第14卷第4期2016年8月
1672-6553/2016/14(4)/313-5

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 14 No. 4
Aug. 2016

两个耦合 Van der Pol 振子系统的一阶近似守恒量*

楼智美†

（绍兴文理学院物理系，绍兴 312000）

摘要 用直接积分法计算两个耦合 Van der Pol 振子系统的一阶近似守恒量，将两个耦合 Van der Pol 振子系统看成是未受微扰系统与微扰项的迭加，先通过坐标变换将未受微扰系统解耦，并对解耦系统的3种可能状态进行讨论，得到未受微扰系统的13个精确守恒量，再考虑微扰项对精确守恒量的影响，运用一阶近似守恒量的性质，得到1个稳定的一阶近似守恒量. 另外，由13个精确守恒量直接得到13个平凡的一阶近似守恒量.

关键词 Van der Pol 振子系统， 精确守恒量， 一阶近似守恒量

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-58

引言

许多实际力学系统的运动微分方程中常常含非线性微扰项，由于微扰项的存在，使力学系统的对称性遭到破损，一些精确守恒量的形式发生变化或消失，精确解不再成立，稳定性受到影响. 因此，研究实际力学系统的近似守恒量对于研究其力学特性至关重要[1-13]. 目前关于微分方程近似守恒量的研究主要采用近似 Lie 对称性理论[1]、近似 Noether 对称性理论[2] 和直接积分法[3]. 引进近似的群无限小变换，微分方程在此变换下近似保持不变则为近似 Lie 对称性；哈密顿作用量在此变换下近似保持不变则为近似 Noether 对称性，所得的守恒量为近似守恒量；直接积分法是从近似守恒量的性质出发，把受微扰系统视为未受微扰系统与微扰项的迭加，先选择合适的方法求得未受微扰系统的精确守恒量，再考虑微扰项对精确守恒量的影响，最后利用近似守恒量的性质求得守恒量. 用近似对称性理论求近似守恒量要用到 Lagrange 函数和近似的群无限小变换，并需解出近似的无限小生成元、规范函数，计算较繁复，理论性强又比较抽象. 用直接积分法求近似守恒量，思想方法简单，物理意义明确，计算方法灵活.

两个耦合 Van der Pol 振子系统是一实际的力学系统[4]，已广泛应用于非线性动力学和数学物理的研究中. 本文采用直接积分法计算两个耦合 Van der Pol 振子系统的一阶近似守恒量，先通过坐标变换对未受微扰系统进行解耦，并对解耦系统的3种可能状态进行讨论，直接得到未受微扰系统在新坐标系下的13个精确守恒量，利用坐标反变换得到未受微扰系统在原坐标系下的13个精确守恒量，再考虑微扰项对精确守恒量的影响，运用一阶近似守恒量的性质，得到1个稳定的一阶近似守恒量. 另外，根据一阶近似守恒量的性质，由13个精确守恒量直接得到13个平凡的一阶近似守恒量.

1 未受微扰作用系统的精确守恒量

两个耦合 Van der Pol 振子系统的运动微分方程可以表示成[4]

$$\ddot{x}_1+\varepsilon(x_1^2-1)\dot{x}_1+x_1=A(x_2-x_1)+B(\dot{x}_2-\dot{x}_1) \tag{1a}$$

$$\ddot{x}_2+\varepsilon(x_2^2-1)\dot{x}_2+x_2=A(x_1-x_2)+B(\dot{x}_1-\dot{x}_2) \tag{1b}$$

其中 $0<\varepsilon\ll1$，为微扰系数. A,B 为线性耦合系数，且为不为0的实常数.

系统(1)可以改写成

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1&=-x_1+A(x_2-x_1)+B(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+\varepsilon(1-x_1^2)\dot{x}_1\\&=g_1(\varepsilon^0)+\varepsilon g_1(\varepsilon^1)\end{aligned} \tag{2a}$$

2015-04-16 收到第1稿，2015-07-02 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11472177)
† 通讯作者 E-mail: louzhimei@usx.edu.cn

$$\ddot{x}_2 = -x_2 + A(x_1 - x_2) + B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \varepsilon(1 - x_2^2)\dot{x}_2 = g_2(\varepsilon^0) + \varepsilon g_2(\varepsilon^1) \tag{2b}$$

与系统(2)相应的未受微扰作用系统的运动微分方程可表示成

$$\ddot{x}_1 = -x_1 + A(x_2 - x_1) + B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \tag{3a}$$

$$\ddot{x}_2 = -x_2 + A(x_1 - x_2) + B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \tag{3b}$$

系统(2)可以看成是系统(3)与微扰项 $\varepsilon g_1(\varepsilon^1)$、$\varepsilon g_2(\varepsilon^1)$的迭加，系统(3)是两个线性耦合的振子系统. 引进坐标变换

$$u_1 = x_1 + x_2, u_2 = x_1 - x_2 \tag{4}$$

对系统(3)解耦后得

$$\ddot{u}_1 = -u_1 \tag{5a}$$

$$\ddot{u}_2 = -(1+2A)u_2 - 2B\dot{u}_2 \tag{5b}$$

在新坐标系下,系统(5)不再相互耦合,可以方便地求得系统(5)在新坐标系下的精确守恒量,再利用坐标反变换可求得系统(5)在原坐标系下的精确守恒量.

(5a)式表示谐振子的运动微分方程,在 A、B 任意取值下,(5a)式存在两个基本的精确守恒量[14]

$$I_0^1 = u_1\sin t + \dot{u}_1\cos t = (x_1 + x_2)\sin t + (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)\cos t \tag{6a}$$

$$I_0^2 = u_1\cos t - \dot{u}_1\sin t = (x_1 + x_2)\cos t - (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)\sin t \tag{6b}$$

由 I_0^1, I_0^2 可构建不显含时间的精确守恒量

$$I_0^3 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \tag{7}$$

精确守恒量 I_0^3 具有能量的量纲.

(5b)式表示线性阻尼振子的运动微分方程,其精确守恒量与 A、B 的取值有关. (5b)式的解存在如下三种可能状态,在不同的状态下,其中一些精确守恒量的表达式也不同.

1) $B^2 > 1 + 2A$,为过阻尼状态,(5b)式存在两个基本的精确守恒量

$$\begin{aligned} I_0^4 &= [\dot{u}_2 + (B + \sqrt{B^2 - 1 - 2A})u_2]e^{(B - \sqrt{B^2-1-2A})t} \\ &= [(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (B + \sqrt{B^2 - 1 - 2A}) \cdot (x_1 - x_2)]e^{(B - \sqrt{B^2-1-2A})t} \end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned} I_0^5 &= [\dot{u}_2 + (B - \sqrt{B^2 - 1 - 2A})u_2]e^{(B + \sqrt{B^2-1-2A})t} \\ &= [(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (B - \sqrt{B^2 - 1 - 2A}) \cdot (x_1 - x_2)]e^{(B + \sqrt{B^2-1-2A})t} \end{aligned} \tag{8b}$$

特别地，当 $A = -\frac{1}{2}$时，(8)式可简化为

$$I_0^6 = \dot{u}_2 + 2Bu_2 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + 2B(x_1 - x_2) \tag{9a}$$

$$I_0^7 = \dot{u}_2 e^{2Bt} = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)e^{2Bt} \tag{9b}$$

2) $B^2 < 1 + 2A$，为欠阻尼状态，(5b)式存在两个基本的精确守恒量[15]

$$\begin{aligned} I_0^8 &= [\omega u_2\sin(\omega t) + (\dot{u}_2 + Bu_2)\cos(\omega t)]e^{Bt} \\ &= [\omega(x_1 - x_2)\sin(\omega t) + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + B(x_1 - x_2))\cos(\omega t)]e^{Bt} \end{aligned} \tag{10a}$$

$$\begin{aligned} I_0^9 &= [\omega u_2\cos(\omega t) - (\dot{u}_2 + Bu_2)\sin(\omega t)]e^{Bt} \\ &= [\omega(x_1 - x_2)\cos(\omega t) - (\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + B(x_1 - x_2))\sin(\omega t)]e^{Bt} \end{aligned} \tag{10b}$$

其中 $\omega = \sqrt{1 + 2A - B^2} > 0$. 特别地,当 $A = \frac{B^2}{2}$时,$\omega = 1$,上式简化为

$$\begin{aligned} I_0^{10} &= [u_2\sin t + (\dot{u}_2 + Bu_2)\cos t]e^{Bt} \\ &= [(x_1 - x_2)\sin t + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + B(x_1 - x_2))\cos t]e^{Bt} \end{aligned} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned} I_0^{11} &= [u_2\cos t - (\dot{u}_2 + Bu_2)\sin t]e^{Bt} \\ &= [(x_1 - x_2)\cos t - (\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + B(x_1 - x_2))\sin t]e^{Bt} \end{aligned} \tag{11b}$$

3) $B^2 = 1 + 2A$，为临界阻尼状态，(5b)式存在一个基本的精确守恒量

$$I_0^{12} = (\dot{u}_2 + Bu_2)e^{Bt} = [(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + B(x_1 - x_2)]e^{Bt} \tag{12}$$

在上述三种可能状态下,可以统一构建一个具有能量量纲的精确守恒量

$$\begin{aligned} I_0^{13} &= I_0^4 I_0^5 = (I_0^8)^2 + (I_0^9)^2 = (I_0^{12})^2 \\ &= [(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + 2B(x_1 - x_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (1 + 2A)(x_1 - x_2)^2]e^{2Bt} \end{aligned} \tag{13}$$

综上所述,精确守恒量 I_0^1, I_0^2, I_0^3, I_0^{13} 与 A、B 的取值无关,在三种可能状态下均存在. 在过阻尼状态下,另外存在两个精确守恒量 I_0^4, I_0^5, 在 $A = -\frac{1}{2}$ 的特殊情况下, I_0^4, I_0^5 分别可简化为 I_0^6, I_0^7. 在欠阻尼状态下,另外存在两个精确守恒量 I_0^8, I_0^9, 在 $A = \frac{B^2}{2}$的特殊情况下, I_0^8, I_0^9 分别可简化为 I_0^{10}, I_0^{11}. 在临界阻尼状态下,另外存在一个精确守恒量 I_0^{12}.

2 耦合 Van der Pol 振子系统的一阶近似守恒量

设耦合 Van der Pol 振子系统(2)的一阶近似

守恒量可表示成[5]

$$I^{\alpha}=I_0^{\alpha}+\varepsilon I_1^{\alpha}, \tag{14}$$

其中 I^{α} 表示系统的第 α 个一阶近似守恒量,I_0^{α} 表示第 α 个一阶近似守恒量的精确守恒量部分,可根据未受微扰系统求得. I_1^{α} 表示第 α 个一阶近似守恒量的一阶微扰系数,可根据近似守恒量的性质求得. 若(14)式中的 I_0^{α} 不为0, I_1^{α} 为0,则称 $I^{\alpha}=I_0^{\alpha}$ 为系统的精确守恒量. 若(14)式中的 I_0^{α} 为0, I_1^{α} 不为0,则称 $I^{\alpha}=\varepsilon I_1^{\alpha}$ 为系统的平凡的一阶近似守恒量. 若(14)式中的 I_0^{α} 和 I_1^{α} 均不为0, 则称 I^{α} 为稳定的一阶近似守恒量.

一阶近似守恒量的性质为[5]

$$\frac{dI}{dt}=O(\varepsilon^2) \tag{15}$$

将(14)式代入(15)式并展开,令 $\varepsilon^0,\varepsilon^1$ 的系数分别等于0,忽略 ε^2 以上项,可得

$$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^0)=0 \tag{16a}$$

$$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^1)+\frac{dI_1}{dt}(\varepsilon^0)=0 \tag{16b}$$

将上节中得到的未受微扰系统的精确守恒量 I_0^{α}($i=1,2,\cdots,13$)分别代入$\frac{dI_0^{\alpha}}{dt}$,并考虑(2)式中的 $g_1(\varepsilon^1)$,$g_2(\varepsilon^1)$项,得

$$\frac{dI_0^1}{dt}(\varepsilon^1)=[(1-x_1^2)\dot{x}_1+(1-x_2^2)\dot{x}_2]\cos t \tag{17a}$$

$$\frac{dI_0^2}{dt}(\varepsilon^1)=-[(1-x_1^2)\dot{x}_1+(1-x_2^2)\dot{x}_2]\sin t \tag{17b}$$

$$\frac{dI_0^3}{dt}(\varepsilon^1)=(\dot{x}_1+\dot{x}_2)[(1-x_1^2)\dot{x}_1+(1-x_2^2)\dot{x}_2] \tag{17c}$$

$$\frac{dI_0^4}{dt}(\varepsilon^1)=[(1-x_1^2)\dot{x}_1-(1-x_2^2)\dot{x}_2]e^{(B-\sqrt{B^2-1-2A})t} \tag{17d}$$

$$\frac{dI_0^5}{dt}(\varepsilon^1)=[(1-x_1^2)\dot{x}_1-(1-x_2^2)\dot{x}_2]e^{(B+\sqrt{B^2-1-2A})t} \tag{17e}$$

$$\frac{dI_0^6}{dt}(\varepsilon^1)=(1-x_1^2)\dot{x}_1-(1-x_2^2)\dot{x}_2 \tag{17f}$$

$$\frac{dI_0^7}{dt}(\varepsilon^1)=[(1-x_1^2)\dot{x}_1-(1-x_2^2)\dot{x}_2]e^{2Bt} \tag{17g}$$

$$\frac{dI_0^8}{dt}(\varepsilon^1)=[(1-x_1^2)\dot{x}_1-(1-x_2^2)\dot{x}_2]\cos(\omega t)e^{Bt} \tag{17h}$$

$$\frac{dI_0^9}{dt}(\varepsilon^1)=-[(1-x_1^2)\dot{x}_1-(1-x_2^2)\dot{x}_2]\sin(\omega t)e^{Bt} \tag{17i}$$

$$\frac{dI_0^{10}}{dt}(\varepsilon^1)=[(1-x_1^2)\dot{x}_1-(1-x_2^2)\dot{x}_2]\cos(t)e^{Bt} \tag{17j}$$

$$\frac{dI_0^{11}}{dt}(\varepsilon^1)=-[(1-x_1^2)\dot{x}_1-(1-x_2^2)\dot{x}_2]\sin(t)e^{Bt} \tag{17k}$$

$$\frac{dI_0^{12}}{dt}(\varepsilon^1)=[(1-x_1^2)\dot{x}_1-(1-x_2^2)\dot{x}_2]e^{Bt} \tag{17l}$$

$$\frac{dI_0^{13}}{dt}(\varepsilon^1)=2[(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+B(x_1-x_2)]\cdot[(1-x_1^2)\dot{x}_1-(1-x_2^2)\dot{x}_2]e^{2Bt} \tag{17m}$$

将(17)式依次代入(16b)式并积分,只能得到1个与 I_0^6 相对应的 I_1^6,即

$$I_1^6=x_2-x_1+\frac{1}{3}x_1^3-\frac{1}{3}x_2^3 \tag{18}$$

则系统存在1个稳定的一阶近似守恒量

$$\begin{aligned}I^6&=I_0^6+\varepsilon I_1^6\\&=(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+2B(x_1-x_2)+\\&\quad\varepsilon(x_2-x_1+\frac{1}{3}x_1^3-\frac{1}{3}x_2^3)\end{aligned} \tag{19}$$

由于从未受微扰系统求得的 I_0^{α}($\alpha=1,2,\cdots,13$)的$\frac{dI_0^{\alpha}}{dt}(\varepsilon^0)$必为0,则系统一定存在13个平凡的一阶近似守恒量

$$I^{\alpha}=\varepsilon I_0^{\alpha}(\alpha=1,2,\cdots,13) \tag{20}$$

3　结论

本文用直接积分法计算两个耦合 Van der Pol 振子系统的一阶近似守恒量,将两个耦合 Van der Pol 振子系统看成是未受微扰系统(两个线性耦合的二阶微分方程组)与非线性微扰项的迭加,首先,通过坐标变换将未受微扰系统解耦,在新坐标系下,其中一个微分方程表示 $\omega=1$ 的谐振动,与耦合系数 A、B 的取值无关,另一微分方程与耦合系数 A、B 的取值有关,在不同的耦合系数下,存在3

种可能状态:过阻尼状态、欠阻尼状态和临界阻尼状态,文中对这 3 种可能状态进行了讨论,并得到未受微扰系统在新坐标系下的 13 个精确守恒量,通过坐标反变换得到原坐标系下的 13 个精确守恒量. 其次,考虑微扰项对精确守恒量的影响,即计算 $\frac{dI_0^\alpha}{dt}(\varepsilon^1)(\alpha=1,2,\cdots,13)$. 最后根据一阶近似守恒量的性质(16b)式得到了 1 个稳定的一阶近似守恒量. 由于 I_0^α 是未受微扰作用系统的精确守恒量,其 $\frac{dI_0^\alpha}{dt}(\varepsilon^0)$ 一定为 0,则 εI_0^α 一定是受微扰作用系统的平凡的一阶近似守恒量,文中得到了 13 个平凡的一阶近似守恒量. 结果表明:I_0^α 的个数与形式是由未受微扰系统决定的,并可以根据未受微扰系统的特点选择合适的方法求得精确守恒量;平凡的一阶近似守恒量的个数与 I_0^α 的个数相同,只相差一微扰系数;稳定的一阶近似守恒量的个数与形式是由微扰项和未受微扰系统共同决定的. 用直接积分法计算两个耦合 Van der Pol 振子系统的一阶近似守恒量,思路清晰,步骤简单,不会遗漏,值得推广应用.

参 考 文 献

1 Leach P G L, Moyo S, Cotsakis S, Lemmer R L. Symmetry, singularities and integrability in complex dynamics Ⅲ: approximate symmetries and invariants. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2001,8(1):139～156

2 Govinder K S, Heil T G, Uzer T. Approximate Noether symmetries. *Physics Letters A*, 1998,240(3):127～131

3 楼智美. 含非线性微扰项的二阶动力学系统的一阶近似守恒量的一种新求法. 物理学报, 2014,63(6):060202 (Lou Z M. A new method to obtain first order approximate conserved quantities of second-ordinary dynamics system containing nonlinear perturbation terms. *Acta Physica Sinica*, 2014,63(6):060202 (in Chinese))

4 Naeem I, Mahomed F M. Approximate first integrals for a system of two coupled van der Pol oscillators with linear diffusive coupling. *Mathematical and Computational Applications*, 2010,15(4):720～731

5 Unal G. Approximate generalized symmetries, normal forms and approximate first integrals. *Physics Letters A*, 2000, 266(2):106～122

6 Dolapci I T, Pakdemirli M. Approximate symmetries of creeping flow equations of a second grade fluid. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2004,39(10):1603～1619

7 Kara A H, Mahomed F M, Qadir A. Approximate symmetries and conservation laws of the geodesic equations for the Schwarzschild metric. *Nonlinear Dynamics*, 2008,51(1－2):183～188

8 Grebenev V N, Oberlack M. Approximate Lie symmetries of the Navier-Stokes equations. *Journal of Non-linear Mathematical Physics*, 2007,14(2):157～163

9 Johnpillai A G, Kara A H, Mahomed F M. Approximate Noether-typesymmetries and conservation laws via partial Lagrangians for PDEs with a small parameter. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 223(1):508～518

10 楼智美. 微扰 Kepler 系统轨道微分方程的近似 Lie 对称性与近似不变量. 物理学报, 2010,59(10):6764～6769 (Lou Z M. Approximate Lie symmetries and approximate invariants of the orbit differential equation for perturbed Kepler system. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(10):6764～6769 (in Chinese))

11 楼智美,梅凤翔,陈子栋. 弱非线性耦合二维各向异性谐振子的一阶近似 Lie 对称性与近似守恒量. 物理学报, 2012,61(11):110204 (Lou Z M, Mei F X, Chen Z D. The first-order approximate Lie symmetries and approximate conserved quantities of the weak nonlinear coupled two-dimensional anisotropic harmonic oscillator. *Acta Physica Sinica* 2012,61(11):110204 (in Chinese))

12 Zhang Z Y, Yong X L, Chen Y F. A new method to obtain approximate symmetry of nonlinear evolution equation form perturbations. *Chinese Physics B*, 2009,18(7):2629～2633

13 楼智美. 两自由度微扰力学系统的二阶近似守恒量. 动力学与控制学报, 2015,13(3):165～169 (Lou Z M. Second order approximate conserved quantities of two dimensional perturbed mechanics system. *Journal of Dynamics and Control*, 2015,13(3):165～169 (in Chinese))

14 丁光涛. 关于谐振子第一积分的研究. 物理学报, 2013,62(6):064502 (Ding G T. A study on the first integrals of harmonic oscillators. *Acta Physica Sinica*, 2013,62(6):064502 (in Chinese))

15 丁光涛. 关于线性阻尼振动第一积分的研究. 物理学报, 2013,62(6):064501 (Ding G T. On the first integrals of linear damped oscillators. *Acta Physica Sinica*,

2013,62(6):064501 (in Chinese))

FIRST ORDER APPROXIMATE CONSERVED QUANTITIES OF TWO COUPLED VAN DER POL OSCILLATORS SYSTEM *

Lou Zhimei†

(*Department of Physics*, *Shaoxing University*, *Shaoxing* 312000, *China*)

Abstract The first order approximate conserved quantities of two coupled Van der Pol oscillators system is investigated by using direct integral method. Two coupled Van der Pol oscillators system is taken as the combination of unperturbed system and perturbed terms. Firstly, the unperturbed system is decoupled by transforming coordinates, and thirteen exact conserved quantities of unperturbed system are obtain by discussing the three possible condition of uncoupled system. Second, the influence of perturbed terms on exact conserved quantities is examined. Finally, a stable first order approximate conserved quantity of the system is developed according to the characteristic of the first order approximate conserved quantities. In additional, thirteen trivial conserved quantities from thirteen exact conserved quantities are also received.

Key words Van der Pol oscillators systems, exact conserved quantities, first order approximate conserved quantities

Received 16 April 2015, revised 02 July 2015.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11472177)

† Corresponding author E-mail: louzhimei@ usx. edu. cn