岔条件,只是比较繁琐,就不在此一一赘述,而是通过图 1 给出了所有的平衡点及其分岔产生出的极限环. 图 1(a) 中,黄色、红色、蓝色和粉色曲线分别表示平衡点  $E_0, E_{1\pm}, E_{2\pm}$  和  $E_{3\pm}$ , 其中实线表示平衡点稳定,虚线表示平衡点不稳定. 图 1(b)(c)(d) 中的红色、蓝色和粉色曲线分别表示经过超临界 Hopf 分岔点  $H_{1\pm}, H_{2\pm}$  和  $H_{3\pm}$  所产生的独立的极限环  $CY_{i\pm} (i = 1, 2, 3)$  以及极限环  $CY_{i\pm}$  碰撞所产生的大的极限环  $CY_i (i = 1, 2, 3)$ , 各极限环的存在区间和存在形式详见表 1.

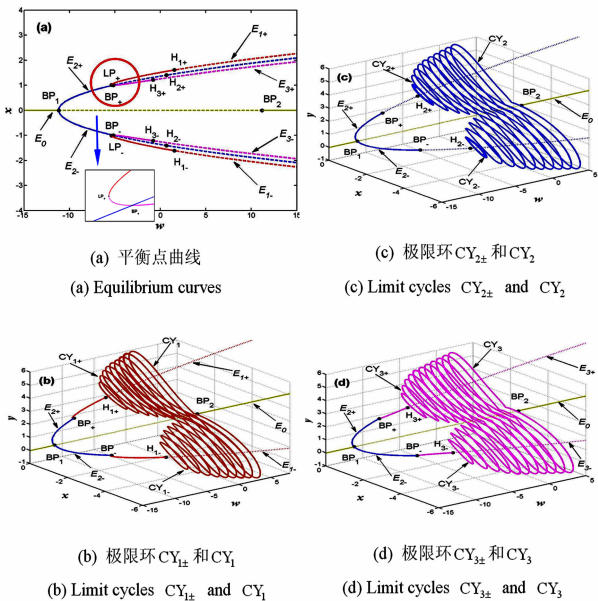


图 1 平衡点曲线图及其分岔产生出的极限环  
Fig. 1 Equilibrium curves and limit cycles

表 1 极限环的存在区间

Table 1 The existence interval of limit cycles		
Hopf bifurcation points	Existence interval of $CY_{i\pm} (i = 1, 2, 3)$	Existence interval of $CY_i (i = 1, 2, 3)$
$H_1$	$[1.526, 7.743)$	$[7.743, 17.646]$
$H_2$	$[0.658, 5.371)$	$[5.371, 16.721]$
$H_3$	$[-0.808, 4.143)$	$[4.143, 14.993]$

2 周期激励下的簇发共存现象

在上述参数条件下,取定激励幅值  $A = 10.0$ , 激励频率  $\omega = 0.200$ , 此时的激励频率远小于系统的固有频率,初始点分别取  $SP1(1.610, 1.430, -$

2.240,2.820),  $SP_2(1.400,1.250,-2.240,0.0)$ ,  $SP_3(1.210,1.080,-2.240,-1.540)$  时,系统产生了不同簇发共存的现象.

2.1 初始点取  $SP_1(1.610,1.430,-2.240,2.820)$

图2给出了初始值取  $SP_1(1.610,1.430,-2.240,2.820)$  时系统的时间历程图. 从图中可以看出,系统产生了明显的簇发现象.

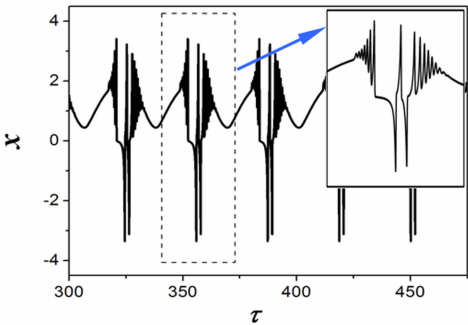
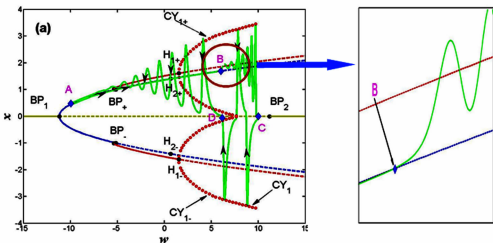
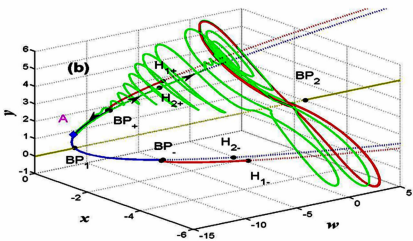


图2 初始点取  $SP_1$  时簇发振荡的时间历程图  
Fig. 2 Time history of bursting oscillation for initial point  $SP_1$

为了分析该簇发现象产生的机制,图3将平衡点曲线与转换相图进行了叠加. 图3(a)给出了  $w-x$  的二维叠加图,其中,红色实心圆点表示极限环  $CY_{1+}$  和  $CY_1$ . 图3(b)给出了  $w-x-y$  的三维叠加图,红色曲线表示了  $w=10.000$  时的极限环  $CY_1$ .



(a)  $w-x$  二维叠加图  
(a) Two-dimensional overlap phase on  $w-x$  plane



(b)  $w-x-y$  三维叠加图  
(b) Three-dimensional overlap phase on  $w-x-y$  space

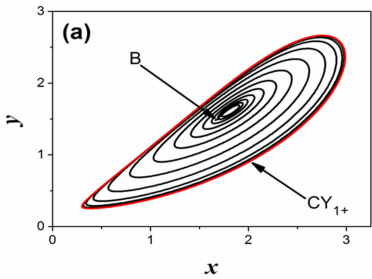
图3 初始点取  $SP_1(1.610,1.430,-2.240,2.820)$  时  
系统平衡点曲线与转换相图的叠加  
Fig. 3 Overlap of equilibrium curves and transformed phase on  
 $w-x-y$  space for initial point  $SP_1(1.610,1.430,-2.240,2.820)$

假定轨线自  $A$  点出发,由时间历程图可以判断,它将沿着稳定的平衡点  $E_{2+}$  向右运动. 当经过分岔点  $BP_+(w=-5.180)$  时,  $E_{2+}$  失去其稳定性. 需要说明的是,由于滞后现象的存在,轨线并没有立即跳跃,而是沿着不稳定的平衡点  $E_{2+}$  走了一段路程,直至  $B(1.663,1.483,-2.222,0.101)$  点,此时  $w=5.418$ .

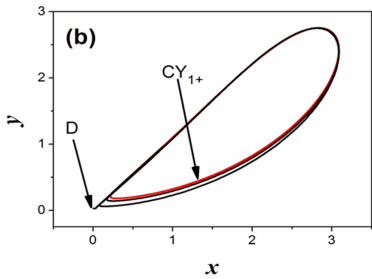
经过  $B$  点后轨线向  $E_{1+}$  跳跃,围绕平衡点  $E_{1+}$  振荡,由于此时的  $E_{1+}$  并不稳定,而在轨线的附近有由 Hopf 分岔而产生的稳定极限环  $CY_{1+}$  存在,受到  $CY_{1+}$  的吸引,轨线的振荡幅值迅速增大,系统由静息态进入激发态. 随着  $w$  的增大,振荡的幅度也继续增加,直到  $w$  达到最大值 10.000 时,轨线到达  $C$  点. 由图3(b)可知  $C$  点在大极限环  $CY_1$  上,所以轨线沿着  $CY_1$  运动到下半部分. 之后受激励项  $w$  的影响,轨线围绕着极限环  $CY_1$  开始向左运动直到  $D(0.0,0.029,-2.012,1.074)$  点,此时  $w=6.135$ ,广义自治系统中的极限环  $CY_1$  消失,轨线回到  $CY_{1+}$  的吸引域中,因此围绕着极限环  $CY_{1+}$  振荡并继续向左运动. 由于极限环逐渐缩小,振荡幅值也随之减小,直到穿过分岔点  $H_{1+}$ ,轨线退出激发态最终收敛于稳定平衡点  $E_{2+}$ ,回到初始点  $A$ ,完成一个振荡周期. 值得注意的是,在一个完整的簇发周期内,系统进入簇发态和退出激发态都是由于 Hopf 分岔引起的,因此我们将该簇发定义为非对称结构的 Hopf/Hopf 簇发. 由于系统的对称性,当取初始点  $SP(-1.610,-1.430,-2.240,2.820)$  时,系统还存在一个和上述轨线关于  $x=0.0$  平面对称的吸引子.

下面,要对轨线经过  $B$  点和  $D$  点后的运动方向作进一步探讨. 由表1可知,在  $B$  点和  $D$  点处广义自治系统中有稳定的极限环  $CY_{1+}$ ,  $CY_2$ ,  $CY_3$  同时存在. 为了说明  $B$  点的运动趋势,我们将广义自治系统中的慢变参数  $w$  值取定为  $B$  点处对应值 5.418,将  $(1.663,1.483,-2.222,0.101)$  作为初始条件,作出  $w=5.418$  时广义自治系统的相图(见图4(a)),可见轨迹很快稳定到极限环  $CY_{1+}$  上. 由此可以说明此时的  $B$  点位于广义自治系统中极限环  $CY_{1+}$  的吸引域内,所以系统轨线穿过  $B$  点之后受到  $CY_{1+}$  的吸引,而逐渐趋向于  $CY_{1+}$ . 同样的方法,将  $w$  值取定为  $D$  点处的对应值 6.135,以  $(0.0,0.029,-2.012,1.074)$  为初始条件作出广义自治系

统的相图(见图 4(b)),可以看出系统的轨迹很快稳定到极限环  $CY_{1+}$ ,说明  $D$  点同样位于广义自治系统中极限环  $CY_{1+}$  的吸引域内,所以系统轨线穿过  $D$  点之后受到  $CY_{1+}$  的吸引并逐渐趋向于  $CY_{1+}$ .可见,轨线所处的吸引域决定了其运动方向.



(a)  $w = 5.418$  时对应点 B 的运动轨迹  
(a) The trajectory of Point B for  $w = 5.418$



(b)  $w = 6.135$  时对应点 D 的运动轨迹  
(b) The trajectory of Point D for  $w = 6.135$

图 4 广义自治系统的相图

Fig. 4 Phase portrait of the generalized autonomous system

2.2 初始点取  $SP2(1.210, 1.080, -2.240, -1.540)$

取定初始点  $SP2(1.210, 1.080, -2.240, -1.540)$ ,图 5 给出了系统的时间历程图.可以看出,相比较初始点  $SP1$ ,系统的簇发行为发生了明显的变化.

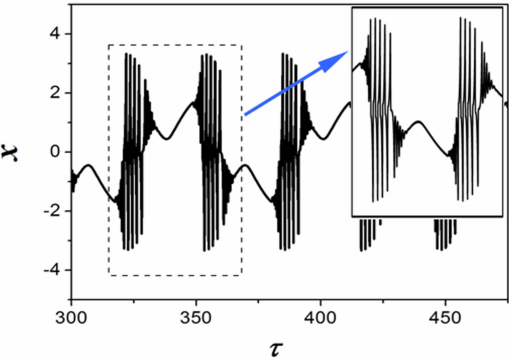
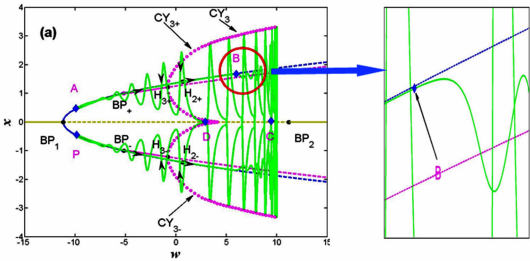


图 5 初始点取  $SP2$  时簇发振荡的时间历程图

Fig. 5 Time history of bursting oscillation for initial point  $SP2$

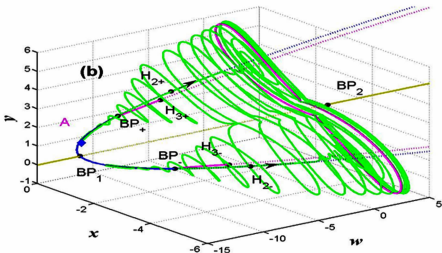
为了揭示该簇发现象产生的原因,图 6 展示了

平衡点曲线与转换相图的叠加图,其中,图 6(a)给出了  $w-x$  的二维叠加图,粉色实心原点表示极限环  $CY_{3\pm}$  及其发生碰撞后产生的同样具有对称结构的大极限环  $CY_3$ . 图 6(b)给出了  $w-x-y$  的三维叠加图,粉色曲线表示  $w = 9.443$  处的极限环  $CY_3$ . 由叠加图不难发现,相比较图 3,系统的轨线在两个极限环  $CY_{3+}$  和  $CY_{3-}$  之间来回运动.



(a)  $w-x$  二维叠加图

(a) Two-dimensional overlap phase on  $w-x$  plane



(b)  $w-x-y$  三维叠加图

(b) Three-dimensional overlap phase on  $w-x-y$  space

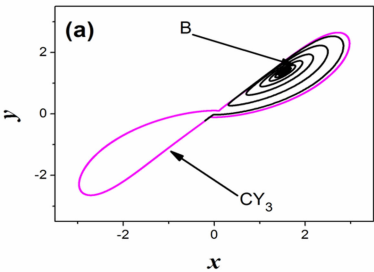
图 6 初始点取  $SP2$  时系统平衡点曲线与转换相图的叠加

Fig. 6 Overlap of equilibrium curves and transformed phase on  $w-x-y$  space for initial point  $SP2$

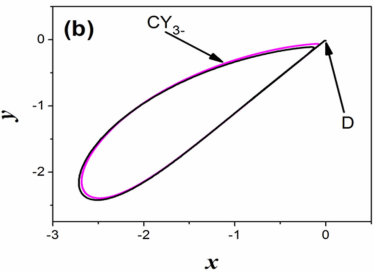
还是假定轨线从  $A$  点出发,沿着稳定的平衡点  $E_{2+}$  向右运动. 当经过分岔点  $BP_+$  时,  $E_{2+}$  失去其稳定性. 由于滞后现象的存在,轨线没有立即跳跃,而是沿着不稳定的平衡点  $E_{2+}$  走了一段路程,直至  $B(1.668, 1.484, -2.228, -0.039)$  点,此时  $w = 5.552$ .

经过  $B$  点后轨线向  $E_{3+}$  跳跃,围绕平衡点  $E_{3+}$  振荡,由于此时的  $E_{3+}$  同样不稳定,受到由 Hopf 分岔产生的稳定极限环  $CY_{3\pm}$  发生碰撞后产生的大极限环  $CY_3$  的吸引,轨线的振荡幅值迅速增大,系统由静息态进入激发态. 随着  $w$  的增大,振荡的幅度也随之增大,直到  $w$  达到 9.443 时,轨线到达  $C$  点. 由图 6(b)可知  $C$  点在极限环  $CY_3$  上,所以轨线围绕着  $CY_3$  运动到下半部分. 之后,轨线围绕大环  $CY_3$  继续向右运动,直到运动到最右点  $w = 10.000$ ,

受激励项  $w$  的影响,轨线围绕极限环  $CY_3$  开始向左运动. 当运动到  $D(0.0, -0.016, -2.286, -1.257)$  点,此时  $w = 3.011$ ,广义自治系统中的极限环  $CY_3$  消失,且轨线运动到  $CY_{3-}$  的吸引域中,因此围绕着极限环  $CY_{3-}$  继续振荡并向左运动. 随着极限环的逐渐减小,振荡幅值也随之减小,直到穿过分岔点  $H_{3-}$ ,轨线退出激发态最终收敛于稳定平衡点  $E_{2-}$ ,直到运动到最左点  $P(w = -10.000)$ ,完成半个振荡周期. 由于相空间的对称性,系统下半个周期的运动机理和上半个周期的运动机理相同,直到回到初始点  $A$ ,完成一个周期振荡. 这里,在一个完整的簇发周期内,轨线共经历了四个沉寂态和四个激发态,并且沉寂态和激发态同样是由 Hopf 分岔引起的,因而可以将其定义为对称式 double-Hopf/Hopf 簇发.



(a)  $w = 5.552$  时对应点  $B$  的运动轨迹  
(a) The trajectory of Point  $B$  for  $w = 5.552$



(b)  $w = 3.011$  时对应点  $D$  的运动轨迹  
(b) The trajectory of Point  $D$  for  $w = 3.011$

图7 广义自治系统的相图

Fig. 7 Phase portrait of the generalized autonomous system

同样方法可以说明轨线在经过  $B$  点和  $D$  点后的运动方向. 由表 1 可知,在  $B$  点处广义自治系统中同时存在稳定的极限环  $CY_{1+}, CY_2, CY_3$ ,而在  $D$  点处广义自治系统中同时存在稳定的极限环  $CY_{1+}, CY_{2+}, CY_{3+}$ . 将广义自治系统中的  $w$  值取为  $B$  点对应值 5.552,将  $(1.668, 1.484, -2.228, -0.039)$  作为初始条件,作出广义自治系统的相图(见图 7

(a)),可见轨线很快稳定到极限环  $CY_3$  上. 由此说明  $B$  点位于广义自治系统中极限环  $CY_3$  的吸引域内,所以系统轨线穿过  $B$  点之后受到  $CY_3$  的吸引,而逐渐趋向于  $CY_3$ . 同样,将  $w$  值取为  $D$  点处对应值 3.011,作出以  $(0.0, -0.016, -2.286, -1.257)$  为初始条件的广义自治系统的相图(见图 7(b)). 可以看出系统的轨线很快稳定到极限环  $CY_{3-}$  上,说明  $D$  点位于广义自治系统中极限环  $CY_{3-}$  的吸引域内,所以系统轨线穿过  $D$  点之后受到  $CY_{3-}$  的吸引并逐渐趋向于  $CY_{3-}$ ,从而运动到极限环  $CY_{3-}$  上.

由此可见,在多个吸引子共存的情况下,系统的轨线在运动过程中会穿过广义自治系统中不同吸引子的吸引域,从而受到不同吸引子的吸引,改变它的运动方向,导致了不同的簇发形式的产生.

2.3 初始点取  $SP3(1.400, 1.250, -2.240, 0.0)$

取定初始点  $SP3(1.400, 1.250, -2.240, 0.0)$ . 图 8 给出了系统的时间历程图.

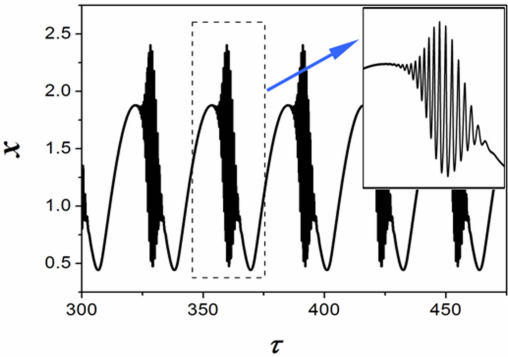


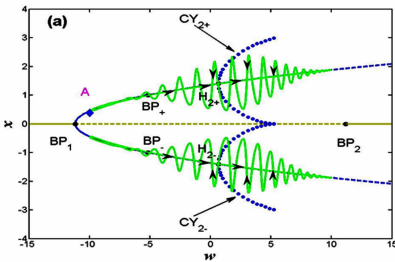
图8 初始点取  $SP3$  时的簇发振荡的时间历程图

Fig. 8 Time history of bursting oscillation for initial point  $SP3$

为了揭示该簇发现象产生的机制,图 9 将平衡点曲线与转换相图进行了叠加. 其中,图 9(a)给出了  $w-x$  的对称式二维叠加图,蓝色实心原点表示极限环  $CY_{2+}$ . 图 9(b)给出了  $w-x-y$  的三维叠加图(上半支),蓝色曲线表示极限环  $CY_{2+}$ . 通过与图 3 和图 6 的比较不难发现,系统的轨线围绕单个吸引子振荡.

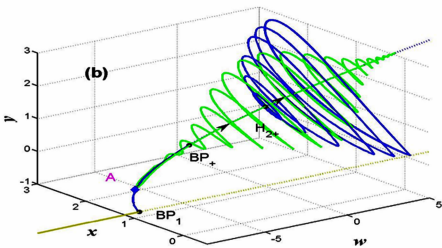
仍然假定轨线从  $A$  点出发,沿着稳定的平衡点  $E_{2+}$  向右运动. 当经过分岔点  $BP_+$  时,  $E_{2+}$  失去其稳定性并经过 Hopf 分岔点  $H_{2+}$  产生极限环  $CY_{2+}$ . 由于滞后现象的存在,轨线没有因为失去稳定性而立即产生振荡,而是沿着不稳定的平衡点  $E_{2+}$  走了一段路程,直到运动到最右点即  $w$  取得最大值 10.000 时向左折回运动才由于极限环  $CY_{2+}$  的吸引开

始振荡,由静息态进入激发态. 当然,向右运动的整个过程中,系统的轨线没有发生跳跃的原因是因为轨线向右运动的整个过程中始终处于极限环  $CY_{2+}$  吸引域中. 之后,受到极限环  $CY_{2+}$  的作用,随着  $w$  的减小,振荡幅度逐渐增大. 当振荡幅值增大到极限环  $CY_{2+}$  上时,轨线将围绕着该极限环继续向左运动,直到穿过分岔点  $H_{2+}$  退出激发态,轨线受到稳定平衡点  $E_{2+}$  的吸引,振荡幅值逐渐减小,最终收敛于稳定平衡点  $E_{2+}$ ,回到初始点  $A$  点,完成一个振荡周期. 可以看出,整个周期振荡过程中,系统的簇发行为同样是由一个 Hopf 分岔点引起的,因此可以将其定义为 Hopf/Hopf 簇发. 由于系统的对称性,当初始点取定为  $SP(-1.400,-1.250,-2.240,0.0)$  时,系统还存在一个和上述簇发振荡相对称的吸引子(见图 9(a)).



(a)  $w-x$  二维叠加图

(a) Two-dimensional overlap phase on  $w-x$  plane



(b)  $w-x-y$  三维叠加图

(b) Three-dimensional overlap phase on  $w-x-y$  space

图 9 初始点取  $SP_3$  时系统平衡点曲线与转换相图的叠加  
Fig. 9 Overlap of equilibrium curves and transformed phase on  $w-x-y$  space for initial point  $SP_3$

3 结论

对于一个四维周期激励系统,当激励频率远小于原系统的固有频率时,系统存在两时间尺度,表现出明显的快慢效应,从而产生各种复杂的簇发现象. 在特定的参数下通过对广义自治系统平衡点的分岔分析,发现了在某些参数条件下存在多个吸

引子共存的现象. 在相同激励幅值下取定不同的初始点,由于广义自治系统多吸引子的共存,随着初始点的变化,激励系统轨线运动到不同的吸引域,从而产生不同的簇发行为,得到不同的簇发形式. 如非对称结构的 Hopf/Hopf 簇发,对称结构的 double-Hopf/Hopf 簇发以及 Hopf/Hopf 簇发. 此外,滞后现象在簇发现象中表现的较为明显.

参 考 文 献

1 Dai H H, Yue X K, Liu C S. A multiple scale time domain collocation method for solving non-linear dynamical system. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2014,67(1):342~351

2 Kim S Y, Lim W. Thermodynamic order parameters and statistical-mechanical measures for characterization of the burst and spike synchronizations of bursting neurons. *Physica A*, 2015,438(1):544~559

3 Xu Jie, Miao Yu.  $L_p(p>2)$ -strong convergence of an averaging principle for two-time-scales jump-diffusion stochastic differential equations. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2015,18(1):33~47

4 张艳娇,李美生,陆启韶. ML 神经元的放电模式及时滞对神经元同步的影响. *动力学与控制学报*,2009,7(1):019~5 (Zhang Y J, Li M S, Lu Q S. Firing patterns and the effect of time-delay coupling on synchronization of two copuled chaotic ML neurons. *Journal of Dynamics and Control*, 2009,7(1):019~5(in Chinese))

5 Ferrari F A S, Viana G L, Lopes S R, et al. Phase synchronization of coupled bursting neurons and the generalized Kuramoto model. *Neural Networks*, 2015,66(1):107~118

6 Teerawat S, Suwat K. Adaptive synchronization of hyperchaotic systems via passivity feedback control with time-varying gains. *Journal of Sound and Vibraion*, 2010,329(13):2490~2496

7 张晓芳,陈章耀,毕勤胜. 周期激励下 Chen 系统的簇发现象分析. *物理学报*,2010,59(6):3802~3808 (Zhang X F, Chen Z Y, Bi Q S. Analysis of bursting phenomenon in Chen's system with periodic excitation. *Acta Physica Sinica-Chinese Edition*, 2010,3802~2808 (in Chinese))

8 Bi Qinsheng. The mechanism of bursting phenomenon in BZ chemical reaction with multiple time scales. *Science in China Series E*, 2012,10(3):2820~2830

9 Gyorgyi L, Field R. A three-variable model of deterministic

- chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction. *Nature*, 1992, 355(27): 808 ~ 810
- 10 Valorani M, Goussis D A. Explicit time-scales splitting for stiff problems: auto-ignition of gaseous-mixtures behind a steady shock. *Journal of Computational Physics*, 2001, 169(1): 44 ~ 79
  - 11 Rinzel J. Ordinary and Partial Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1985
  - 12 Simo H, Woaf P. Bursting oscillations in electromechanical systems. *Mechanics Research Communications*, 2011, 38(8): 537 ~ 541
  - 13 Bertram R, Butte M J, Kiemel T, et al. Topological and phenomenological classification of bursting oscillations. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1995, 57(57): 413 ~ 439
  - 14 Izhikevich E M. Neural excitability, spiking and bursting. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10(6): 1171 ~ 1266
  - 15 Bi Q S, Zhang R, Zhang Z D. Bifurcation mechanism of bursting oscillations in parametrically excited dynamical system. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 243(1): 482 ~ 491
  - 16 Kitio Kwumya C A, Enjieu Kadji H G. Recurrence analysis and synchronization of oscillators with coexisting Attractors. *Physics Letters A*, 2014, 387(30-31): 2142 ~ 2150
  - 17 Zhang Y X, Kong G Q, Yu J N. Critical curves and coexisting attractors in a quasiperiodically forced delayed system. *Physics Letters A*, 2009, 373(15): 1341 ~ 1345
  - 18 张晓芳, 陈小可, 毕勤胜. 多分界面下四维蔡氏电路的张弛簇发及其机制研究. *物理学报*, 2013, 61(1): 0105021 ~ 0105028 (Zhang Xiaofang, Chen Xiaoke, Bi Qinsheng. Relaxation bursting and the mechanism of four-dimensional Chua's circuit with multiple interfaces. *Acta Physica Sinica-Chinese Edition*, 2013, 61(1): 0105021 ~ 0105028 (in Chinese))
  - 19 Abooe A, Yaghini-Bonabi H A, Jahed-Motlagh M R. Analysis and circuitry realization of a novel three-dimensional chaotic system. *Communication in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2013, 18(5): 1235 ~ 1245

## BURSTING COEXISTENCE PHENOMENON OF A FOUR-DIMENSIONAL NON-AUTONOMOUS SYSTEM UNDER PERIODIC EXCITATION\*

Zhang Xiaofang<sup>†</sup> Wu Lei Bi Qinsheng

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

**Abstract** For a periodically excited four-dimensional non-autonomous system, when the exciting frequency is much less than its nature frequency, dynamical behaviors associated with two time scales can be observed. The excited system can be transformed into a general autonomous system by defining the whole exciting term as a slow-varying parameter. Firstly, the stability and bifurcation conditions of equilibrium points in the generalized autonomous system are presented. Secondly, the slow-fast analysis and transformed phase are employed to explore the different types of bursting behaviors with different initial conditions. In addition, the mechanism of coexistence phenomenon is discussed. Meanwhile, delay phenomenon is observed between the points connecting the spiking states and the quiescent states and the bifurcation points obtained theoretically.

**Key words** periodic excitation, bifurcation, bursting, two time scales