

二值噪声激励下耦合欠阻尼双稳系统的随机共振^{*}

杨亭亭[†] 张慧清

(西北工业大学理学院, 西安 710072)

摘要 研究了二值噪声激励下耦合欠阻尼双稳系统的随机共振问题. 首先, 数值模拟二值噪声, 研究了噪声参数对二值噪声输出的影响; 其次, 分析了噪声参数对系统输出的影响, 发现随着噪声强度的增大, 粒子可以在两个势阱之间进行跳跃, 而且跳跃的频率随着噪声强度的增大而增大; 最后, 描述了噪声对系统输出功率谱以及信噪比的影响. 结果发现在一定噪声强度下, 功率谱的输出有峰的结构, 并且峰值在关键的噪声处达到最大. 特别地, 对于不同的参数, 信噪比的变化呈现非单调性, 从而可以找到使信噪比峰值最大的最优参数.

关键词 二值噪声, 耦合欠阻尼系统, 随机共振, 功率谱, 信噪比

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-023

引言

在通讯、测量等过程中, 噪声常常会干扰到信号的传送功能、降低信噪比, 因此考察噪声对动力系统的影响引起了人们的广泛关注. 随机共振现象就是人们认识噪声和利用噪声的典型实例^[1]. 随机共振作为非线性科学的分支之一, 一直备受关注. 近年来, 它在理论上和实验上都取得了巨大的进展^[2-4].

在以往的研究中, 大多数学者都假定外界噪声是高斯的情形, 然而这只是理想的噪声, 我们在现实中会遇到很多非高斯噪声.

二值噪声即随机电报噪声是一类典型的非高斯噪声, 是指等待时间服从指数分布的两态过程^[5]. 一方面二值噪声是真实噪声的典型模型, 它以电阻、电导、电压或电流的形式表现出来, 广泛存在于金属、双极型晶体管、超导薄膜、隧道结等器件和材料中. 另一噪声是色噪声, 具有简单的统计特性, 在不同极限条件下二值噪声可退化为高斯白噪声或散粒白噪声^[6], 故研究二值噪声对动力学系统行为的影响具有实际应用价值. 二值噪声诱导的随机共振现象已经引起了一些学者的关注. 例如, 文献^[7]研究了非对称二值噪声激励下一些线性系

统的随机共振现象; 文献^[8]研究了二值噪声激励下具有信号调制的一阶线性系统的随机共振现象.

随机共振在各个学科领域有着广泛的应用, 其中研究较多的典型系统有: 双稳系统、分形振子系统、过阻尼系统以及欠阻尼系统等, 但是对于耦合系统的随机共振研究不是很多. 本文利用数值模拟的方法研究二值噪声激励下耦合欠阻尼双稳系统的随机共振现象.

1 系统模型

考虑二阶耦合欠阻尼双稳系统, 它由下面的随机微分方程来描述^[9]:

$$\ddot{x} = -rx - \frac{dV_1(x)}{dx} + k(y - x) + \xi_1(x) + F_1(t) \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -ry - \frac{dV_2(x)}{dx} - k(y - x) + \xi_2(x) + F_2(t) \quad (2)$$

其中 $i = 1, 2$, r 为阻尼系数, k 为耦合强度. $V_i(x)$ 代表势函数, 定义为:

$$\begin{aligned} V_i(x) &= -a_i x^2/2 + b_i x^4/4 \\ a_i &> 0, \quad b_i > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

有两个稳定点 $x_s = \pm\sqrt{a_i/b_i}$ 及一个不稳定点 $x_u = 0$, 势垒的高度为 $\Delta V_i = a_i^2/4b_i$, 我们取 $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = 1, b_2 = 1.5$, 这就产生了两个不同的势垒高度

$\Delta V_1 = 0.25, \Delta V_2 = 1/6$ (图 1). $F_i(t) = A_i \cos(\omega_i t)$ 是外部周期信号, A_i 和 ω_i 分别代表信号的振的振幅和频率, 为了满足绝热近似条件, 我们假设 $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{2}/20$. 图 2 表明了周期信号对系统输出的影响, 我们可以看出当信号振幅较小时, 粒子只在右势阱中运动, 随着振幅的增大粒子开始在两个势阱之间进行跳跃. 为了研究随机共振现象, 我们假定周期信号的幅值 $A_1 = A_2 = A, A < \Delta V_{1,2}$, 也就是在没有噪声的情况下粒子不会在两势阱间跃迁. $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ 是相互独立的对称二值噪声, 取值为 a 和 $-a$, 其均值和相关函数为

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0 \quad (4)$$

$$\langle \xi_i(t) \xi_i(t') \rangle = a^2 e^{-v|t-t'|} \quad (5)$$

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 0, \quad i \neq j \quad (6)$$

v 是转移速率, $\tau = 1/v$ 代表相关时间, 噪声强度定义为:

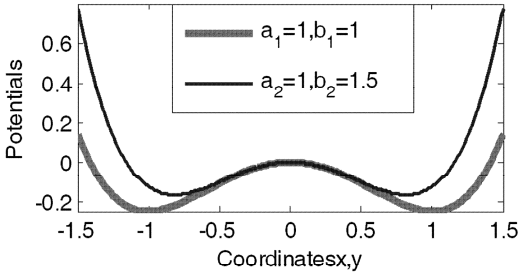
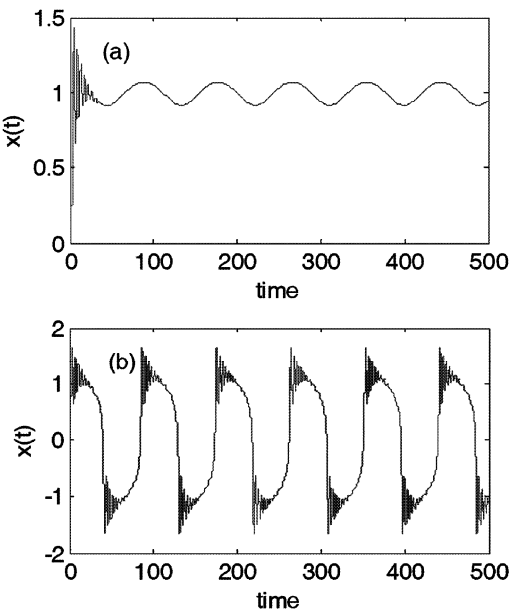


图 1 不用参数下的势函数

Fig. 1 The potential function with different parameters



$k=0, D=0, r=0.25$, (a) $A_1=0.15$, (b) $A_1=0.5$

图 2 不同周期信号下系统的输出

Fig. 2 Output-curves for various values of amplitude

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi_i(t) \xi_i(0) \rangle dt/2 = a^2 \tau. \quad (7)$$

当 $a \rightarrow \infty, \tau \rightarrow 0, a^2 \tau = D < \infty$ 时, 二值噪声退化为高斯白噪声. 我们采用文献[10]给出的二值噪声的数值模拟方法, 图 3 是不同噪声强度下二值噪声的状态图. 由图 3 可知随着噪声强度的不断增大, 二值噪声在每个状态的平均停滞时间变长.

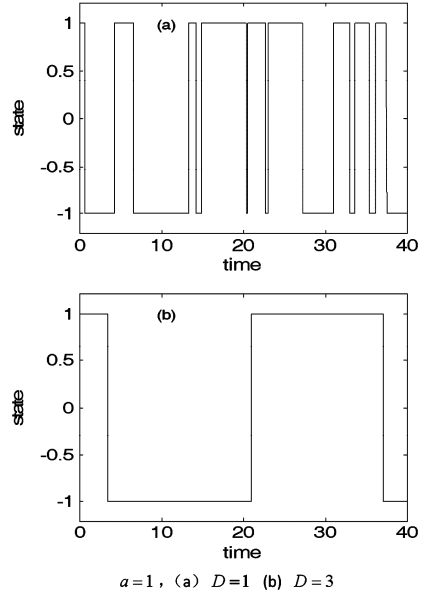


图 3 二值噪声状态图

Fig. 3 The state of dichotomous noise

2 二值噪声激励下的随机共振现象

为了研究随机共振现象, 我们首先观察噪声对系统响应的影响, 进而对系统的输出做功率谱和信噪比进行分析.

2.1 系统位移响应

图 4 模拟出了在 $a=1, k=0, A=0.15, r=0.75$ 系统参数下不同噪声强度下系统的位移响应. 从图 4(a) 中可以看出, 当噪声强度较小时, 粒子只呆在右势阱中, 没有跳跃现象. 从图 4(b) ~ (d) 可以看出随噪声强度的增大, 粒子的跳跃现象开始出现, 且跳跃的频率随之增加. 值得注意的是, 在适当的噪声强度下粒子的跳跃具有周期性, 这时信号对系统进行了有效的调制.

2.2 功率谱

噪声中弱信号的频率有时是未知的, 通过系统输出的功率谱可以检测出信号频率. 在本文中我们采用经典谱估计的方法来研究功率谱, 以离散傅立叶变换的幅度平方作为信号功率谱的度量.

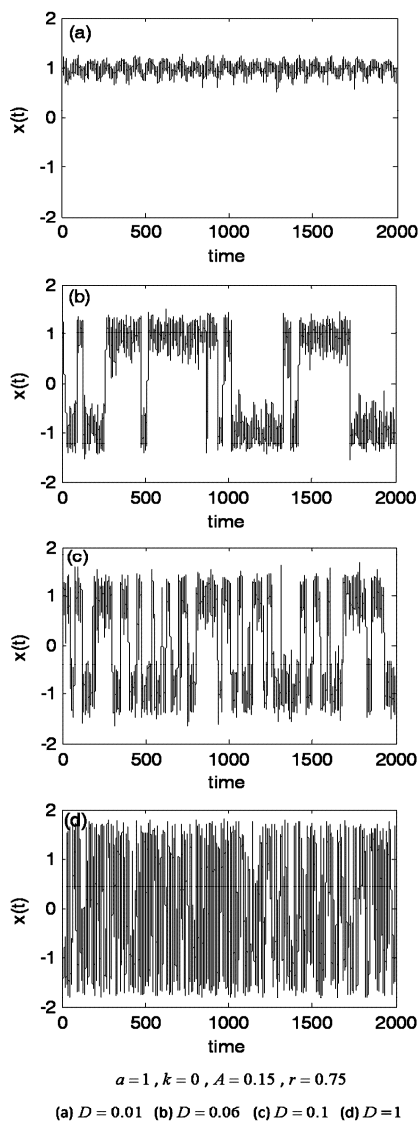


图 4 不同噪声强度下的系统输出

Fig. 4 The output streams for different noise intensities

图 5 为 $a=1, k=0, A=0.15, r=0.75$ 的条件下,不同噪声强度下系统输出的频谱图. 研究发现在特定噪声强度下,系统功率谱输出有峰值,并且峰值在输入信号频率的附近出现. 进一步地我们观察到,随着噪声强度的增大,系统输出功率谱的峰值随着噪声强度的增大先增大后减少,呈现非单调的依赖关系. 从而可知,噪声能诱导随机共振现象.

2.3 信噪比

下面采用信噪比 (SNR) 作为量化指标来研究系统的随机共振现象. 我们采用文献 [11] 提出的信噪比的数值模拟方法. 本文采用的信噪比定义为输出信号的功率谱与噪声功率谱的比值:

$$SNR = 10 \log \frac{P_{signal}}{P_{noise}}$$

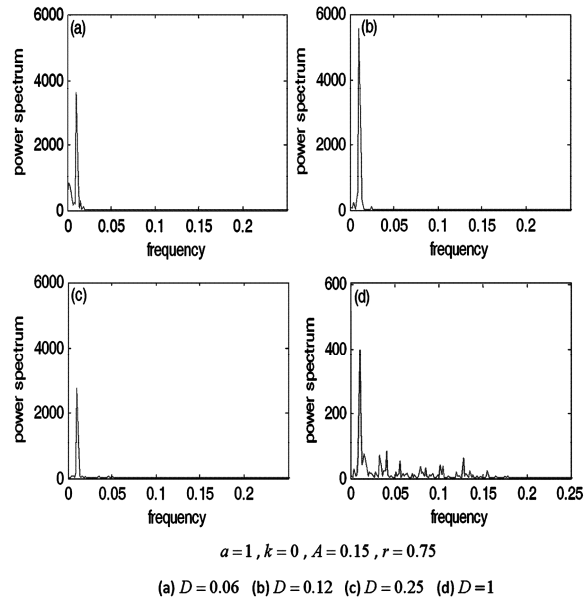


图 5 系统 x 的输出功率谱

Fig. 5 The power spectrum of x

图 6 给出了信噪比曲线作为噪声强度的函数随阻尼系数的变化. 对于固定的阻尼系数,信噪比随着噪声强度的增大先减小后增大再减小,信噪比在某噪声强度处出现局部极大值,这说明系统会出现随机共振现象. 同时随着阻尼系数的增大,信噪比曲线的峰值逐渐右移,且该峰值先增大后减小,因此我们可以找到使系统发生随机共振的最佳阻尼系数.

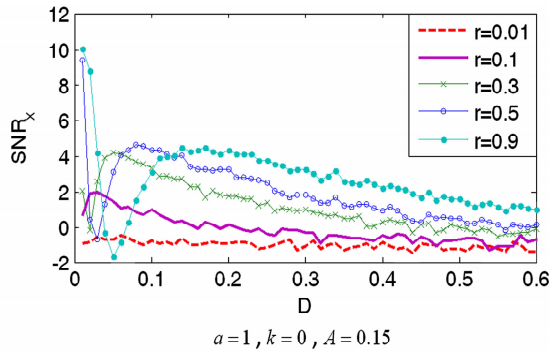


图 6 不同阻尼系数下的信噪比函数

Fig. 6 The SNR functions with different damping parameter

图 7 给出了不同耦合强度下信噪比曲线的图像,在特定耦合强度下,我们展示了在强阻尼系数 $r=0.75$ (实线) 和弱阻尼系数 $r=0.05$ (虚线) 下系统 x (红线) 和系统 y (蓝线) 的信噪比曲线. 从图中可以观察到,当耦合强度为 0 时,相对于系统 x ,系统 y 的信噪比曲线向左移且峰值较大. 在强阻尼系数下,对于任意的耦合强度系统都有随机共振的产生,而对于弱阻尼系数,改变耦合强度系统不能产

生随机共振. 值得注意的是,随着耦合强度的增加,两个系统的信噪比曲线逐步趋于一致. 在图 8 中我们进一步探索了耦合强度对系统信噪比输出的影响. 可以观察到,随着耦合强度的增大,信噪比峰值先增大后减少,且向右移动. 由此可知我们可以找到增强随即共振的最优耦合强度. 图 9 中的结果,展示了信号幅值 A 对信噪比的影响. 随着信号幅值的增大,信噪比峰值增大,由此可知较大的信号幅值更有利于随机共振的产生.

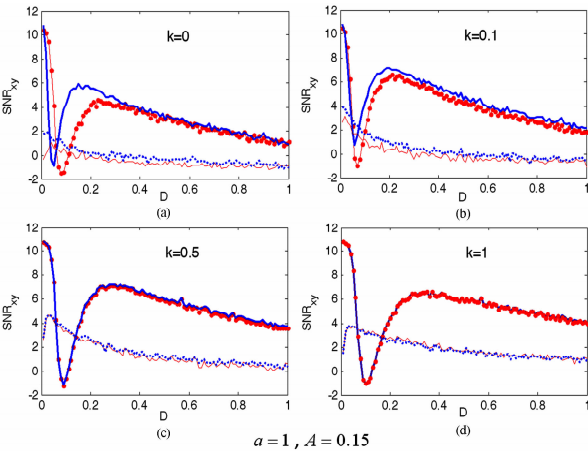


图 7 不同耦合强度下的信噪比函数

Fig. 7 The SNR functions with different couple strength

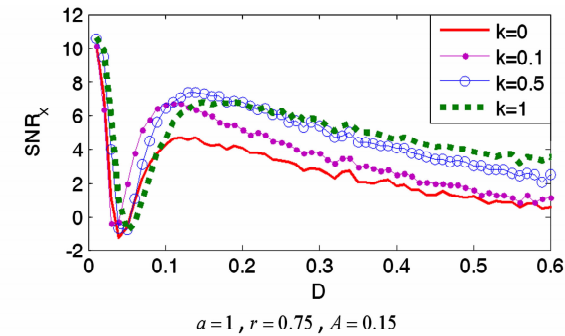


图 8 不同耦合强度下的信噪比函数

Fig. 8 The SNR functions with different couple strength

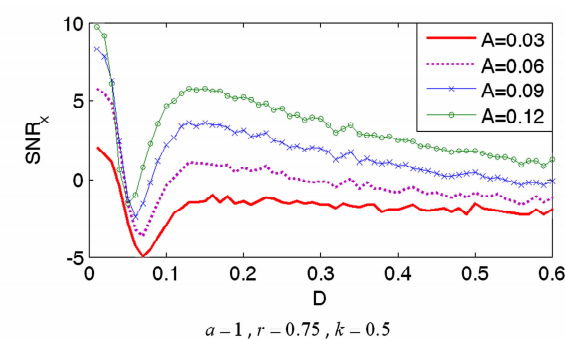


图 9 不同信号幅值下的信噪比函数

Fig. 9 The SNR functions with different signal amplitude

图 10 分析了噪声幅值 a 对系统输出信噪比的影响. 可以看出当噪声幅值过小或者过大时,随机共振现象都不能发生. 当 a 取适当的值时,信噪比峰值随着 a 的增大呈现出非单调依赖关系. 随着 a 的增大,信噪比峰值先增大再减小且逐渐左移. 同时可以观察到,当 a 值增大到一定程度时,二值噪声的信噪比曲线和高斯白噪声的基本一致,这是由于当二值噪声的幅值越来越大时,随着相关时间的减小,二值噪声可以退化为高斯白噪声.

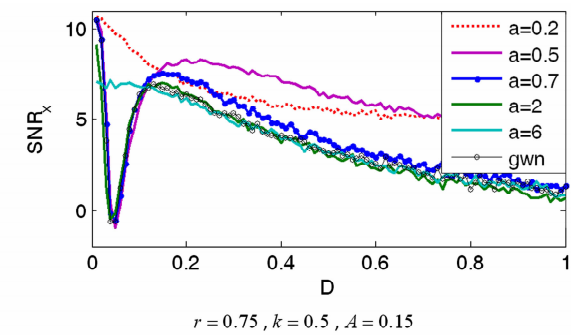


图 10 不同噪声幅值下的信噪比函数(gwn 代表高斯白噪声)

Fig. 10 The SNR functions with different noise amplitude

3 结论

本文研究了当系统受二值噪声作用时,耦合欠阻尼双稳系统的随机共振现象,分析了噪声参数以及系统参数对系统输出功率谱和信噪比的影响. 结果表明:

- 1) 系统输出功率谱峰值随输入噪声强度呈现非单调依赖关系.
- 2) 当取定系统其它参数时,系统输出信噪比随噪声强度的增大先减小后增大再减小,进而可以找到增强信噪比的噪声强度.
- 3) 可以找到最优的耦合强度和阻尼系数使信噪比的峰值达到最大.
- 4) 较大的输入信号幅值能提高系统的输出信噪比.

参 考 文 献

1 Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1981,14(11):L453

2 Fauve S, Heslot F. Stochastic resonance in a bistable system. *Physics Letters A*,1983,97(1):5~7

- 3 Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, et al. Stochastic resonance. *Reviews of modern physics*, 1998, 70(1): 223
- 4 焦贤发, 王俊琦, 王如彬. 突触噪声作用下的 IF 阈值神经元模型的随机共振. *动力学与控制学报*, 2010, 8(3): 273 ~ 276 (Jiao X F, Wang J Q, Wang R B. Stochastic resonance of an integrate-and-fire neuron model with threshold driven by synaptic noise. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(3): 273 ~ 276 (in Chinese))
- 5 Gardiner C W. *Handbook of stochastic methods*. Berlin: Springer, 1985
- 6 Broeck C V. On the relation between white shot noise, Gaussian white noise, and the dichotomic Markov process. *Journal of Statistical Physics*, 1983, 31(3): 467 ~ 483
- 7 Li J H. Phenomenon of stochastic resonance caused by multiplicative asymmetric dichotomous noise. *Physical Review E*, 2006, 74(5): 051115 - 1 ~ 051115 - 9
- 8 Jin Y F, Xu W, Xu M, et al. Stochastic resonance in linear system due to dichotomous noise modulated by bias signal. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2005, 38(17): 3733 ~ 3742
- 9 Kenfack A, Singh K P. Stochastic resonance in coupled underdamped bistable systems. *Physical Review E*, 2010, 82(4): 046224
- 10 L'Heureux I, Kapral R. Direct simulation of dichotomous noise-induced transitions in a bistable system. *The Journal of Chemical Physics*, 1989, 90: 2453 ~ 2459
- 11 Mitaim S, Kosko B. Adaptive stochastic resonance. *Proceedings of the IEEE*, 1998, 86(11): 2152 ~ 2183

STOCHASTIC RESONANCE IN COUPLED UNDERDAMPED BISTABLE SYSTEMS DRIVEN BY SYMMETRIC DICHOTOMOUS NOISES^{*}

Yang Tingting[†] Zhang Huiqing

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract The stochastic resonance (SR) in coupled underdamped bistable systems induced by dichotomous noises is studied in this paper. Firstly, the effect of noise parameter on the system output is analyzed. For large noise intensity, the hopping of the particles between two potential wells is observed. In addition, with the increasing noise intensity, the switching between the two wells is found to increase. Finally, the effect of noise on the output power spectrum and spectral power of the system are characterized. It is found that the power spectrum of the system at some noise intensity has a sharp peak, and the peak value is maximized at a critical value of noise intensity. In particular, for different parameters, a non-monotonic behavior of signal-noise-ratio (SNR) is shown. And the optimum system parameter is found where the SNR peak value reaches a maximum.

Key words dichotomous noise, coupled underdamped bistable systems, stochastic resonance, spectral power, signal-noise-ratio