第 14 卷第 5 期 2016 年 10 月
1672-6553/2016/14(5)/391-4

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 14 No. 5
Oct. 2016

二阶自治广义 Birkhoff 系统的奇点分析*

曹秋鹏[1]　陈向炜[2†]

(1. 苏州科技学院数理学院,苏州　215009)(2. 商丘师范学院物理与电气信息学院,商丘　476000)

摘要　建立二阶自治广义 Birkhoff 系统的微分方程. 给出该系统的线性化方程,得到该线性方程转化为梯度系统的条件, 利用梯度系统的性质对线性系统的奇点进行了分析, 然后再利用 Perron 定理探讨了相应的非线性系统的奇点类型. 结果表明, 如果线性系统能成为梯度系统,那么相应的非线性系统的奇点可能是结点或者鞍点.

关键词　广义 Birkhoff 系统，　梯度系统，　奇点

DOI：　10.6052/1672-6553-2016-6

引言

微分方程定性理论的研究，一直是非线性动力学的热点问题[1]. 迄今仍以二阶微分力学方程为主，主要内容是分析解的存在性，周期解，奇点性质，极限环个数，分岔和混沌等[2]. Birkhoff 系统是 Hamilton 系统的自然推广，对 Birkhoff 系统定性理论的研究不仅具有理论意义还有实际应用价值. 目前，高阶非完整系统的广义 Birkhoff 表示以及 Birkhoff 框架下的变分算法的研究取得重要进展[3-4]. 对 Birkhoff 系统定性理论的研究已取得了一些重要成果[5-7]. 梯度系统特别适合用 Lyapunov 函数来研究稳定性问题[8]. 文献[9]提出了四类常见的梯度系统. 如果力学系统可以转化成梯度系统，我们可以运用梯度系统的性质来研究系统的积分及其解的稳定性. 梯度系统的研究已取得了一些重要成果，尤其是各类力学系统的通常梯度表示和斜梯度表示[10-12]. 本文利用梯度系统的性质对二阶自治广义 Birkhoff 系统的奇点进行了分析，得到了该系统的奇点类型.

1　二阶自治广义 Birkhoff 系统的微分方程

广义 Birkhoff 系统微分方程为：

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\Lambda_\mu=0$$

$$(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{1}$$

其中 $B=B(t,a)$ 是 Birkhoff 函数，$R_\mu=R_\mu(t,a)$ 是 Birkhoff 函数组，$\Lambda_\mu=\Lambda_\mu(t,a)$ 是附加项. 对于二阶自治广义 Birkhoff 系统有形式：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial R_2}{\partial a^1}-\dfrac{\partial R_1}{\partial a^2}\right)\dot a^2-\dfrac{\partial B}{\partial a^1}+\Lambda_1=0\\[2ex]\left(\dfrac{\partial R_1}{\partial a^2}-\dfrac{\partial R_2}{\partial a^1}\right)\dot a^1-\dfrac{\partial B}{\partial a^2}+\Lambda_2=0\end{cases} \tag{2}$$

这里的函数 B,R_μ 和 Λ_μ 都不显含时间 t. 设系统是非奇异的即

$$\Omega_{12}=\frac{\partial R_2}{\partial a^1}-\frac{\partial R_1}{\partial a^2}\neq0,\Omega_{21}=\frac{\partial R_1}{\partial a^2}-\frac{\partial R_2}{\partial a^1}\neq0 \tag{3}$$

则方程组(2)可解出 $\dot a^1$ 和 $\dot a^2$，得到方程组(4)

$$\begin{cases}\dot a^1=\Omega^{12}\left(\dfrac{\partial B}{\partial a^2}-\Lambda_2\right)\\[2ex]\dot a^1=\Omega^{21}\left(\dfrac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1\right)\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\Omega^{12}=\frac{1}{\Omega_{21}},\ \Omega^{21}=\frac{1}{\Omega_{12}},$$

对于方程(4)的奇点(a_0^1,a_0^2)都可以通过坐标平移到原点处，平移后奇点变成(0,0)点.

本文只考虑二阶自治广义 Birkhoff 系统(0,0)点的奇点类型. 若(0,0)点是系统(4)的奇点，将系统(4)写成

2015-9-10 收到第 1 稿,2015-10-13 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11372169)和苏州科技学院研究生科研创新计划(SKCX14_056)

† 通讯作者 E-mail：hnchenxw@163.com

$$\begin{pmatrix}\dot a^1\\ \dot a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\phi}\\ \overline{\varphi}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial a^1}\left[\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}-\Lambda_2\right)\right] & \frac{\partial}{\partial a^2}\left[\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}-\Lambda_2\right)\right]\\ \frac{\partial}{\partial a^1}\left[\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1\right)\right] & \frac{\partial}{\partial a^2}\left[\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1\right)\right]\end{pmatrix}_0\begin{pmatrix}a^1\\ a^2\end{pmatrix} \tag{5}$$

其中 $\overline{\phi}=\overline{\phi}(a^1,a^2)$，$\overline{\varphi}=\overline{\varphi}(a^1,a^2)$ 是关于 a^1 和 a^2 的二次及其更高次项，下标“0”表示其中的 a^1,a^2 分别用 0,0 代替的结果. 要研究系统(4)奇点(0,0)的类型，我们可先考虑其线性化系统奇点(0,0)的类型.

2 线性化系统的奇点类型

2.1 线性化系统

显然系统(4)在其奇点(0,0)处的线性化方程为：

$$\begin{pmatrix}\dot a^1\\ \dot a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial a^1}\left[\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}-\Lambda_2\right)\right] & \frac{\partial}{\partial a^2}\left[\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}-\Lambda_2\right)\right]\\ \frac{\partial}{\partial a^1}\left[\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1\right)\right] & \frac{\partial}{\partial a^2}\left[\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1\right)\right]\end{pmatrix}_0\begin{pmatrix}a^1\\ a^2\end{pmatrix} \tag{6}$$

为方便我们的讨论将(6)写成

$$\begin{cases}\dot a^1=b_{11}a^1+b_{12}a^2\\ \dot a^2=b_{21}a^1+b_{22}a^2\end{cases} \tag{7}$$

其中

$$\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial a^1}\left[\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}-\Lambda_2\right)\right] & \frac{\partial}{\partial a^2}\left[\Omega^{12}\left(\frac{\partial B}{\partial a^2}-\Lambda_2\right)\right]\\ \frac{\partial}{\partial a^1}\left[\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1\right)\right] & \frac{\partial}{\partial a^2}\left[\Omega^{21}\left(\frac{\partial B}{\partial a^1}-\Lambda_1\right)\right]\end{pmatrix}_0 \tag{8}$$

本文我们考虑

$$\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{9}$$

显然当且仅当(9)式成立的时候，方程(7)有唯一的奇点(0,0).

2.2 线性化系统的梯度表示

梯度系统有形式：

$$\dot x_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i},\ (i=1,2,\cdots,m) \tag{10}$$

其中 $V=V(x)$ 称做该系统的势函数.

由文献[13]我们得到方程(7)成为梯度系统的条件.

性质 1 如果(7)满足条件

$$\frac{\partial \dot a^1}{\partial a^2}=\frac{\partial \dot a^2}{\partial a^1} \tag{11}$$

可以找到函数 V 使得

$$\dot a^1=-\frac{\partial V}{\partial a^1},\ \dot a^2=-\frac{\partial V}{\partial a^2} \tag{12}$$

此时(7)成为一个梯度系统.

证明：因为有(11)成立，将(7)式代入(11)，得到

$$b_{12}=b_{21} \tag{13}$$

将(13)式代入(7)，得到

$$\begin{cases}\dot a^1=b_{11}a^1+b_{12}a^2\\ \dot a^2=b_{12}a^1+b_{22}a^2\end{cases} \tag{14}$$

这时我们取函数 $V(\boldsymbol{a})$ 为

$$V(\boldsymbol{a})=-\frac{b_{11}}{2}(a^1)^2-b_{12}a^1a^2-\frac{b_{22}}{2}(a^2)^2 \tag{15}$$

显然

$$-\frac{\partial V}{\partial a^1}=b_{11}a^1+b_{12}a^2=\dot a^1,$$

$$-\frac{\partial V}{\partial a^2}=b_{12}a^1+b_{22}a^2=\dot a^2 \tag{16}$$

此时(7)成为一个梯度系统.

梯度系统有一条重要的性质，即

性质 2 对于梯度系统(10)，其任一平衡点的线性化系统只有实特征值.

我们可以用性质 2 来研究化成梯度系统的各力学线性系统的原点的奇点类型.

2.3 线性化系统的奇点类型

由 2.2 中的性质 2 可以得到下面的一条性质，即

性质 3 如果(7)为梯度系统，则其特征值只可能为同号实根或异号实根，不存在 0 根.

证明：由上面的性质 2，只需要证明(7)不存在实特征值 0. 方程(7)的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda-b_{11} & -b_{12}\\ -b_{21} & \lambda-b_{22}\end{vmatrix}=0 \tag{17}$$

假设(17)有 0 根则应满足

$$\begin{vmatrix}-b_{11} & -b_{12}\\ -b_{21} & -b_{22}\end{vmatrix}=0 \tag{18}$$

显然(18)与(9)矛盾，故(7)不可能有 0 特征值，性质 3 成立.

由微分方程奇点类型的相关知识[12]，我们由性质 3 得到以下结论:

性质 4　如果(7)是一个梯度系统，其特征值同号则奇点(0,0)为结点，其特征值异号则奇点(0,0)为鞍点，奇点(0,0)不可能为中心.

3　非线性系统的奇点类型

由 Perron 第一定理[14]知:

性质 5　如果方程(5)中函数 $\overline{\phi}$, $\overline{\varphi}$ 满足

$$\overline{\phi}(a^1,a^2)=o(r),\ \overline{\varphi}(a^1,a^2)=o(r),$$

$$r=[(a^1)^2+(a^2)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

且在(0,0)邻域内存在连续一阶偏导数，若方程(6)中(0,0)点为(6)的结点或鞍点，则(0,0)点也是非线性方程(5)的同类奇点.

4　算例

例 1　二阶自治广义 Birkhoff 系统

$$R_1=a^2,\ R_2=0,$$

$$B=(a^2)^2-(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^1)^4,$$

$$\Lambda_1=-a^1+(a^1)^3,\ \Lambda_2=a^2,$$

试判断点(0,0)的奇点类型.

由(4)得该系统的微分方程

$$\begin{cases}\dot{a}^1=a^2\\ \dot{a}^2=a^1-(a^1)^3\end{cases} \tag{20}$$

显然点(0,0)为系统(16)的奇点. 要判定(0,0)的奇点类型，首先判断(0,0)为其线性化系统的何种奇点. 由(6)得到系统(16)的线性化系统为:

$$\begin{cases}\dot{a}^1=a^2\\ \dot{a}^2=a^1\end{cases} \tag{21}$$

明显方程(21)满足条件(11)，则(21)是梯度系统. 方程(21)的特征方程是

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=0 \tag{22}$$

可得特征值为 ±1，是异号实根，则由性质 4 得对于线性化系统(21)其奇点(0,0)是鞍点. 下面考虑带有高次项的非线性系统. 对于系统(20)其高次项 $\overline{\varphi}(a^1,a^2)=-(a^1)^3$ 满足性质 5 的条件，则奇点(0,0)也是系统(20)的鞍点.

5　结论

梯度系统的性质不但可以用来研究力学系统解的稳定性及系统的积分，而且可以用来研究力学系统奇点的类型. 本文给出了二阶自治广义 Birkhoff 系统奇点类型判定的梯度方法，如果二阶自治广义 Birkhoff 系统的线性系统能成为梯度系统,那么相应的非线性系统的奇点可能是结点或者鞍点. 最后说明本文结论对于二阶自治 Birkhoff 系统也成立.

参　考　文　献

1　刘秉正,彭建华. 非线性动力学. 北京:高等教育出版社,2004 (Liu B Z, Peng J H. Nonlinear dynamics. Beijing: Higher Education Press, 2004 (in Chinese))

2　Liu H T. Qualitative theory of differential equations. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2009

3　宋端,崔金超,刘世兴,郭永新. 高阶非完整系统的广义 Birkhoff 表示. 动力学与控制学报, 2013,11(2):97 ~ 101 (Song D, Cui J C, Liu S X, Guo Y X. Generalized Birkhoffian representation of high-order nonholonomic systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2013,11(2):97 ~101 (in Chinese))

4　刘世兴,李娜,刘畅. Birkhoff 框架下 Whittaker 方程的离散变分算法. 动力学与控制学报, 2015,13(4):246 ~ 249 (Liu S X, Li N, Liu C. Discrete variational calculation of Whittaker equation in the Birkhoffian framework. *Journal of Dynamics and Control*, 2015,13(4):246 ~ 249 (in Chinese))

5　陈向炜. Birkhoff 系统的全局分析. 开封:河南大学出版社,2002 (Chen X W. Global analysis of Birkhoff system. Kaifeng: Henan University press, 2002 (in Chinese))

6　Li Y M, Mei F X. Stability for manifolds of equilibrium states of generalized Birkhoff system. *Chinese Physics B*, 2010,19(8):080302

7　李彦敏,陈向炜. 二阶广义自治 Birkhoff 系统的全局稳定性. 云南大学学报:自然科学版, 2013,35(5):638 ~ 643 (Li Y M, Chen X W. Global stability of second order autonomous generalized Birkhoff system. *Journal of Yunnan University: Natural Sciences*, 2013,35(5):638 ~ 643 (in Chinese))

8　Hirsch M W, Smale S, Devaney R L. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos.

Singapore: Elsevier, 2008

9 Mc Lachlan R I, Quispel G R W, Robidoux N. Geometric integration using discrete gradients. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 1999, 357(1754): 1021 ~ 1045

10 梅凤翔. 分析力学(下卷). 北京:北京理工大学出版社, 2013 (Mei F X. Analytical mechanics Ⅱ. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013 (in Chinese))

11 Chen X W, Zhao G L, Mei F X. A fractional gradient representation of the Poincaré equations. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(1-2): 579 ~ 582

12 梅凤翔. 关于斜梯度系统. 力学与实践, 2013, 35(5): 79 ~ 81 (Mei F X. On the skew-gradient system. *Mechanics in Engineering*, 2013, 35(5): 79 ~ 81 (in Chinese))

13 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统动力学. 北京: 科学出版社, 2013 (Mei F X. Dynamics of generalized birkhoff system. Beijing: Science Press, 2013 (in Chinese))

14 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法. 北京: 科学出版社, 2001 (Ma Z E, Zhou Y C. Ordinary differential equation qualitative and stability theory. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese))

SINGULAR POINTS ANALYSIS FOR SECOND ORDER AUTONOMOUS GENERALIZED BIRKHOFF SYSTEMS *

Cao Qiupeng[1] Chen Xiangwei[2†]

(1. *School of Mathematics and Physics*, *Suzhou University of Science and Technology*, *Suzhou* 215009, *China*)

(2. *Department of Physics and Information Engineering*, *Shangqiu Normal University*, *Shangqiu* 476000, *China*)

Abstract The differential equations of the second order autonomous generalized Birkhoff systems were firstly established. The linearized equations of this system were also given. The conditions for`the translation of linearized system into a gradient system were put forward. The singular points for linearized system were analyzed by the characteristic of the gradient system. Moreover, the types of singular points for the corresponding nonlinear system were studied by Perron theorem. The results show that if the linearized system can be translated into a gradient system, the singular point for the corresponding nonlinear system is probably a node or a saddle point.

Key words generalized Birkhoff system, gradient system, singular point

Received 10 September 2015, revised 13 October 2015.

* This project is supported by the National Natural Science Foundation of China (11372169) and the Innovation Program for Scientific Research of Suzhou University of Science and Technology (SKCX14_056)

† Corresponding author E-mail: hnchenxw@163.com