第 14 卷第 4 期 2016 年 8 月
1672-6553/2016/14(4)/301-6
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 14 No. 4
Aug. 2016

关于 Gauss 原理*

梅凤翔[1] 李彦敏[2†] 吴惠彬[3]

(1. 北京理工大学宇航学院,北京 100081)(2. 商丘师范学院物理与电气信息学院,商丘 476000)
(3. 北京理工大学数学学院,北京 100081)

摘要 Gauss 原理是分析力学中的一个微分变分原理,它在理论上简单,应用上有优势,而且适用于双面理想完整系统和非完整系统. 本文对这个原理的形成和发展给出一些史料,并提出一些看法.

关键词 分析力学, Gauss 原理, 史料

DOI: 10.6052/1672-6553-2016-08

引言

学科史研究是科学技术史研究的一个重要领域. 分析力学史是力学史的一部分. 本文就分析力学的 Gauss 原理的形成和发展给出一些史料,包括 Gauss 的原述以及众多名家对原理的表述,并提出一些看法.

1 Gauss 简介

Gauss CF(1777 ~ 1855)汉译高斯,德国数学家、天文学家、物理学家. 生于不伦瑞克,卒于哥廷根. 少年时即显示数学才能,1792 年进不伦瑞克卡罗林学院学习,1795 年进哥廷根大学学习,1799 年得出代数学基本定律的第一个证明,以此获得赫尔姆施泰特大学博士学位. 其后独立研究数学和天文学,1807 年被聘为哥廷根大学天文学教授兼天文台台长,直至去世. 在数论方面,1801 年出版《算术研究》,建立了同宗理论. 引进被称为高斯的数域,开拓了代数数论. 在代数方面,对代数学基本定理给出四个证明. 引进二次型的等价及合成,预示着抽象代数的萌芽. 在概率方面,系统发展最小二乘法和误差理论. 在几何学方面,是非欧几何最早发现者. 在曲面微分几何方面,引进被称为高斯的映射,高斯的曲率,开拓了内蕴几何学. 在变分法方面,首先解决了具有二重积分的变分问题. 高斯的研究涉及数学所有分支,成为 19 世际上半叶德国最著名数学家. 他也在将数学应用于天文学、土地测量、磁理论等方面. 他在一般力学的唯一工作是在 1829 年发表的"关于一个新的普遍原理",被称为高斯原理.

2 Gauss 的原述

大数学家 Gauss 涉及一般力学的唯一工作是他在 1829 年发表的"关于力学的一个新的普遍原理."[1]

这个原理表述如下:

"彼此以任何方式相联的,同时受有任何外限制的某个质点系的运动,在每一瞬时,完成与自由运动一致的最大可能的运动,或者在最小可能的拘束下的运动,而作为对所有系统在每一瞬时都有效的拘束的度量研究作为每个点对其自由运动偏离的平方与质量积之和."[1-2]

设 $m, m', m''\cdots$ 为点的质量, $a, a', a'', \cdots$ 为在时刻 t 其相应的位置, $b, b', b'', \cdots$ 为这些点在无限小时间间隔 $\mathrm{d}t$,在力作用下和所得速度改变后的位置(在所有点在时间之隔 $\mathrm{d}t$ 内都是自由条件下). 系统这些点真实位置 $c, c', c'', \cdots$ 是所有为系统约束允许的可能的位置中使物理量

$$m(bc)^2 + m'(b'c')^2 + m''(b''c'')^2 + \cdots = Z_w \quad (1)$$

取极小值. 这个量 Gauss 称为拘束(Zwang)[2].

[注] 1) Gauss 原理的俄译文看到两种,上面是文献[2]的汉译. 2) 原理还没有给出它的解析表

2015-07-12 收到第 1 稿,2015-09-26 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(10932002, 11272050, 11372169)
† 通讯作者 E-mail: hnynmnl@163.com

达式.

3 Gauss 原理的发展

3.1 原理的解析表达式

十年后这个新原理引起德国学者的关注. 在 Gauss 工作过的 Göttingen 大学和德国其它城市的学校注意到这个原理并给以发展. 例如,1858 年 Gauss 在 Göttingen 的学生 Ritter 提交学位论文"关于 Gauss 最小拘束原理",指出 Gauss 原理可导出静力学基本定理,特别是平行四边形法则[2].

Gauss 原理的解析表达主要是 Scheffler 发表于 1858 年的工作"关于 Gauss 力学基本定律". 设 x_i 和 $\dot{x}_i$ 为点 m_i 在时刻 t 的横坐标和沿横轴的速度分量. 如果 $\ddot{x}_i$ 是点由系统所施力和约束产生的运动加速度在该时刻沿横轴的投影,那么该点在时刻 $t+\mathrm{d}t$ 在真实运动中横坐标等于

$$x_i+\dot{x}_i\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\ddot{x}_i(\mathrm{d}t)^2 \tag{2}$$

另一方面,如果没有约束,点在同一时刻的横坐标为

$$x_i+\dot{x}_i\mathrm{d}t+\frac{1}{2m_i}X_i(\mathrm{d}t)^2 \tag{3}$$

其中 X_i 为所加力的分量. 在计算上面两个量时精确到二阶小量. 类似地计算 y 轴和 z 轴的值. 进而, Scheffler 按 Gauss 拘束得到解析表达,他组成自由运动和真实运动的坐标差,取其平方除以质量,再求和,有

$$Z_w=\sum\frac{1}{m_i}\left[(X_i-m_i\ddot{x}_i)^2+(Y_i-m_i\ddot{y}_i)^2+(Z_i-m_i\ddot{Z}_i)^2\right] \tag{4}$$

此后 Gauss 最小拘束原理表示为,相对这些点由给定点和给定大小方向的速度发生的所有可能的与约束相符的运动来说,拘束的局部极小条件. 因此,在时刻 t,点的坐标和速度在 Gauss 原理中不变分,仅加速度变分. Gauss 拘束极小性条件按 Scheffler 写成形成[2]

$$\delta Z_w=\sum\left[(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i+(Y_i-m_i\ddot{y}_i)\delta\ddot{y}_i+(Z_i-m_i\ddot{z}_i)\delta\ddot{z}_i\right]=0 \tag{5}$$

如果约束是双面的. 这些约束可以是完整的和非完整的.

Boltzmann 和 Gibbs19 世纪 90 年代指出, Gauss-Scheffler 原理形式可由 d′Alembert 原理和可能位移原理得到.

Ostrogradsky 学派的 Rakhmanikov(1826 ~ 1897) 1878 年在基辅大学学报上发表论文"最小损失功原理作为力学的一般原理."[2]

[注] 1)原理的前提条件应是,约束是双面理想的,不论完整与否. 当然,那时还没有理想约束的概念. 2)最小损失功原理是对 Gauss 原理的一种解释.

3.2 Appell 的论述

Appell 在其著作中写道:

"学者们找到了各种方法将运动方程引向一个原理,使积分或函数与可能接近的运动相比,取极小. 这个思想首先是最小作用量原理,而后是更一般的 Hamilton 原理,由此很简单地导出完整系统的 Lagrange 方程,但在非完整系统情形,这个结论已不正确. 这里我们换成 Gauss 最小拘束原理. 这个原理是最普遍的,应用它时没有任何困难. 原理的优势在于,它有简单的解析表达,用寻求二阶函数的极小就可以找到任何系统的运动方程,不论完整的,还是非完整的."[3]

[注] 1) Appell 这段文字提到 Gauss 原理的优点. 2)未提前提条件,当然,Appell 时代仅有"无摩擦约束",还没有理想约束的提法.

3.3 理论力学基本教程的表述

Bukhgolts 的《理论力学基本教程》1939 年出第二版,并于 1957 年由钱尚武,钱敏翻译出版[4]. 书中写道:

"和达朗贝尔-拉格朗日原理比较起来,高斯原理的优越性在于,它使我们有可能在不管怎样的非完整约束下得出力学组的运动方程式. 因此高斯原理是最普遍的力学原理并具有很大的,发现新事物的价值,由于这种价值高斯原理成为力学进一步发展的基础."

"高斯原理就是:在每一瞬间,在主动力作用下并服从非自由无摩擦约束的力学组的真正运动和从同一初形相并具同样初速度以那一性质不同的所有运动学上可能的(亦即和同样一些约束相符合的)运动不同的地方是,对真正的运动来说对自由运动偏离的变量,亦即拘束是极小."

[注] 1)这个教程是作者 20 世纪 50 年代上学时的主要参考书,它本身也很有名. 2)上面文字提到 Gauss 原理的普遍性和优势. 3)文字中有"非自

由无摩擦约束”,就是指理想约束.

3.4　胡助、赵进义的一个报告

北京工业学院教授胡助(1894 ~ 1977)和赵进义(1902 ~ 1972)作为 Appell 当年的学生,1964 年在全国第一届一般力学学术会议上做一报告“关于非完整系统的 Appell 定义和 Appell 方程”,深入讨论了 Appell 方程和 Gauss 原理之间的关系.

[注] 1)这是我国有关 Appell 方程和 Gauss 原理的早期工作. 胡助先生 60 年代有一《分析力学讲文》,并为本科生开设“分析力学”课程. 因此,60 年代北京工业学院成为我国分析力学研究的“一个点儿”,为后来北京理工大学的分析力学研究起了很好的带头做用. 2)刘桂林(1934 ~ 2009)和刘思远在北京工业学院曾为胡助先生的助手. 刘桂林主编《分析力学的范例与习题》,刘思远发表过“变质量可控力学系统的 Gauss 原理和 Appell 方程”(1986).

3.5　中国大百科全书 · 力学

中国大百科全书 · 力学第 172 页的条目“高斯原理”,写道[5]:

“高斯原理(Gauss principle)又称高斯最小拘束原理,它是分析力学中的普遍微分变分原理之一. 高斯原理可表述为:质点系真实运动的加速度是所有符合约束的可能加速度中使拘束函数取小值者. 在一质点系($m_1, m_2, \cdots, m_n$)在理想约束的一阶(线性或非线性)约束或完整约束以及主动力($F_1, F_2, \cdots, F_n$)的作用下从某一可能状态出发,则对于符合约束的各可能加速度($\ddot{r}_1, \ddot{r}_2, \cdots, \ddot{r}_n$)可建立拘束函数

$$Z = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \right)^2 \tag{6}$$

如果记 δ_G 为符合约束的可能加速度变分,由高斯原理可知,系统真实运动满足

$$\delta_G Z = \sum (m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i) \cdot \delta_G \ddot{r}_i = 0 \tag{7}$$

这就是高斯原理的数学表达式. 高斯原理具有简明的极值意义,既适用于一阶线性系统(包括完整系统),也适用于一阶非线性约束系统.

高斯原理的优点不仅在于原理上的普遍性. 而且还有很大的实用价值. 目前在机器人的设计和分析中使用的方法之一就是由高斯原理出发,在电子计算机中直接建立拘束函数变分问题,用优化算法和动态规划的办法求解机器人的运动和约束反力.”

中国大百科全书 · 力学第 310 页右倒数第 9 行,写道[5]:

“积分形式变分原理的建立是对力学的发展,无论在近代或现代,无论在理论上或应用上,都具有重要的意义. 积分形式变分原理除 W · R · 哈密顿在 1834 年所提出的外,还有 C · F · 高斯在 1829 年提出的最小拘束原理,为力学运动方程的求解提供途径.”

《中国力学学科史》第 21 页重复了以上段落[6].

[注] 1)《中国大百科全书 · 力学》的条目“高斯原理”由陈滨教授书写. 这个条目写得好. 不过,在“理想约束”前应加“双面”. 2)《中国大百科 · 力学》和《中国力学学科史》中将 Gauss 原理当作积分形式变分原理,是一个误判,因为它是一个微分变分原理.

3.6　力学词典

《力学词典》第 145 页有条目“高斯原理”写道[7]:

“高斯原理(Gauss principle) 动力学普遍原理,又称最小拘束原理,由高斯(C · F · Gauss 1777 ~1856)于 1829 年提出而得名. 对任意有理想约束的质点系,高斯原理要求

$$\sum (m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i) \cdot \delta \ddot{r}_i = 0 \tag{8}$$

其中 m_i, r_i, F_i 为系统中第 i 个质点的质量,矢径和主动力,$\delta \ddot{r}_i$ 为该点在同一时刻保持位置和速度不变且在约束条件下的加速度变分. 高斯原理也可作为一种变分原理表述为:在相同的理想约束条件下,质点系的各种可能运动中,各质点真实运动加速度所对应的拘束函数 C 为最小值. C 定义为

$$C = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} \right)^2 \tag{9}$$

高斯原理广泛应用于机器人动力学.”

[注] 1)这个条目没有《中国大百科全书 · 力学》的条目好,因为前一式已是变分原理,怎么还会有“可作为一种变分原理”? 2)原理的前提应加“双面理想”. 3)拘束函数一般用 Z 或 Z_ω,很少用字母 C.

3.7　Mach 对 Gauss 原理的批判

Mach 在其名著《力学及其发展的批判历史概论》(1883)[8]中专门有一节“最小约束原理”(中文译本 P421 ~ P436)有 9 小节.

第1小节指出“高斯评论,没有本质上新颖的原理现在能够在力学中确立;但是,这并非排除新观点的发现,从这些观点可以富有成效地凝视力学现象. 高斯原理提供了这样的观点.”

第2小节指出“该原理包括静力学和动力学二者的实例.”

第3小节指出“新原理等价于达朗的原理.”

第4小节指出“实际运动总是这样的:$\sum ms^2(1)$ 或 $\sum ps(2)$ 或 $\sum m\delta^2(3)$ 是最小值.”

第5、6、7小节给出一些简单例子说明高斯原理.

第8节指出“高斯原理没有提供实质上新的洞察或察觉”. “该原理仅仅在形式上而不是在内容上是新的.”

第9小节指出“我们不能接受他(Scheffler)本人提出的东西作为新原理,因为在形式和含义两方面它都等价于达朗伯-拉格朗日.”

[注]中文译本“最小约束原理”一般译为“最小拘束原理”,即 Gauss 原理. Mach 的批判肯定了 Gauss 原理提供了新观点,但认为形式上是新的,内容上不是新的. Mach 是用简单例子来得出这个结论的,当然,在 Mach 时代是可以理解的. 今天看来,这个论断有点儿过头.

3.8 Gauss 原理的高阶发展

Mangeron-Deleanu 原理为[9-11]

$$\sum (F_i - m_i\ddot{r}_i)\cdot\delta \overset{(m)}{r_i} = 0 \quad (m = 0,1,2,\cdots)$$

$$\delta r_i = \delta \dot{r}_i = \cdots = \delta \overset{(m-1)}{r_i} = 0 \tag{10}$$

当 $m=0$ 时为 d'Alembert-Lagrange 原理,当 $m=1$ 时为 Jourdain 原理;当 $m=2$ 时为 Gauss 原理.

原理的广义坐标表达有

Euler-Lagrange 形式

$$\sum \left(Q_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s}\right) + \delta \overset{(m)}{q_s} = 0 \tag{11}$$

Nielsen 形式

$$\sum \left(Q_s - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} + 2\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) + \delta \overset{(m)}{q_s} = 0 \tag{12}$$

Appell 形式

$$\sum \left(Q_s - \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}\right) + \delta \overset{(m)}{q_s} = 0 \tag{13}$$

Tzénoff 形式

$$\sum \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}\delta \overset{(m)}{q_s} = 0 \tag{14}$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\ddot{T} - 3\sum \frac{\partial T}{\partial q_s}\ddot{q}_s\right) - \sum Q_s\ddot{q}_s \tag{15}$$

Dolaptchiew 形式

$$\sum \frac{\partial K_m}{\partial \overset{(m)}{q_s}}\delta \overset{(m)}{q_s} = 0$$

$$K_m = \frac{1}{m}\left\{ \overset{(m)}{T} - (m+1)\sum \frac{\partial T}{\partial q_s}\overset{(m)}{q_s}\right\} - \sum Q_s \overset{(m)}{q_s} \tag{16}$$

陈立群形式[12]

$$\sum \left(-\eta\frac{\partial \overset{(x-2)}{S}}{\partial \overset{(x)}{q_s}} - \theta\frac{d}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overset{(z-1)}{T}}{\partial \overset{(z)}{q_s}} - \alpha\frac{\partial \overset{(u)}{T}}{\partial \overset{(u)}{q_s}} - \beta\frac{\partial \overset{(\nu)}{T}}{\partial \overset{(\nu)}{q_s}} - \gamma\frac{\partial \overset{(\omega)}{T}}{\partial \overset{(\omega)}{q_s}} + Q_s\right)\delta \overset{(m)}{q_s} = 0 \tag{17}$$

其中 $x\geqslant 2, z\geqslant 1$ 为整数,实数 $\eta,\theta,\alpha,\beta,\gamma$ 和非负整数 u,v,ω 满足

$$-\eta+\alpha+\beta+\gamma=1$$

$$\eta+\theta+\alpha u+\beta v+\gamma\omega=1 \tag{18}$$

若取

$$\eta=\theta=\beta=0$$

$$\alpha=\frac{1}{m},\ u=m,\ \gamma=-\frac{m+1}{m},\ \omega=0 \tag{19}$$

则它成为 Dolaptchiew 形式.

[注] 以上各种表达中,当属陈立群的最为一般,通过调节系数可以得到多种形式.

3.9 Gauss 原理的完备性

由 Gauss 原理可导出 Jourdain 原理和 d'Alembert-Lagrange 原理. 由 Gauss 原理可建立完整系统和非完整系统的动力学方程. Gauss 原理在处理理想的一阶约束系统是完备的,不再需要附加其他的原理性假定了[13].

[注]“理想”前应加“双面”.

3.10 Gauss 原理的应用

1)在机器人动力学中的应用

正如 Euler 指出的,解决力学问题有两种方法:一种方法是根据平衡或运动规律的直接方法;另一种方法是运用极大值或极小值的公式,通过求极大值或极小值的方法求出这些公式的解. 描述构件之间具有各种约束的机器人非常复杂的空间机构时,确定闭式的动力学方程有不少困难. 但建立相应的极值问题并不困难,这种极值问题作为很一般的数学规划问题. 如果写成泛函,通过选取所有

未知量使之取极小值,并确定对这些未知量所加的全部约束,那么就每一具体情况用数字计算机求这种极值问题的数值解,要比寻求解的解析式容易得多[14]. 文献[14]就用 Gauss 原理解机器人动力学问题.

2)在建立非线性振动方程近似解的应用[15]

[注] Gauss 原理的进一步应用值得开展研究.

3.11 Gauss 原理与 Chetaev 条件

非线性非完整约束

$$f_\beta(t,q_s,\dot{q}_s)=0 \tag{19}$$

加在虚位移 δq_s 上的条件为

$$\sum \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \tag{20}$$

这就是 Chetaev 条件. 将约束方程对 t 求导,并取 Gauss 变分,则有

$$\sum \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\partial \ddot{q}_s = 0 \tag{21}$$

Chetaev 指出,"…对非线性约束引出可能位移的概念,使得同时保持 d′Alembert 原理和 Gauss 原理…"[16]"考虑到 Appell 条件对相应结果的应有贡献,Novoselov 称这些条件为 Appell-Chetaev 条件…"[17]"注意到,Hamel1938 年的文章[18],用这样的观点研究了这一问题."[17]因此,这条件也叫 Chetaev-Hamel 条件. 考虑到与 Gauss 原理的关联,这条件也叫 Gauss-Appell-Chetaev 条件[13]. Papastavridis 称其为 Maure-Appell-Chetaev-Hamel 条件[17,19].

[注] 1)Chetaev 条件实际上是想让 a′Alembert-lagrange 原理可以适用于一阶非线性非完整约束系统而引出的条件,因此,要求 a′Alembert-lagrange 原理与 Gauss 原理同时保持.

2)Chetaev 条件有多种称谓,我们以为称 Gauss-Appell-Chetaev-Hamel 为好.

3.12 Gauss 原理的疑点

吕茂烈先生 2012 年在"动力学与控制学报"上发表论文"经典力学的一个新基本原理及其几个重要应用."[20]文章指出,Gauss 原理的理论性疑点有:

1)在拘束函数中"未显示出约束力,因而不能说明约束的物理性质,有无摩擦力都一样…. 而原理的结论却被表达为只适用于无摩擦的情形."

2)Gauss 将"偏离"比拟人为"误差",从而借助他的误差理论来找出偏离的最小值. 这个比拟是否成立,也成为疑点.

在这篇文章中吕茂烈先生提出零原理,指出 Newton 第二定律,d′Alembert 原理,Gauss 原理都是其特殊情形.

[注]吕茂烈先生的文章值得重视.

4 结论

(1)本札记给出了 Gauss 原理的起源与发展的一些史料,并在各处[注]中给出点评.

(2)Gauss 在他的"关于力学的一个新的一般原理"(1829)中并没有给出拘束函数的解析表达式. 这个解析表达式是 Scheffler 29 年后的 1858 年给出的. 因此,Gauss 原理也叫 Gauss-Scheffler 原理.

(3)在微分变分原理中,只有 Gauss 原理具有极值性质,d′Alembert-lagrange 原理和 Jourdain 原理都没有极值性质.

(4)Appell 方程和 Chetaev 条件都与 Gauss 原理密切相关.

参 考 文 献

1 Gauss C F. Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. *Crette′s Journal für die reine Math*, 1829,4:233

2 Моисеев НД. Очерки Развития Механики. Москва: Иэд Московского Ун-та, 1961

3 Appell P. Traité de Mécanique Ratiormelle. T Ⅱ. Sixiéme Éd, Paris: Gauthier-Villars, 1953

4 H·H·蒲赫哥尔茨. 理论力学基本教程,下册. 钱尚武, 钱敏 译. 北京:北京高等教育出版社, 1957 (Bukhgolts H H. Theoretical mechanics basic course, Qian S W, Qian M. Beijing: Higher education press, 1957 (in Chinese))

5 中国大百科全书编辑部. 中国大百科全书·力学. 北京:中国大百科全书出版社, 1985 (China encyclopedia editorial office. Encyclopedia of China · Mechanics. Beijing: China Encyclopedia Press, 1985 (in Chinese))

6 中国力学学会. 中国力学学科史. 北京: 中国科学技术出版社, 2012 (Mechanics society of China. Discipline historyof china mechanics. Beijing: China Science and Technology Press, 2012 (in Chinese))

7 力学词典编辑部. 力学词典. 北京: 中国大百科全书出版社, 1990 (Mechanics dictionary editorial office. Mechanics dictionary. Beijing: China Encyclopedia Press, 1990 (in Chinese))

8 恩斯特·马赫. 力学及其发展的批判历史概论. 李醒民译. 北京：商务印书馆，2014（Ernst Mach. An critical historical introduction to mechanics and its development. Li X M. Beijing：The Commercial Press，2014（in Chinese））

9 Mangeron D，Deleanu S. Sur une classe d′équations de la mécaniqne analytique au sens de I Tzénoff. C R Acad Bulgare des Sciences 1962，15（1）：9～12

10 Добронравов ВВ. Основы Механики Неголономных Систем. Москва：Высчая Школа，1976

11 梅凤翔，刘端，罗勇. 高等分析力学. 北京：北京理工大学出版社，1991（Mei F X，Liu D，Luo R. Advanced analytical mechanics. Beijing：Beijing Institute of Technology Press，1991（in Chinese））

12 陈立群. 万有D′Alembert原理的统一形式. 力学与实践，1991，13（1）：61～63（Chen L Q. The unity form of all D′ Alembert principle. *Mechanics in Engineering*，1991，13（1）：61～63（in Chinese））

13 陈滨. 分析动力学，第二版. 北京：北京大学出版社，2012（Chen B. Analytical dynamics，the second edition. Beijing：Peking University Press，2012（in Chinese））

14 B. П. 波谈夫. 操作机器人动力学与算法. 遇立基，陈循介译. 北京：机械工业出版社，1983（Волна В П. Operating robot dynamics and algorithm. Yu L J，Chen X J. Beijing：Mechanical Industry Press，1983（in Chinese））

15 Юшков МП. Построение Приближсенных Решений Уравнений Нелинейных Колебаний На Основе Принципа Гаусса. Вестн Ленангр. Ун-та，1984，13：121～123

16 Четлев НГ. Опринципе Гаусса. Изд Физ-Мат. Общеетва При Казанеком Унте，1932－1933，6（3）：68～71

17 Зегжда СА，Соитаханов Ш. Х，Юшков МП. Уравнения Движения Неголономных Систем и Вариационные Принципы Мехкики. Новый Класе Задач Управления. Москва：Физматлит，2005
C. A. 杰格日达，Ш. X. 索尔塔哈诺夫，M. П. 尤士科夫. 非完整系统的运动方程和力学的变分原理. 新一类控制问题. 梅凤翔译. 北京：北京理工大学出版社，2007（Зегжда С А，Соитаханов Ш Х，Юшков М П. The equation of motion of nonholonomic system and the variational principle of mechanics. A new kind of control problem. Mei F X. Beijing：Beijing Institute of Technology Press，2007（in Chinese））

18 Hamel G. Nichtholonome Systeme höherer Art. *Sitzung Sbererichte der Beliner Mathmatische Gesellschaft*，1938，37：41～52

19 Papastravridis J. Time-integral variational principles for nonlinear nonholonomic systems. *ASME*，*Journal of Applied Mechanics*，1997，64（4）：985～991

20 吕茂烈. 经典力学的一个新基本原理及其几个重要应用. 动力学与控制学报，2012，10（2）：107～116（Lü M L. A new fundamental principle of classical mechanics with some important applications. *Journal of Dynamics and Control*，2012，10（2）：107～116（in Chinese））

ON THE GAUSS PRINCIPLE *

Mei Fengxiang[1] Li Yanmin[2†] Wu Huibin[3]

（1. *School of Aerospace Engineering*，*Beijing Institute of technology*，*Beijing* 100081，*China*）

（2. *Department of Physics and Information Engineering*，*Shangqiu Normal University*，*Shangqiu* 476000，*China*）

（3. *School of mathematics*，*Beijing Institute of technology*，*Beijing* 100081，*China*）

Abstract The Gauss Principle is one of the differential variational principles in analytical mechanics. The Gauss principle is simple and convenient in theory，and has its advantage in application. It can be used for holonomic and nonholonomic systems with ideal bilateral constraints. Some of the relevant historical data are provided for the form and the development of the principle in this paper. Moreover，the authors′ proposition is given.

Key words analytical mechanics， Gauss Principle， historical data

Received 12 July 2015，revised 26 September 2015.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China（10932002，11272050，11372169）

† Corresponding author E-mail：hnynmnl@163.com