第 14 卷第 4 期 2016 年 8 月
1672-6553/2016/14(4)/324-4
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 14 No. 4
Aug. 2016

一类分数阶复杂网络混沌系统的投影同步*

毛北行† 李庆宾
（郑州航空工业管理学院理学院，郑州 450015）

摘要 根据分数阶系统的相关理论研究了一类分数阶复杂网络混沌系统的投影同步问题，给出了分数阶复杂网络以及分数阶时滞复杂网络系统实现投影同步的充分性条件，仿真结果表明了方法的正确性.

关键词 投影同步， 分数阶系统， 复杂网络

DOI： 10.6052/1672-6553-2015-72

引言

混沌同步自提出以来已成为研究的热点并取得了丰富的成果[1-7]，近年来分数阶系统逐步成为研究的热点，分数阶系统能更准确的描述自然界系统中的一些物理特性，文献[8]研究了一类不确定分数阶混沌系统的滑模自适应同步问题，设计了一种具有较强鲁棒性能的分数阶滑模控制器，实现了混沌同步. 文献[9]研究了一类不确定分数阶混沌系统的同步控制问题，结合状态观测器和自适应方法提出了一种符合工程实际的控制方案. 文献[10]研究了一种分数阶混沌系统的自适应滑模控制器设计，所设计的控制器具有较强的鲁棒性能，文献[11]研究了分数阶 Rayleigh-Duffing-like 系统的自适应追踪广义投影同步控制问题. 文献[12]研究了分数阶异结构超混沌系统完全同步与反相同步控制问题. 文献[13]基于非线性反馈控制方法研究了一类分数阶复杂网络系统的混合投影同步问题，将误差系统的渐稳性条件转化为 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{q\pi}{2}$，且没有考虑时滞系统的相关结果，本文根据分数阶系统的相关理论研究了一类分数阶复杂网络混沌系统的投影同步问题，将系统实现投影同步的充分性条件转化为矩阵不等式，从而更容易 MATLAB 求解，仿真结果表明了方法的正确性.

定义 1[14]：Caputo 分数阶导数定义为：

$$
\begin{aligned}
{}_cD_{t_0,t}^{\alpha} &= D_{t_0,t}^{-(n-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} x(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \\
&n-1 < \alpha < n \in Z^+
\end{aligned}
$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 表示嘎玛函数，以下文中 $D_t^{\,q} = {}_cD_{0,t}^{q}$

1 分数阶复杂网络系统的投影同步

考虑如下一类分数阶复杂网络系统：

$$
D_t^{\,q} x_i(t) = \boldsymbol{A} x_i(t) + f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \Gamma x_j(t) + u_i(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, N), \tag{1}
$$

$\boldsymbol{A}$ 为适当维数的常数矩阵，u_i 为控制输入，Γ 是网络的内部耦合矩阵，$C = (c_{ij})_{N\times N}$ 是外部耦合矩阵，满足 $c_{ij} = 0, (i \neq j), c_{ij} \geqslant 0 (i \neq j)$，对角线元素定义为：

$$
c_{ii} = -\sum_{i=1, i\neq j}^{N} c_{ij} \tag{2}
$$

假设 1：复杂网络的孤立节点的解满足：

$$
D_t^{\,q} s(t) = A s(t) + f(s(t)) \tag{3}
$$

$s(t)$ 可以是一个稳定点，或者周期解，也可以是混沌轨迹.

定义 1：对给定的分数阶系统(1)，若存在一个非零矩阵 Λ，使得

$\lim\limits_{t\to\infty} \| e_i(t) \| = \lim \| x_i(t) - \Lambda s(t) \| = 0$ 成立，则复杂网络系统实现了投影同步.

假设 2：非线性函数满足条件：

2015-05-18 收到第 1 稿，2015-09-18 收到修改稿.
* 国家自然科学基金数学天元基金资助项目(11226337)
† 通讯作者 E-mail：bxmao329@163.com

$\| f(x_i(t)) - \Lambda f(s(t)) \| \leqslant l_i \| x_i(t) - \Lambda s(t) \|$,

其中 l_i 为大于零的常数.

定义系统误差为:

$e_i(t) = x_i(t) - \Lambda s(t), (i = 1,2,\cdots,N)$,

则有:

$$D_t^q e_i(t) = Ae_i(t) + f(x_i(t)) - \Lambda f(s(t)) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\Gamma e_j(t) + u_i(t)$$

引理 1[15]:对于一般的分数阶自治非线性微分方程 $D_t^\alpha x(t) = f(x(t))$,当系统的阶数 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时,如果存在实对称正定矩阵 P,使得 $J(x(t)) = x^T(t)PD_t^\alpha x(t) < 0$,则上述分数阶系统渐近稳定.

定理 1:设计控制器 $u_i(t) = -k_i e_i(t)$,若满足条件 $(A + (l_i - k_i)I_N) + C \otimes \Gamma < 0$ 则分数阶复杂网络系统(1)可以实现投影同步.

证明:由

$$D_t^q e_i(t) = Ae_i(t) + f(x_i(t)) - \Lambda f(s(t)) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\Gamma e_j(t) + u_i(t)$$

$$\begin{aligned} J(e_i(t)) &= \sum_{i=1}^{N} e_i(t)PD_t^q e_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{N} e_i(t)P[Ae_i(t) + f(x_i(t)) - \Lambda f(s(t)) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\Gamma e_j(t) + u_i(t)] \leqslant \\ &\quad \sum_{i=1}^{N} e_i(t)P[(A + (l_i - k_i)I_N) + C \otimes \Gamma]e_i(t) < 0, \end{aligned}$$

根据引理 1,很容易得到定理 1.

2　分数阶时滞复杂网络系统的投影同步

考虑如下一类分数阶时滞复杂网络系统:

$$D_t^q x_i(t) = Ax_i(t) + f(x_i(t-\tau)) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\Gamma x_j(t-\tau) + u_i(t) \quad (i = 1,2,\cdots,N), \tag{5}$$

A 为适当维数的常数矩阵,u_i 为控制输入,τ 为时滞常数,Γ 是网络的内部耦合矩阵,$C = (c_{ij})_{N\times N}$ 是外部耦合矩阵,满足 $c_{ij} \geqslant 0 (i \neq j)$,同时对角线元素定义为:

$$c_{ii} = -\sum_{i=1, i\neq j}^{N} c_{ij} \tag{6}$$

假设 3:复杂网络的孤立节点的解满足:

$$D_t^q s(t) = As(t) + f(s(t-\tau)) \tag{7}$$

$s(t)$ 可以是一个稳定点,或者周期解,也可以是混沌轨迹.

假设 4:非线性函数满足条件:

$$\| f(x_i(t-\tau)) - \Lambda f(s(t-\tau)) \| \leqslant l_i \| x_i(t-\tau) - \Lambda s(t-\tau) \|$$

定义系统误差为:

$e_i(t) = x_i(t) - \Lambda s(t),\quad (i = 1,2,\cdots,N)$,

则有:

$$D_t^q e_i(t) = Ae_i(t) + f(x_i(t-\tau)) - \Lambda f(s(t-\tau)) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\Gamma e_j(t-\tau) + u_i(t) \tag{8}$$

引理 2[16]:分数阶时滞系统

$D_t^\alpha x(t) = f(x(t), x(t-\tau))$,如果有正定的矩阵 P 和半正定矩阵 Q 满足

$$x^T(t)PD_t^\alpha x(t) + x^T Qx(t) - x^T(t-\tau)Qx(t-\tau) \leqslant 0,$$

则上述分数阶时滞系统是 Lyapunov 稳定的.

定理 2:设计控制器 $u_i(t) = -k_i e_i(t)$,若满足如下矩阵不等式(9),则分数阶复杂网络系统(5)可以实现投影同步.

$$\begin{bmatrix} P(A - k_i I) + Q & 1/2P(C\Gamma + l_i I_N) \\ 1/2[P(C\Gamma + l_i I_N)]^{\mathrm{T}} & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

证明:根据引理 2:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} [e_i^{\mathrm{T}}(t)PD^\alpha e_i(t) + e_i^{\mathrm{T}}(t)Qe_i(t) - e_i^{\mathrm{T}}(t-\tau)Qe_i(t-\tau)] = \\ &\sum_{i=1}^{N} e_i^{\mathrm{T}}(t)P[Ae_i(t) + f(x_i(t-\tau)) - \Lambda f(s(t-\tau)) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\Gamma e_j(t-\tau) + u_i(t)] + \\ &\sum_{i=1}^{N} [e_i^{\mathrm{T}}(t)Qe_i(t) - e_i^{T}(t-\tau)Qe_i(t-\tau)] \\ &\leqslant \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t-\tau) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Omega \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t-\tau) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

其中

$e(t) = [\| e_1(t) \|, \| e_2(t) \|, \cdots, \| e_N(t) \|]^{\mathrm{T}}$,

$e(t\text{-}\tau) = [\| e_1(t\text{-}\tau) \|, \| e_2(t\text{-}\tau) \|, \cdots, \| e_N(t\text{-}\tau) \|]^{\mathrm{T}}$.

$$\Omega = \begin{bmatrix} P(A - k_i I) + Q & 1/2P(C\Gamma + l_i I_N) \\ 1/2[P(C\Gamma + l_i I_N)]^{\mathrm{T}} & -Q \end{bmatrix}$$

3 数值仿真

选取分数阶 Lorenz 系统为例,系统描述为

$$\begin{aligned} D_t^q x_1 &= a(x_2 - x_1) \\ D_t^q x_2 &= bx_1 - x_1x_3 - x_2 \\ D_t^q x_3 &= x_1x_2 - cx_3, \\ D_t^q s_1 &= a(s_2 - s_1) \\ D_t^q s_2 &= bs_1 - s_1s_3 - s_2 \\ D_t^q s_3 &= s_1s_2 - cs_3 \end{aligned}$$

其中 x_1, x_2, x_3 为状态变量,a, b, c 为系统参数,当 $q = 0.93, a = 10, b = 28, c = 8/3$ 时系统处于混沌状态. 为了方便,取含三个节点的网络进行仿真.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}, f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix},$$

$$C = (c_{ij})_{3\times3} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

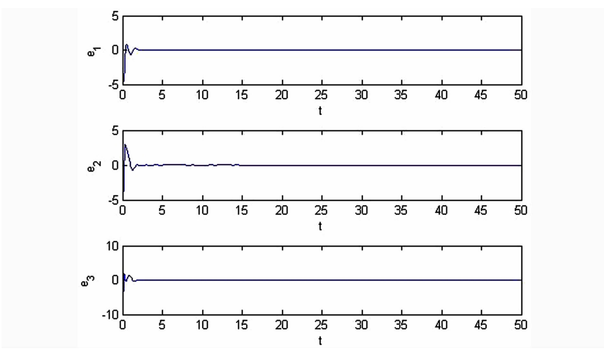

图 1 定理 1 中的系统误差曲线

Fig. 1 The system errors for Theorem 1

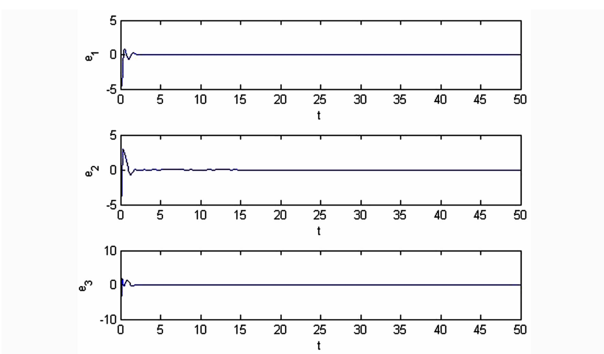

图 2 定理 2 中的系统误差曲线

Fig. 2 The system errors for Theorem 2

定理 1 中选取控制器 $u_i(t) = -k_ie_i(t), \Lambda = \mathrm{diag}(-1,1,1), \Gamma = I_3, l_i = 1.2$ $k_i = 1$,从系统的误差曲线如图 1 所示, 定理 2 中选取控制器 $u_i(t) = -k_ie_i(t)$, $\Lambda = \mathrm{diag}(-1,1,1), \Gamma = I_3, \tau = 0.5$, $l_i = 1.5, k_i = 1.5$,系统的误差曲线如图 2 所示.

4 结论

研究了一类分数阶复杂网络混沌系统及其时滞系统的投影同步问题,基于 Lyapunov 稳定性理论和分数阶微积分的相关理论,给出了分数阶复杂网络以及分数阶时滞复杂网络实现投影同步的充分性条件,将系统实现投影同步的充分性条件转化为矩阵不等式,从而更容易 MATLAB 求解,仿真结果表明了方法的正确性.

参 考 文 献

1 徐争辉,刘友金,谭文等. 一个对称分数阶经济系统混沌特性分析. 系统工程理论与实践,2014,34(5):1237 ~ 1242 (Xu Z H, Liu Y J, Tan W, et al. Chaotic dynamics in a commensurate fractional-order nonlinear economic system. *Systems Engineering and Throry Practice*, 2014, 34(5):1237 ~ 1242 (in Chinese))

2 郝建红,宾虹,姜苏娜等. 分数阶线性系统稳定理论在混沌同步中的简单应用. 河北师范大学学报自然版,2014, 38(5):469 ~ 475 (Hao J H, Bin H, Jiang S N, et al. Stability theorem for fractional linear systems and its application in chaos synchronization. *Journal of Hebei Normal University(Natural Scuence Edition)*, 2014, 38(5):469 ~ 475 (in Chinese))

3 钟启龙,邵永辉,郑永爱. 基于 TS 模型的分数阶混沌系统同步. 扬州大学学报(自然版),2012,17(2):46 ~ 49 (Zhong Q L, Shao Y H, Zheng Y A. Synchronization of the fractional order chaotic systems based on TS models. *Journal of Yangzhou University(Natural Science Edition)*, 2012, 17(2):46 ~ 49 (in Chinese))

4 张云雷,吴超然. 基于反馈控制的分数阶时滞神经网络的同步. 重庆工商大学学报(自然版),2014,31(12):49 ~ 53(Zhang Y L, Wu C R. Synchronization of fractional-order neural network with delay based on feedback control. *Journal of Chongqing Technol Business University(Natural Science Edition)*, 2014, 31(12):49 ~ 53 (in Chinese))

5 韩敏,张雅美,张檬. 具有双重时滞的时变耦合复杂网络的牵制外同步. 物理学报,2015,64(7):5061 ~ 5069 (Han M, Zhang Y M, Zhang M. Outer syncronization analysis of two time-varying networks with double delays based on pinning control. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(7):

5061 ~ 5069 (in Chinese))

6 Lü L, Li G, Guo Y. Generalized chaos synchronization of a weighted complex network with different nodes. *Chinese Physics B*, 2010, 19(8): 5071 ~ 5077

7 Mei J, Jiang M H, Wang J. Finite-time structure identification and synchronization of drive-response systems with uncertain parameter. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, (18): 999 ~ 1015

8 余明哲,张友安. 一类不确定分数阶混沌系统的滑模自适应同步. 北京航空航天大学学报, 2014, 40(9): 1276 ~ 1280 (Yu M Z, Zhang Y A. Sliding mode adaptive synchronization for a class of fractional – order chaotic systems with uncertainties. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2014, 40(9): 1276 ~ 1280 (in Chinese))

9 严胜利,张昭晗. 一类不确定分数阶混沌系统的同步控制. 系统仿真技术, 2013, 9(4): 366 ~ 370 (Yan S L, Zhang Z H. Synchronization control of a class of uncertain fractional order chaotic systems. *System Simulation Technology*, 2013, 9(4): 366 ~ 370 (in Chinese))

10 潘广,魏静. 一种分数阶混沌系统同步的只适应滑模控制器设计. 物理学报, 2015, 64(4): 5051 ~ 5057 (Pan G, Wei J. Design of an adaptive sliding mode controller for synchronization of fractional-order chaotic systems. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(4): 5051 ~ 5057 (in Chinese))

11 张燕兰. 分数阶 Rayleigh-Duffing-like 系统的自适应追踪广义投影同步. 动力学与控制学报, 2014, 12(4): 348 ~ 352 (Zhang Y L. Adaptive tracking generalized projective synchronization of fractional Rayleigh-Duffing-like system. *Journal of Dynamics and Control*, 2014, 12(4): 348 ~ 352 (in Chinese))

12 董俊,张广军,姚宏,王珏,许根. 分数阶异结构超混沌系统完全同步与反相同步控制. 动力学与控制学报, 2014, 12(2): 119 ~ 126 (D J, Z G J, Yao H, Wang J, Xu G. The control of complete synchronization and anti-phase synchronization for fractional-order hyper-chaotic systems of different structures. *Journal of Dynamics and Control*, 2014, 12(2): 119 ~ 126 (in Chinese))

13 杨丽新,江俊. 分数阶复杂网络系统的混合投影同步研究. 动力学与控制学报, 2015, 13(1): 52 ~ 55 (Yang L X, Jiang J. Hybrid projective synchronization of fractional-order complex dynamical networks. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, 13(1): 52 ~ 55 (in Chinese))

14 Podlubny. Fractional differential equation. Academic Press: San Diego, CA , USA, 1999

15 胡建兵,赵灵冬. 分数阶系统稳定性理论与控制研究. 物理学报, 2013, 62(24): 5041 ~ 5047 (Hu J B, Zhao L D. Stability theorem and control of fractional systems. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(24): 5041 ~ 5047 (in Chinese))

16 赵灵冬. 分数阶非线性时滞系统的稳定性理论及控制研究[博士学位论文]. 上海:东华大学, 2014 (Zhao L D. The stability theory of fracional nonlinear tiem-delay systems and its control[PhD Thesis]. Shanghai: Donghua University, 2014 (in Chinese))

PROJECTIVE SYNCHRONIZATION OF A CLASS OF FRACTIONAL-ORDER COMPLEX NETWORK CHAOS SYSTEMS *

Mao Beixing† Li Qingbin

(*Department of Mathematics and Physics*, *Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management*, *Zhengzhou* 450015, *China*)

Abstract The paper studied the projective synchronization problem of a class of fractional-order complex network chaos systems based on fractional order systems theory. The sufficient conditions for fractional-order complex network and its time-delayed systems to realize the projective synchronization was proposed. Numerical simulations of chaotic system verified the validity of the proposed method.

Key words projective synchronization, fractional order systems, complex networks

Received 18 May 2015, revised 18 September 2015.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of Tianyuan (11226337)

† Corresponding author E-mail: bxmao329@163.com