

# 相关乘性和加性高斯白噪声激励下周期势系统的 随机共振\*

刘开贺 靳艳飞<sup>†</sup> 马正木

(北京理工大学宇航学院力学系, 北京 100081)

**摘要** 研究了外加周期信号作用下,相关高斯乘性和加性白噪声激励下周期势系统的随机共振.利用线性响应理论,计算了系统输出信号的功率谱密度、振幅、相位差.研究表明:当加性噪声强度和关联系数不变的情况下,通过调整乘性噪声强度可以出现随机共振;关联系数的正负以及大小对随机共振的影响较小.当乘性噪声强度较小时,输出信号的振幅和相位差曲线有一个单峰出现,即出现随机共振现象,能量从噪声向信号进行转化.随着噪声强度的增大,随机共振现象消失,噪声由增大系统的有序程度渐渐变为增大系统的无序程度.

**关键词** 随机共振, 周期势系统, 相关噪声, 功率谱密度

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-031

## 引言

1981年, Benzi等<sup>[1-2]</sup>提出了“随机共振”的概念并用来解释第四纪全球气象冰川期问题.此后,随机共振及其相关问题的研究成为物理、生物、化学、电子等各领域研究的热点问题<sup>[3-8]</sup>.在实际问题中,大多情况下乘性和加性噪声具有相关性<sup>[9-15]</sup>.曹力等<sup>[9]</sup>将噪声之间的互关联性引入双稳系统的研究,并给出了相应的一致有色噪声近似.李静辉等<sup>[10]</sup>发现噪声之间的关联性能诱导非平衡系统的相变. Mei和Xie等<sup>[12-13]</sup>将噪声之间的互关联性引入非线性动力系统的逃逸问题,发现噪声关联性能诱导平均首次穿越时间的曲线出现共振和抑制现象.罗晓琴等<sup>[14]</sup>讨论了由两种不同色噪声和周期信号激励的双稳系统的随机共振现象.靳艳飞等<sup>[15-16]</sup>研究了色噪声参数激励和周期调制噪声外激励联合作用下线性系统的随机共振.李贝等<sup>[17]</sup>研究了色关联的乘性和加性高斯色噪声驱动的分段非线性系统的平均首次穿越时间.

以往随机共振的研究大多集中于经典双稳系统,随着研究的深入,人们开始把研究对象拓展到

多稳系统,如:周期势系统.布朗粒子在周期势系统中的动力学机制在物理学和化学中的很多应用中都是一个很重要的问题,比如超导体中离子的运动、约瑟夫森节中超电流的波动等.胡岗和Fronzoni等<sup>[18-19]</sup>分别对附加了一个倾斜的周期势场中的随机共振以及噪声驱动下的粒子传输进行了研究. Kim和Sung<sup>[20]</sup>利用数值方法对没有附加倾斜的势场中的随机共振进行了研究. Saikia和Reenbohn等<sup>[21-22]</sup>用一种新的方法对欠阻尼情况下周期势场中粒子的扩散运动进行了数值模拟.

针对具有相关乘性和加性的噪声激励的周期势系统的随机共振研究较少.本文研究了带有外加周期信号的周期势系统在相互关联的高斯白噪声激励下的随机共振情况.利用线性响应理论,以系统输出信号的功率谱密度、振幅、相位差作为随机共振的衡量指标,讨论了噪声强度、噪声互相关系数对系统随机共振的影响.

## 1 模型的建立

外加周期信号和相关加性和乘性高斯白噪声激励下,周期势系统的郎之万方程为:

2015-03-13 收到第1稿,2015-04-22 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11272051)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: jinyf@bit.edu.cn

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) = \cos x + F_0 \cos \omega_0 t + \cos x \cdot \xi(t) + \eta(t), \quad (1)$$

其中,  $x(t)$  和  $h(t)$  是相关的高斯白噪声, 它们的统计性质满足如下条件:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2Q\delta(t-t'), \\ \langle \eta(t) \rangle &= 0, \quad \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = 2D\delta(t-t'), \\ \langle \xi(t') \eta(t) \rangle &= \langle \xi(t) \eta(t') \rangle = 2\lambda \sqrt{DQ}\delta(t-t'). \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $Q$  和  $D$  分别为乘性噪声强度和加性噪声强度,  $\lambda$  是乘性噪声和加性噪声之间的相关系数.

首先, 对(1)式进行如下变换:

$$\eta_1(t) = \eta(t) - \lambda \sqrt{D/Q} \xi(t). \quad (3)$$

利用(3)式将(1)式变换为

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) = \cos x + F_0 \cos \omega_0 t + (\cos x + \lambda \sqrt{D/Q}) \cdot \xi(t) + \eta_1(t), \quad (4)$$

其中  $\xi(t)$  和  $\eta_1(t)$  是不相关的高斯白噪声:

$$\langle \eta_1(t) \eta_1(t') \rangle = 2D(1-\lambda^2)\delta(t-t'). \quad (5)$$

这样, 所研究的系统就转化成了不相关的白噪声激励下的周期势系统. 对(1)式的数值积分就可以转变成对(4)式的数值积分. 对(4)式进行变量替换, 即可得到如下随机微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t), \\ \dot{v}(t) = -\gamma v(t) + \cos x + F_0 \cos \omega_0 t + (\cos x + \lambda \sqrt{D/Q}) \cdot \xi(t) + \eta_1(t). \end{cases} \quad (6)$$

下面采用 Heun<sup>[23]</sup> 方法对(6)式应用 MATLAB 编程进行数值积分, 所选参数分别为  $dt = 0.1$ ,  $F_0 = 0.2$ ,  $\omega_0 = \pi/4$ , 且本文参数均为无量纲.

## 2 随机共振的标准

因为存在外加的周期信号, 如果系统在噪声的作用下会产生随机共振, 那么系统的平均输出响应  $x(t)$  应该具有和输入信号相等的频率, 因此平均输出响应  $x(t)$  的功率谱密度 PSD 在频率  $\omega = 1/T_0 = \omega_0/2\pi = 0.125$  一定有一个峰值, 而且在产生随机共振所对应的噪声强度下  $\omega = 0.125$  附近的 PSD 一定也是最大的. 所以可以把  $\omega = \omega_0$  处的 PSD 值作为随机共振的一个标准.

另外, 按照线性响应理论, 输出响应的幅值和相位差也可以作为随机共振的判断标准. 对于输出响应的幅值, 我们既可以根据图像进行拟合, 又可以根据线性响应理论来求解. 根据线性响应理论, 输出响应  $x(t)$  的统计均值可以写为

$$\langle x(t) \rangle = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (7)$$

类似的我们可以写出

$$\begin{cases} A_1 = \langle x(t) \cos(\omega_0 t) \rangle_t, \\ A_2 = \langle x(t) \sin(\omega_0 t) \rangle_t, \end{cases} \quad (8)$$

则(7)式中的幅值和相位差可以表示为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \varphi = -\arctan \frac{A_1}{A_2}. \quad (9)$$

根据(8)式和(9)式, 我们可以利用  $A$  和  $\varphi$  随着噪声强度的变化曲线来判断随机共振的发生.

## 3 数值分析

首先, 我们仅考虑在加性噪声强度  $D = 0.002$  和关联系数  $\lambda = 0.9$  都固定不变的情况下, 乘性噪声强度  $Q$  对系统随机共振的影响.

图 1 给出了乘性噪声强度  $Q$  对平均输出响应  $x(t)$  的功率谱密度 PSD 的影响. 由图可见,  $Q = 0.03$  时, PSD 在  $\omega = 0.125$  时的峰值是最高的, 由此可以初步判断在该组参数设定下, 随机共振是发生的, 并且在  $Q = 0.03$  时达到最大.

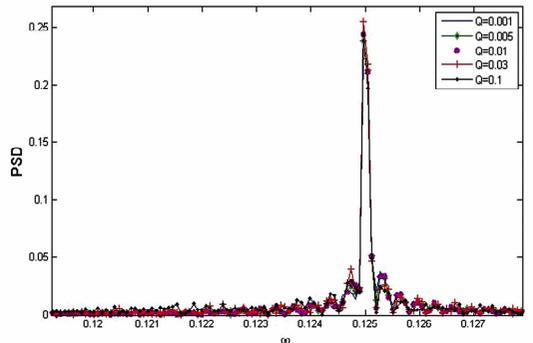


图 1 系统输出信号的 PSD 作为频率  $\omega$  的函数随不同噪声强度变化的曲线

Fig. 1 System output signal PSD to frequency  $\omega$  relationships with different noise intensity

为了进一步确定随机共振是否发生, 我们还对(8)式中的  $A$  和  $\varphi$  进行了计算, 并绘制了它们和  $Q$  的关系曲线, 如图 2 和图 3 所示. 从图中我们可以看出随机共振确实发生. 在图 2 中, 我们可以看到  $Q \leq 0.03$  时, 当增大  $Q$  时, 平均输出信号  $x(t)$  的幅值  $A$  整体也是增大的; 当  $Q = 0.03$  时平均输出信号  $x(t)$  的幅值  $A$  达到了一个最大值, 此时能量从噪声向信号转移的最多, 达到了类似于传统意义上的“共振”. 随着  $Q$  的继续增大, 平均输出信号  $x(t)$  的幅值  $A$  又开始下降, 这说明能量从噪声向信号的转移开始变少. 当  $Q$  继续增大 ( $Q \geq 0.15$ ) 时, 我们发现平均输出信号  $x(t)$  的幅值  $A$  开始小于输入信号的幅值, 这说明此时的噪声不再增强系统的有序程度, 而是开始增大系统的无序程度. 从图 2 中我

们还可以看出,只有当乘性噪声强度很小的时候,系统才会发生随机共振.除了平均输出信号的幅值以外,我们还研究了输出信号  $x(t)$  与输入信号之间的相位差与乘性噪声强度  $Q$  的关系.在图 3 中,我们看到平均输出信号  $x(t)$  与输入信号之间的相位差随着  $Q$  的增大出现一个极大值,说明系统存在随机共振现象.

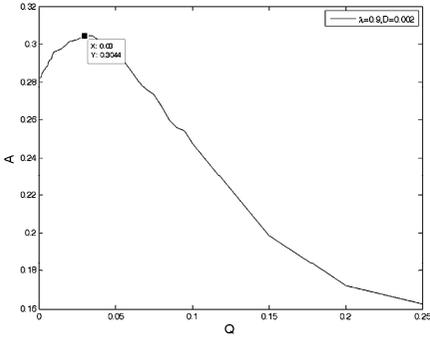


图 2 输出信号的幅值在  $D=0.002, \lambda=0.9$  时随着乘性噪声强度变化的曲线

Fig. 2 Output amplitude to multiplicative noise curve when  $D=0.002, \lambda=0.9$

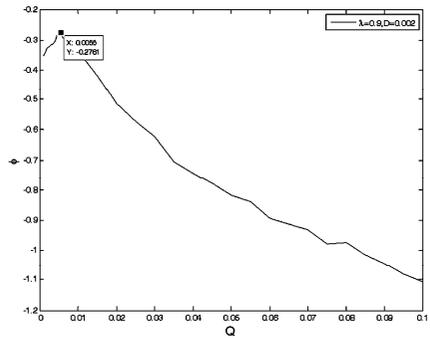


图 3 输出信号的相位差在  $D=0.002, \lambda=0.9$  时随着乘性噪声强度变化的曲线

Fig. 3 Output phase difference to multiplicative noise curve when  $D=0.002, \lambda=0.9$

下面我们研究加性噪声和乘性噪声之间的关联系数  $\lambda$  对系统随机共振的影响.固定乘性噪声强度和加性噪声强度,令关联系数分别取互为相反数的两个数,来研究互为相反数的关联系数对系统的影响.令  $Q=0.1$  和  $D=0.002$ ,研究了  $\lambda = \pm 0.8$  时系统的平均输出信号的时间历程图.在图 4 中,我们可以看出随着时间的增长,平均输出信号是有着多次的反转的(即上升或是下降),而当  $\lambda$  互为相反数时,系统的平均输出信号走势基本是相反的,但是它们每次上升或者下降的幅度基本是一致的,而且在相同的时间段内,它们的信号幅值基本也是一样的.图 5 是截取图 4 的一部分进行了放大,从图中就可以比较清晰的看出来  $\lambda$  并不影响输出信

号幅值的大小.

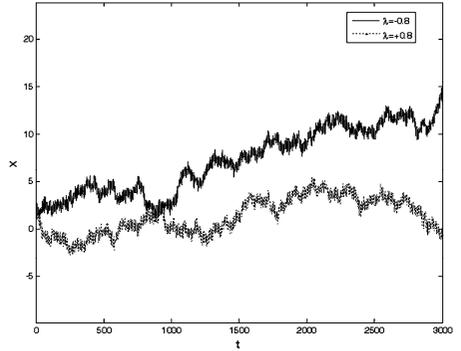


图 4  $\lambda = \pm 0.8$  时系统的平均输出信号的时间历程图

Fig. 4 Time history of the average output signal for system  $x(t)$  when  $\lambda = \pm 0.8$

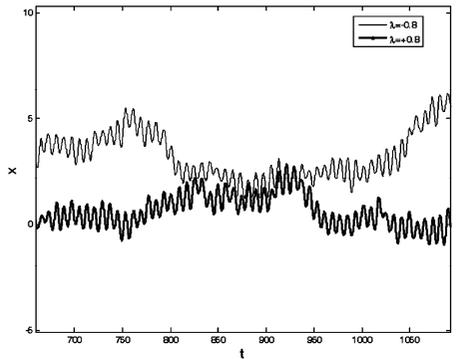


图 5 图 4 的局部放大图

Fig. 5 Partial enlarged view of Fig. 4

其次,我们研究了互为相反数的关联系数对随机共振的影响.首先我们固定  $D=0.002$  保持不变,令  $\lambda$  分别为  $-0.4$  和  $0.4$ ,画出了它们对应的平均输出信号幅值相对于乘性噪声强度  $Q$  的曲线,如图 6.在图 6 中,曲线是  $\lambda = -0.4$  所对应的曲线,而 \* 点是  $\lambda = 0.4$  时所对应的点,我们可以看出,大部分的 \* 点都落在了曲线附近,而且整体的变化趋势是一致的,由此可见只要关联系数的绝对值一样,那么平均输出信号的幅值大小基本是不变的.

在图 7 中,我们绘制了  $\lambda$  取互为相反数的两个数时,平均输出信号和输入信号之间的相位差以及平均输出信号的导数(即平均输出速度)与输入信号之间的相位差  $\varphi$  随乘性噪声强度  $Q$  变化的曲线.从图中我们可以观察到, $\lambda = \pm 0.9$  所对应的平均输出信号和平均输出速度的相位差曲线几乎完全重合在了一起,峰值处所对应的  $Q$  也是相同的.这就说明了关联系数的符号对相位差的影响是很小的.另外, $\lambda = 0.9$  所对应的平均输出信号相位差和平均速度相位差的变化规律是一样的,只是平均拉开了一个距离,这个距离正好等于  $\pi/2$ ,而这也

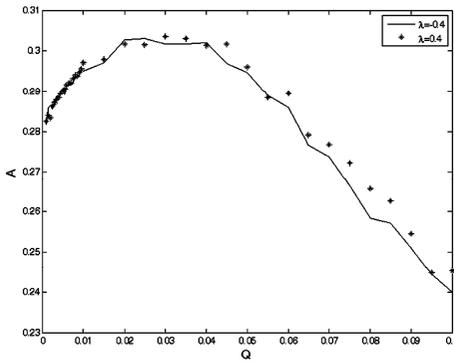


图6  $\lambda = \pm 0.4$  时的平均输出信号幅值随  $Q$  的变化曲线

Fig. 6 Amplitude of the average output signal to multiplicative noise curve when  $\lambda = \pm 0.4$

正好是符合线性响应理论的,在线性响应理论中,平均输出信号和平均速度之间就是相差  $\pi/2$ .

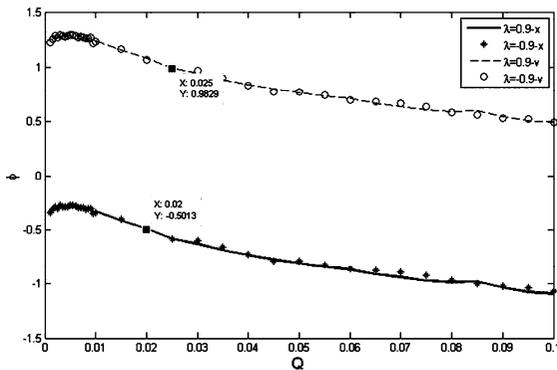


图7  $\lambda = \pm 0.9$  时的平均输出信号和速度的相位差随  $Q$  的变化曲线

Fig. 7 Phase difference of average output signal and velocity to multiplicative noise relationships when  $\lambda = \pm 0.9$

最后,我们就研究了不同大小的关联系数对系统随机共振的影响.从图8和图9中我们可以看出来,虽然  $\lambda$  从0逐渐增大到1,但是对平均输出信号的幅值和相位差随乘性噪声强度的变化规律的影响很小,尤其是平均输出信号的幅值和相位差取得峰值时所对应的最佳噪声强度都没有发生变化,因此我们可以说关联系数对随机共振的影响很小.

## 4 结论

本文主要研究了周期信号和白关联的加性和乘性高斯白噪声激励下,周期势系统的随机共振.利用线性响应理论,定义了系统响应的幅值和相位差,并作为随机共振的判断标准.通过讨论乘性和加性噪声对系统响应的功率谱密度、幅值和相位差系统的影响,我们发现:在系统加性噪声和关联系数不变的情况下,通过调节乘性噪声强度可以达到随机共振.噪声之间的关联系数的大小和正负对随机共振的影响是比较小的.

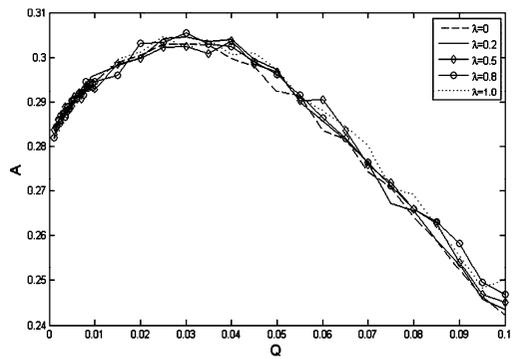


图8 系统平均输出信号幅值作为  $Q$  的函数随  $\lambda$  变化的曲线

Fig. 8 Amplitude of the average output signal to multiplicative noise curves for different  $\lambda$

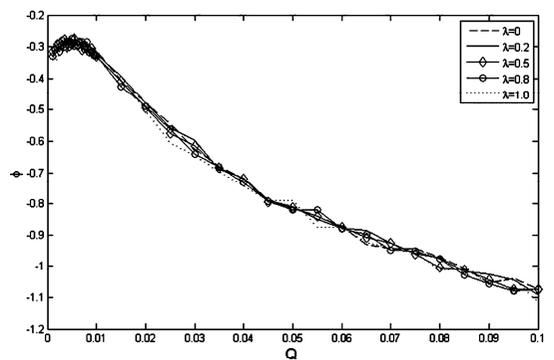


图9 系统平均输出信号相位差作为  $Q$  的函数随  $\lambda$  变化的曲线

Fig. 9 Phase difference of the average output signal to multiplicative noise curves for different  $\lambda$

## 参考文献

- 1 Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A*, 1981, 14(11): L453 ~ L457
- 2 Benzi R, Parisi G, Vulpiani A. Stochastic resonance in climatic change. *Tellus*, 1982, 34(1): 10 ~ 16
- 3 Gammaitoni L, Hänggi P, Hung P, Marchesoni F. Stochastic resonance. *Reviews of Modern Physics*, 1998, 70(1): 223 ~ 287
- 4 Hänggi P, Talkner P, Borkovec M. Reaction-rate theory: fifty years after Kramers. *Reviews of Modern Physics*, 1990, 62(2): 251 ~ 341
- 5 Glass L. Synchronization and rhythmic processes in physiology. *Nature*, 2001, 410: 277 ~ 284
- 6 胡岗. 随机力与非线性系统. 上海: 上海科技教育出版社, 1994 (Hu G. Stochastic force and nonlinear system. Shanghai: Education Press of Shanghai science and technology, 1994 (in Chinese))
- 7 贾洪军, 王江, 于海涛, 等. Courbage 神经元映射模型的随机共振研究. *动力学与控制学报*, 2011, 09(3): 263 ~ 265 (Jia H J, Wang J, Yu H T, et al. Stochastic resonance analysis on courbage map-based neural model. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 09(3): 263 ~ 265 (in Chinese))

- 8 VanWiggeren G D, Roy R. Communication with chaotic lasers. *Science*, 1998, 279(5354): 1198 ~ 1200
- 9 Cao L, Wu D J. Bistable kinetic model driven by correlated noises: Unified colored-noise approximation. *Physical Review E*, 1995, 52(3): 3228 ~ 3231
- 10 Li J H, Huang Z Q. Nonequilibrium phase transition in the case of correlated noises. *Physical Review E*, 1996, 53(4): 3315 ~ 3318
- 11 Xie C W, Mei D C. Effects of cross-correlated noises on the relaxation time of the bistable system. *Chinese Physics Letters*, 2003, 12(11): 1208 ~ 1212
- 12 Xie C W, Mei D C. Effects of correlated noises on the intensity fluctuation of a single-mode laser system. *Physics Letters A*, 2004, 323(5): 421 ~ 426
- 13 Mei D C, Xie C W, L Zhang. Effects of cross correlation on the relaxation time of a bistable system driven by cross-correlated noise. *Physical Review E*, 2003, 68(5): 051102 ~ 051108
- 14 Luo X Q, Zhu S Q. Stochastic resonance driven by two different kinds of colored noise in a bistable system. *Physical Review E*, 67(2): 021104 ~ 021116
- 15 Jin Y F, Xu W, Xu M, Fang T. Stochastic resonance in linear system due to dichotomous noise modulated by bias signal. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2005, 38: 3733 ~ 3742
- 16 靳艳飞, 徐伟, 李伟, 徐猛. 具有周期信号调制噪声的线性模型的随机共振. *物理学报*, 2005, 54(6): 96 ~ 101 (Jin Y F, Xu W, Li W, Xu M. Stochastic resonance for periodically modulated noise in a linear system. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(6): 96 ~ 101 (in Chinese))
- 17 李贝, 靳艳飞. 色关联的色噪声驱动的分段非线性模型的平均首次穿越时间. *物理学报*, 2013, 62(8): 150503 (Li B, Jin Y F. The mean first-passage time for piecewise nonlinear system driven by colored correlated additive and multiplicative colored noises. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(8): 150503 (in Chinese))
- 18 Hu G. Stochastic resonance in a periodic potential system under a constant force. *Physics Letters A*, 1993, 174(3): 247 ~ 249
- 19 Fronzoni L, Mammella R. Stochastic resonance in periodic potentials. *Journal of Statistical Physics*, 1993, 70(1-2): 501 ~ 512
- 20 Kim Y W, Sung W. Does stochastic resonance occur in periodic potentials? *Physical Review E*, 1998, 57(6): R6237 ~ 6240
- 21 Saikia S, Jayannavar A M, Mahato M C. Stochastic resonance in periodic potentials. *Physical Review E*, 2011, 83(6): 061121
- 22 Reenbohn W L, Pohlong S S, Mangal C, Mahato. Periodically driven underdamped periodic and washboard potential systems: dynamical states and stochastic resonance. *Physical Review E*, 2012, 85(3): 031144
- 23 Mammella R. A gentle introduction to the integration of stochastic differential equations. *Stochastic processes in physics, chemistry, and biology*. Springer Berlin Heidelberg, 2000, 557: 353 ~ 364

## STOCHASTIC RESONANCE IN A PERIODIC POTENTIAL SYSTEM DRIVEN BY CORRELATED ADDITIVE AND MULTIPLICATIVE WHITE NOISES\*

Liu Kaihe Jin Yanfei<sup>†</sup> Ma Zhengmu

(Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract** In this paper, the stochastic resonance in a periodic potential system driven by correlated multiplicative and additive white noises is studied. Using the linear response method, the expressions of power spectral density, amplitude of response and phase difference of response are given. The effects of noises on stochastic resonance are also presented. It is found that stochastic resonance occurs by adjusting the intensity of multiplicative noise for small noise. Moreover, the value as well as the plus-minus sign of the correlation between the additive and multiplicative noises have slight influence on the amplitude and phase difference of system response. The curves of amplitude and phase difference of response both exhibit a peak when the intensity of multiplicative noise is small, stochastic resonance occurs and energy transfers from noise to signal. With the increase of multiplicative noise intensity, stochastic resonance disappears and the noise makes system from order to disorder.

**Key words** stochastic resonance, periodic potential system, correlated noises, power spectral density

Received 13 March 2015, revised 22 April 2015.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11272051)

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: jinyf@bit.edu.cn