

三个电耦合神经元系统同步分析和模拟*

赵勇^{1†} 吴婵媛¹ 孟盼²

(1. 河南理工大学数学与信息科学学院, 焦作 454000) (2. 广东药学院基础学院, 广州 510006)

摘要 研究了三个线形和环形耦合 HR 神经网络模型的同步行为. 通过构造合适的 Lyapunov 函数和 LMI 方法, 获得线性化偏差系统零解的全局渐近稳定性和全局指数稳定性, 给出实现同步的相关判据. 进一步地, 环形耦合网络比线形耦合网络更容易同步. 数值结果显示了我们结果的有效性.

关键词 HR 神经网络, Lyapunov 函数, LMI, 全局渐近同步和全局指数同步

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-059

引言

自从 Pecora 和 Carroll 提出主稳定函数方法讨论系统同步的概念后, 有关同步的研究引起了许多领域学者们的关注^[1-10]. 大量实验表明, 同步现象在神经系统中普遍存在, 对我们理解信息传递和疾病的治疗具有重要的作用. 在麻醉的猫的视觉皮层观察到 r 频率运动的同步, 类似的结果在清醒的猴脑中也有发现^[4]. 此外, 美国杜克大学医学中心神经学家发现神经元的同步兴奋性可能导致帕金森氏症, 这个新发现颠覆了人们对帕金森氏症的原有认识. Park 等通过对实验数据和网络动力学模型分析比较, 表明在帕金森病变的大脑神经系统中, 神经元集群的运动游离在同步和去同步的边界处^[5]. 如果神经元能够达到同步, 一方面可以增强有效数据的传输; 另一方面会产生规则、节律的动作, 这在某些程度上与帕金森疾病有一定的联系. 因此, 研究神经网络的同步对于信息安全和临床医学都具有重要的意义^[4-5,7].

近年来, 一些数理方面的学者利用非线性动力学的理论和方法来研究神经生理实验中观察到的诸多复杂现象, 并进一步指导电生理神经实验, 从而为神经科学和医学奠定了更坚实的理论基础. Baptista 等对电耦合和化学耦合的小世界特征的 HR 网络的同步模式进行了系统的研究, 发现了耦

合强度及其联接神经元数目对同步的影响^[8]. 古华光等研究了耦合神经元同步与参数值的关系, 相关参数呈现了丰富的不同同步模式^[9]. 因此, 利用非线性动力学理论研究神经元放电的同步动力学行为, 不仅可以从本质上解决神经科学的一些重要的理论问题, 而且还能促进非线性动力学和人工智能等学科的发展.

由于模型的高维性, 目前, 有关神经元同步方面的工作还是以模拟为主, 相关的理论工作不多^[10-12]. 为了精确地刻画神经元系统的动力学变化趋势, 给实验和计算以辅助, 也是相当有意义的. 本文主要研究生物神经网络的同步行为, 将系统转化为同步差, 从而研究同步状态的稳定性问题, 研究通过构造合适的李雅普诺夫函数 LMI 方法判断系统的同步行为. 选用线形和环形耦合的 HR 神经网络模型, 通过研究线形同步差的线性化系统的零解稳定性给出实现同步的相关判据, 通过研究环形系统同步差的线性化系统的零解稳定性给出实现同步的相应判据, 上述结果显示, 环形耦合网络比线形耦合网络更容易同步, 数值结果显示了结果的有效性. 通过上述方法, 系统地对模型进行研究, 探讨神经系统中神经元之间如何相互作用, 或许对于了解神经系统如何进行信号加工和传递以及进一步地理解大脑对信息处理的机制具有一定的指导意义.

2015-06-08 收到第 1 稿, 2015-06-29 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11502073, 11402057, 11472009)、河南省教育厅重点项目(14A110004)、河南理工大学博士基金项目(B2012-107)和河南省高校基本科研业务费专项(NSFRF140137)

† 通讯作者 E-mail: zhaoyong_54@163.com

1 三个耦合神经元同步性研究

为了方便讨论,我们介绍由下述方程描述的一个 HR 神经元放电模型^[3,7,10-13]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 - z + I \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y \\ \dot{z} &= \mu[s(x - x_0) - z] \end{aligned} \quad (1)$$

x 表示膜电位; y 表示恢复变量; z 表示调节电流; I 表示输入电流; 其他量均为常数. I 为参数的改变能引起丰富的动力学放电行为, 因此是用来数值模拟和理论探讨神经元放电活动的常用模型. 这里以三个神经元之间两种耦合方式进行讨论: 线性耦合和环形耦合.

(a) 这里以线性耦合方式为研究方式. 选用 3 个线性耦合的 HR 神经元模型, 如下图给出了其示意图, 如图 1 (其中神经元 1、神经元 2 和神经元 3 之间的作用是双向的):



图 1 三个线性耦合 HR 神经元模型

Fig. 1 Three Linear-coupled HR neuronal model

现研究其同步性问题. 在实际研究中, 通常研究膜电位的变化来刻画神经元的电活动特征, 因此, 我们仅考虑膜电位之间的相互作用, 其耦合方式为线性表达式. 由 (1) 式可知神经元 1 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + f(x_1) - z_1 + I + k(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 &= g(x_1) - y_1 \\ \dot{z}_1 &= \mu[s(x_1 - x_0) - z_1] \end{aligned} \quad (2)$$

神经元 2 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= y_2 + f(x_2) - z_2 + I + k(x_1 - 2x_2 + x_3) \\ \dot{y}_2 &= g(x_2) - y_2 \\ \dot{z}_2 &= \mu[s(x_2 - x_0) - z_2] \end{aligned} \quad (3)$$

神经元 3 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= y_3 + f(x_3) - z_3 + I + k(x_2 - x_3) \\ \dot{y}_3 &= g(x_3) - y_3 \\ \dot{z}_3 &= \mu[s(x_3 - x_0) - z_3] \end{aligned} \quad (4)$$

式中: x_0 为常数, k 为耦合强度.

令 $e_{11} = x_1 - x_2, e_{12} = y_1 - y_2, e_{13} = z_1 - z_2, e_{21} = x_2 - x_3, e_{22} = y_2 - y_3, e_{23} = z_2 - z_3, e_{31} = x_3 - x_1, e_{32} = y_3$

$-y_1, e_{33} = z_3 - z_1$, 那么式 (2) 减去式 (3) 可以得到偏差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_{11} &= f'(\xi_1)e_{11} + e_{12} - e_{13} - 2ke_{11} + ke_{21} \\ \dot{e}_{12} &= g'(\eta_1)e_{11} - e_{12} \\ \dot{e}_{13} &= \mu(se_{11} - e_{13}) \end{aligned} \quad (5)$$

式 (3) 减去式 (4) 可以得到偏差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_{21} &= f'(\xi_2)e_{21} + e_{22} - e_{23} + ke_{11} - 2ke_{21} \\ \dot{e}_{22} &= g'(\eta_2)e_{21} - e_{22} \\ \dot{e}_{23} &= \mu(se_{21} - e_{23}) \end{aligned} \quad (6)$$

式 (4) 减去式 (2) 可以得到偏差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_{31} &= f'(\xi_3)e_{31} + e_{32} - e_{33} + ke_{31} \\ \dot{e}_{32} &= g'(\eta_3)e_{31} - e_{32} \\ \dot{e}_{33} &= \mu(se_{31} - e_{33}) \end{aligned} \quad (7)$$

式中:

$$\begin{aligned} f'(\xi_1)e_{11} &= f(x_1) - f(x_2), \\ g'(\eta_1)e_{11} &= g(x_1) - g(x_2), \\ f'(\xi_2)e_{21} &= f(x_2) - f(x_3), \\ g'(\eta_2)e_{21} &= g(x_2) - g(x_3), \\ f'(\xi_3)e_{31} &= f(x_3) - f(x_1), \\ g'(\eta_3)e_{31} &= g(x_3) - g(x_1), \\ f'(\xi_1) &= -3a\xi_1^2 + 2b\xi_1, \quad g'(\eta_1) = -2d\eta_1, \\ f'(\xi_2) &= -3a\xi_2^2 + 2b\xi_2, \quad g'(\eta_2) = -2d\eta_2, \\ f'(\xi_3) &= -3a\xi_3^2 + 2b\xi_3, \quad g'(\eta_3) = -2d\eta_3, \end{aligned}$$

ξ_1 和 η_1 在 x_1 和 x_2 之间, ξ_2 和 η_2 在 x_2 和 x_3 之间, ξ_3 和 η_3 在 x_3 和 x_1 之间. 由于膜电位的实际可测性, 可知 $\xi_{1,2,3}$ 和 $\eta_{1,2,3}$ 是有界的, 且 y, z 可以通过合适的估计器估计出来, 因此系统同步与耦合强度之间的关系是可求的.

引理 1^[14] (Schur 补) 对给定的对称矩阵

$$S_{n \times n} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } S_{11} \text{ 是 } r \times r \text{ 维的, 以下三个}$$

条件等价的:

- (i) $S < 0$;
- (ii) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- (iii) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$;

引理 2^[15] 如果对方程组 (5)、(6) 和 (7) 可以找到一个定正函数 $V(x)$, 其通过 (5)、(6) 和 (7) 的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 为定负的, 则方程组 (4) 渐近稳定.

定义 1^[12] 任意给定系统 (2) 初始值 $(x_1(t_0), y_1(t_0), z_1(t_0))$, 系统 (3) 的初始值 $(x_2(t_0), y_2(t_0), z_2(t_0))$,

$z_2(t_0)$), 如果式(5)的零解满足如下不等式:

$$e_{11}^2(t) + e_{12}^2(t) + e_{13}^2(t) \leq k (\|e(t_0)\|) e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (8)$$

式中: $\alpha > 0$; $k (\|e(t_0)\|)$ 为一个依赖于 $\|e(t_0)\|$ 的常数, 那么式(5)的零解是全局指数稳定的, 这里称系统(2)和系统(3)全局指数同步。

定理 1 如果 k 满足: $k > M + \frac{(1+N)^2}{4}$, 其中:

$$M = \max \{M_i = |-3a\xi_i^2 + 2b\xi_i|, i = 1, 2, 3\},$$

$$N = \max \{N_i = |2d\eta_i|, i = 1, 2, 3\},$$

$\min(x_i, x_j) \leq \eta, \xi \leq \max(x_i, x_j), i \neq j$, 则得到偏差系统(5)、(6)和(7)的零解全局渐近稳定, 这时神经元系统(2)、(3)和(4)全局渐近同步。

证明 为偏差系统(5)构造一个正定 Laypunov 函数:

$$V_1 = \frac{1}{2}(e_{11}^2 + e_{12}^2 + \frac{1}{\mu s}e_{13}^2) \quad (9)$$

为偏差系统(6)构造一个正定 Laypunov 函数:

$$V_2 = \frac{1}{2}(e_{21}^2 + e_{22}^2 + \frac{1}{\mu s}e_{23}^2) \quad (10)$$

为偏差系统(7)构造一个正定 Laypunov 函数:

$$V_3 = \frac{1}{2}(e_{31}^2 + e_{32}^2 + \frac{1}{\mu s}e_{33}^2) \quad (11)$$

令正定 Laypunov 函数

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = (e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33})^P (e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33})^T$$

式中:

$$P = \text{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\mu s}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\mu s}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\mu s}).$$

则

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} + \frac{dV_3}{dt} \leq -(2k - M_1)e_{11}^2 - e_{12}^2 - \frac{1}{s}e_{13}^2 + (1 + N_1)|e_{11}e_{12}| + \\ &k|e_{11}e_{21}| - (2k - M_2)e_{21}^2 - e_{22}^2 - \frac{1}{s}e_{23}^2 + \\ &(1 + N_2)|e_{21}e_{22}| + k|e_{11}e_{21}| - (2k - M_3)e_{31}^2 - \\ &e_{32}^2 - \frac{1}{s}e_{33}^2 + (1 + N_3)|e_{31}e_{32}| \leq \\ &(e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33})A(e_{11}, \\ &e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33})^T \end{aligned}$$

由 $k > M + \frac{(1+N)^2}{4}$, 利用引理 1, 知 $A < 0, \frac{dV}{dt} < 0$

由引理 2, 可知偏差系统(5)、偏差系统(6)和系统偏差统(7)的零解是全局渐近稳定的, 则神经元系统(2)、(3)和(4)全局渐近同步。

式中:

$$A = \begin{pmatrix} -2k + M_1 \frac{1+N_1}{2} & 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1+N_1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & -2k + M_2 \frac{1+N_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+N_2}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k + M_3 \frac{1+N_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+N_3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

如果 $A < 0$, 则 A 的最大特征值小于 0, 进一步, 我们还可以得出如下定理。

定理 2 如果 k 满足: $k > M + \frac{(1+N)^2}{4}$, 其中:

$$M = \max \{M_i = |-3a\xi_i^2 + 2b\xi_i|, i = 1, 2, 3\},$$

$$N = \max \{N_i = |2d\eta_i|, i = 1, 2, 3\},$$

$\min(x_i, x_j) \leq \eta, \xi \leq \max(x_i, x_j), i \neq j$, 则得到偏差系统(5)、(6)和系统(7)的零解全局指数稳定系统, 这时神经元系统(2)、(3)和(4)全局指数同步。

证明 类似定理 1 证明, 令正定 Laypunov 函数

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = (e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33})^P (e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33})^T$$

式中:

$$P = \text{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\mu s}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\mu s}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\mu s}).$$

假设 $\lambda_{\min}(P), \lambda_{\max}(P)$ 分别是矩阵 P 的最小和最大特征值。

则

$$\begin{aligned} &\leq -(2k - M_1)e_{11}^2 - e_{12}^2 - \frac{1}{s}e_{13}^2 + (1 + N_1)|e_{11}e_{12}| + k|e_{11}e_{21}| - (2k - M_2)e_{21}^2 - \\ &e_{22}^2 - \frac{1}{s}e_{23}^2 + (1 + N_2)|e_{21}e_{22}| + k|e_{11}e_{21}| - \end{aligned}$$

$$(2k - M_3)e_{31}^2 - e_{32}^2 - \frac{1}{s}e_{33}^2 + (1 + N_3) |e_{31}e_{32}|$$

$$\leq (e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33})A(e_{11},$$

$$e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33})^T$$

$$\leq \lambda_{\max}(A)(e_{11}^2 + e_{12}^2 + \dots + e_{32}^2 + e_{33}^2)$$

设 $\lambda_{\max}(A)$ 为矩阵 A 的最大特征值。
事实上,由定理 1,知 $A < 0$,故 $\lambda_{\max}(A) < 0$,

$$\frac{dV}{dt} \leq \lambda_{\max} \frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\min}(P)} (e_{11}^2 + e_{12}^2 + \dots + e_{33}^2)$$

$$\leq \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} V$$

解微分不等式得

$$V(X(t)) \leq V(X(t_0)) e^{\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(P)}(t-t_0)}$$

因为

$$V(X(t)) \geq \lambda_{\min}(P)(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$$

所以

$$(e_{11}^2 + e_{12}^2 + \dots + e_{33}^2) \leq \frac{V(x(t))}{\lambda_{\min}(P)}$$

$$\leq \frac{V(X(t_0))}{\lambda_{\min}(P)} e^{\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(P)}(t-t_0)}$$

式中: $X(t) = (e_{11}(t), e_{12}(t), \dots, e_{33}(t))$,

$$X(t_0) = (e_{11}(t_0), e_{12}(t_0), \dots, e_{33}(t_0)),$$

根据不等式(8)可知偏差系统(5)、系统(6)和系统(7)的零解是全局指数稳定的,则系统(2)、系统(3)和系统(4)全局指数同步。

(b)以环性耦合方式为研究方式。

其示意图如图 2(其中神经元 1、神经元 2 和神经元 3 之间的作用是双向的):

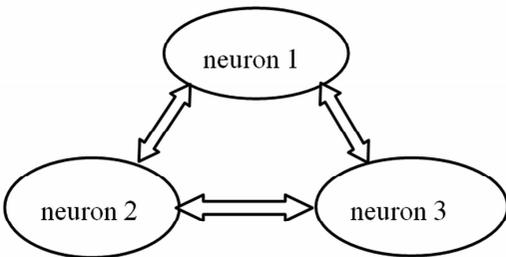


图 2 线性耦合 HR 神经元模型

Fig. 2 Three Ring-coupled HR neuronal model

类似线性情形,在环形耦合方式下,获得同步的条件。

定理 3 如果 k 满足: $k > \frac{M}{3} + \frac{(1+N)^2}{12}$, 其中:
 $M = \max \{ M_i = | -3a\xi_i^2 + 2b\xi_i |, i = 1, 2, 3 \}$,

$$N = \max \{ N_i = | 2d\eta_i |, i = 1, 2, 3 \},$$

$\min(x_i, x_j) \leq \eta, \xi \leq \max(x_i, x_j), i \neq j$, 则得到偏差系统零解全局渐近稳定,这时三个神经元全局渐近同步。

类似于定理 1 的证明,在此省略。

进一步,我们还可以得出如下定理。

定理 4 如果 k 满足: $k > \frac{M}{3} + \frac{(1+N)^2}{12}$, 其中:

$$M = \max \{ M_i = | -3a\xi_i^2 + 2b\xi_i |, i = 1, 2, 3 \},$$

$$N = \max \{ N_i = | 2d\eta_i |, i = 1, 2, 3 \},$$

$\min(x_i, x_j) \leq \eta, \xi \leq \max(x_i, x_j), i \neq j$, 则得到偏差系统的零解全局指数稳定系统,这时三个神经元系统全局指数同步。

类似于定理 2 的证明,在此省略。

通过比较定理 1、2 和定理 3、4 的同步条件,发现环形耦合系统比线形耦合系统更容易同步。因此,相同的神经元,相互作用越多,越容易获得同步。

2 数值模拟

使用给出的条件,得到偏差系统(5)、偏差系统(6)和偏差系统(7)的全局指数同步仿真结果。选取系统 1 的初始条件(0.30, 0.70, 1.00),系统 2 的初始条件(0.35, 0.70, 1.00),系统 3 的初始条件(0.40, 0.70, 1.00)。当系统没有耦合时,其偏差系统随时间的变化过程如图 3、图 4 和图 5 所示。采用定理 1 的方法后,偏差系统随时间的变化过程如图 6、图 7 和图 8 所示,呈现三个神经元同步。根据所选取的初值得 $M = 1.73, N = 3.50$ 。

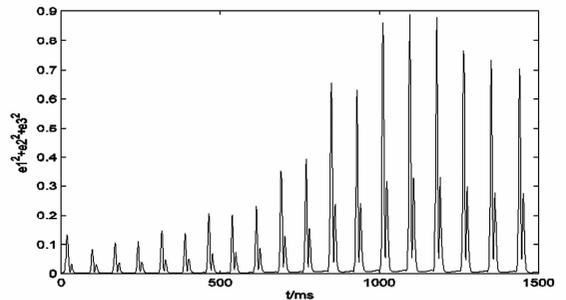


图 3 未耦合时偏差系统(5)随时间变化图

Fig. 3 The temporal evolution of the error system(5) without coupling

对偏差系统(5)随时间的变化过程图(即图 6)进行拟合,如图 10 所示:令 $e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2 = f_1(t)$, 拟合结果为: $e^{-(-5.1298 - 0.0354t)}$ 。

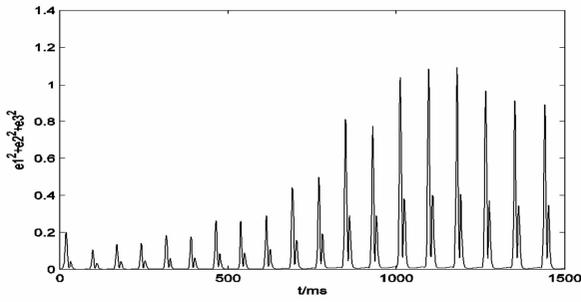


图 4 未耦合时偏差系统(6)随时间变化图

Fig. 4 The temporal evolution of the error system(6) without coupling

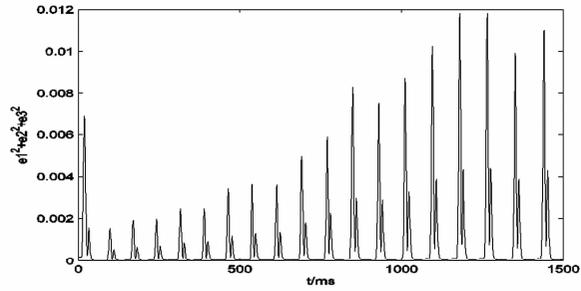


图 5 未耦合时偏差系统(7)随时间变化图

Fig. 5 The temporal evolution of the error system(7) without coupling

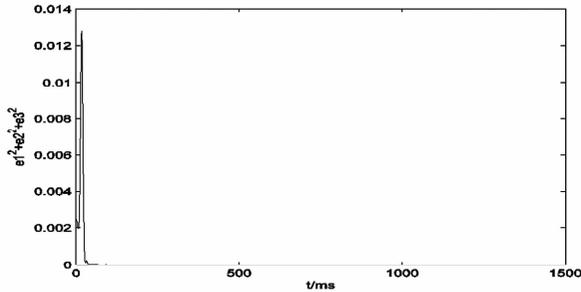


图 6 具有耦合的偏差系统(5)随时间变化图

Fig. 6 The temporal evolution of the error system(5) with coupling

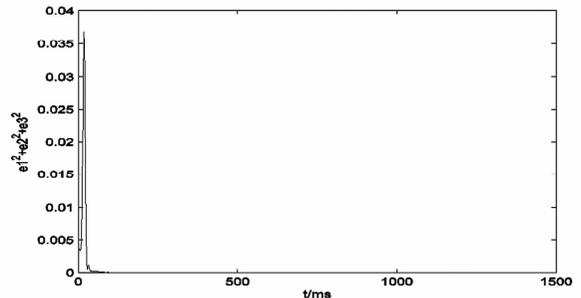


图 7 具有耦合的偏差系统(6)随时间变化图

Fig. 7 The temporal evolution of the error system(6) with coupling

对偏差系统(6)随时间的变化过程图(即图 7)进行拟合,如图 10 所示:令 $e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2 = f_2(t)$, 拟合结果为: $e^{(-4.2731 - 0.0318t)}$.

对偏差系统(7)随时间的变化过程图(即图 8)进行拟合,如图 11 所示: $e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2 = f_3(t)$, 拟合结果为: $e^{(-52.4221 - 0.0251t)}$.

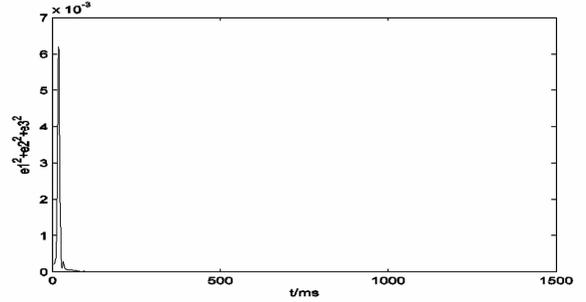


图 8 具有耦合的偏差系统(7)随时间变化图

Fig. 8 The temporal evolution of the error system(7) with coupling

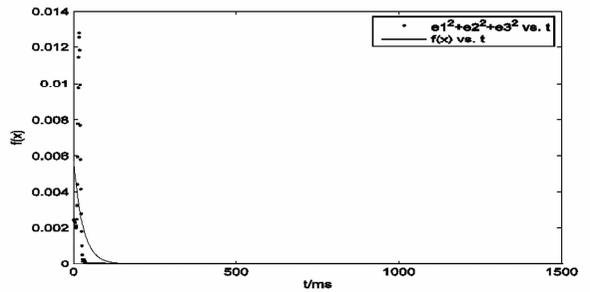


图 9 具有耦合的偏差系统(5)随时间变化的拟合图

Fig. 9 Fitting curve for the temporal evolution of the error system(5) with coupling

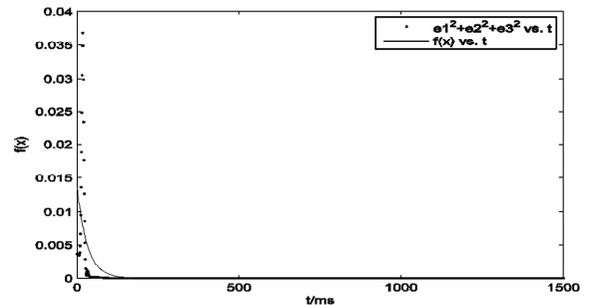


图 10 具有耦合的偏差系统(6)随时间变化的拟合图

Fig. 10 Fitting curve for the temporal evolution of the error system(6) with coupling

由此可见,在定理 1,2 的条件下, $e_{i1}^2 + e_{i2}^2 + e_{i3}^2$ ($i = 1, 2, 3$) 呈现很好的指数形式,根据定义 1 可知式(5)、式(6)和式(7)的零解是全局指数稳定的,那么神经元 I (2)、神经元 II (3)和神经元 III (4) 全局指数同步.

进一步地,我们分别给出了线形耦合神经元系统(a)和环形耦合神经元系统(b)随耦合强度之间的关系(图 12,图 13).

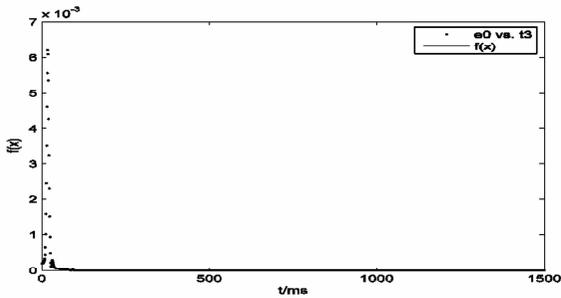


图 11 具有耦合的偏差系统(7)随时间变化的拟合图

Fig. 11 Fitting curve for the temporal evolution of the error system(7) with coupling

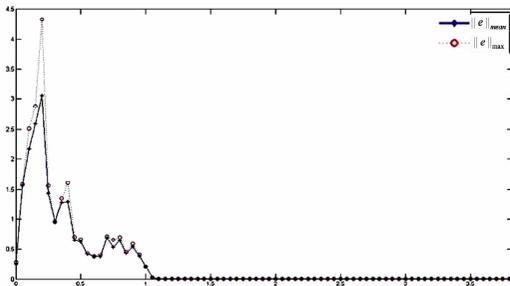


图 12(a) $\|e\|_{mean}, \|e\|_{max}$ 随耦合 k 的变化图

Fig. 12 Case (a): The evolution of $\|e\|_{mean}, \|e\|_{max}$ with the coupling strength k

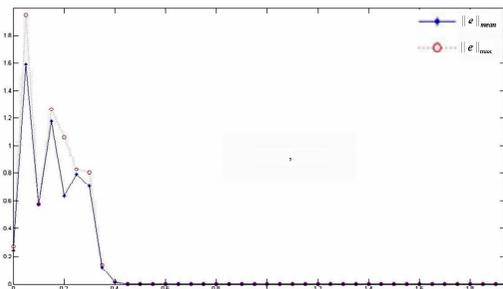


图 13(b) $\|e\|_{mean}, \|e\|_{max}$ 随耦合 k 的变化图

Fig. 13 Case (b): The evolution of $\|e\|_{mean}, \|e\|_{max}$ with the coupling strength k

3 结论

本文讨论了三个耦合神经元系统的同步动力学行为. 对于偏差系统通过构造合适的 Lyapunov 函数和运用 LMI 手段, 并运用数学方法证明所构造的 Lyapunov 函数关于时间的导数是负定的, 由此得到偏差系统在零平衡点处全局渐近稳定和全局指数稳定, 使得神经元系统 1、2 和 3 是全局指数同步的. 通过比较线性耦合和环形耦合同步的条件, 显示, 环形耦合更容易同步, 数值结果显示了结

果的有效性. 从理论上得出神经元的连接方式对同步行为有一定的影响, 不仅丰富了同步动力学理论, 或许对于信息编码有一定的指导意义.

参 考 文 献

- 1 王青云. 神经元耦合系统的同步动力学. 北京: 科学出版社, 2008 (Wang Q Y. Synchronized dynamics of Coupling system. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese))
- 2 阮炯, 顾凡及, 蔡志杰. 神经动力学模型方法和应用. 北京: 科学出版社, 2002 (Ruan J, Gu F J, Cai Z J. Methods and application of neural dynamics model. Beijing: Science Press, 2002 (in Chinese))
- 3 王亚龙, 李玉叶, 古华光. 网络噪声和振子数量对同步化行为的影响. 动力学与控制学报, 2011, 9(3): 271 ~ 276 (Wang Y L, Li Y Y, Gu H G. The influences of noise and oscillator number on synchronization of the network. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(3): 271 ~ 276 (in Chinese))
- 4 Fell J, Fernandez G, Klaver P, et al. Is synchronized neuronal gamma activity relevant for selective attentions. *Brain Research Reviews*, 2003, 42(3): 265 ~ 272
- 5 Park C, Worth R M, Rubchinsky L L. Neural dynamics in Parkinsonian brain: The boundary between synchronized and nonsynchronized dynamics. *Physical Review E*, 2011, 83(4): 042901
- 6 Hipp J F, Engel A K, Siegel M. Oscillatory synchronization in large-scale cortical networks predicts perception. *Neuron*, 2011, 69(2): 387 ~ 96
- 7 Gu H G, Pan B B, Chen G R, et al. Biological experimental demonstration of bifurcations from bursting to spiking predicted by theoretical models. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(1): 391 ~ 407
- 8 Baptista M S, Moukam Kakmeni F M, Grebogi C. Combined effect of chemical and electrical synapses in Hindmarsh-Rose neural networks on synchronization and the rate of information. *Physical Review E*, 2010, 82(3): 036203
- 9 Gu H G, Li Y Y, Jia B, et al. Parameter-dependent synchronization transition of coupled neurons with co-existing spiking and bursting. *Physica A*, 2013, 392(15): 3281 ~ 3292
- 10 Wang Q Y, Lu Q S. Adaptive lag synchronization in two coupled chaotic systems with unidirectional delay feedback. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, 45(6): 640 ~ 646

- 11 Zhao Y, Feng Z S. Desynchronization in synchronous multi-coupled chaotic neurons by mix-adaptive feedback control. *Journal of Biological Dynamics*, 2013,7(1):1 ~ 10
- 12 贾秋菊,陈增强. Hindmarsh-Rose 神经元全局指数同步. 吉林大学学报(工学版), 2011,41(1):236 ~ 238 (Jia Q J, Chen Z Q. Global exponential synchronization of Hindmarsh-Rose neurons. *Journal of Jilin University Engineering and Technology Edition*, 2011,41(1):236 ~ 238 (in Chinese))
- 13 Hindmarsh J L, Rose R M. A model of the nerve impulse using two first order differential equations. *Nature*, 1982, 296(5853):162 ~ 164
- 14 廖晓昕. 稳定性理论、方法和应用(第二版). 武汉:华中科技大学出版社,2010 (Liao X X. *Theory methods and application of stability* (2nd Edition). Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2010 (in Chinese))
- 15 王高雄,周之铭,朱思铭等. 常微分方程(第二版). 北京:高等教育出版社,2008 (Wang G X, Zhou Z M, Zhu S M, et al. *Ordinary differential equation*(Three Edition). Beijing: Higher Education Press, 2008 (in Chinese))

SYNCHRONIZATION ANALYSIS AND SIMULATION ON THREE ELECTRICALLY COUPLED HR NEURONAL SYSTEM*

Zhao Yong^{1†} Wu Chanyuan¹ Meng Pan²

(1. School of Mathematics and Information, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China)

(2. School of Basic Courses, Guangdong Pharmaceutical University, Guangzhou 510006, China)

Abstract In this paper, synchronous dynamic behavior of three Ring-coupled and Linear-coupled HR neuronal system is examined. Through constructing a suitable Lyapunov function as well as applying linear matrix inequalities and matrix theory, the global exponential stability and the global asymptotic stability of linearised error system at zero solution is obtained, respectively, and the relative criterion is theoretically provided for global asymptotic synchronization and global exponential synchronization of HR neuronal system. Furthermore, Ring-coupled network is synchronized more easily than Linear-coupled network. Numerical simulations also verifies the effectiveness of the results in this paper.

Key words HR neuronal system, Lyapunov function, linear matrix inequalities, global asymptotic synchronization and global exponential synchronization

Received 8 June 2015, revised 29 June 2015.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11502073, 11402057, 11472009) and Scientific Research Fund of Henan Provincial Education Department (14A110004) and Doctoral Foundation of Henan Polytechnic University (B2012 - 107) and the Fundamental Research Funds for the Universities of Henan Province (NSFRF140137)

† Corresponding author E-mail: zhaoyong_54@163.com