

# 受控旋转弹飞行动力学建模和稳定性分析\*

甄亭亭 徐鉴<sup>†</sup> 温建明

(同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092)

**摘要** 选取带有控制系统的旋转弹为研究对象, 考虑到控制环节不可避免的时滞及气动非线性效应, 从理论上进一步完善了旋转弹动力学模型. 从模型的特征方程出发, 以时滞、控制增益为分岔参数, 对系统的零平衡点稳定性进行了分析, 得到平衡点失稳后发生 Hopf 分岔的临界参数值, 并在理论预测的情况下数值模拟了攻角和侧滑角在不同情况下的失稳情况以及 Hopf 分岔周期解振幅随分岔参数的变化情况. 数值结果表明了理论预测的正确性, 时滞虽未改变旋转弹锥形运动方式, 但是却大幅度的减小了稳定飞行控制增益的取值范围, 因此在旋转弹姿态稳定性系统设计过程中时滞的影响不可忽略.

**关键词** 旋转弹, 时滞, 控制增益, 稳定性, Hopf 分岔

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-040

## 引言

旋转弹是指弹体在飞行中绕自身纵轴连续旋转的一类飞行器, 广泛用于常规兵器、制导兵器、战术导弹等. 随着常规兵器制导化及旋转制导弹药的发展, 研究带有控制系统的旋转弹运动系统稳定性具有重要意义. 但是在受控系统中, 控制信号传输或控制设备自身存在的某些缺陷使得控制系统与执行机构之间存在时滞, 于是控制系统就会成为时滞动力系统.

无时滞时的旋转弹的稳定性分析已经有了一定的研究结果. Nicolaidis<sup>[1]</sup> 在 1953 年较早的指出旋转弹体存在圆运动的特征. Murphy<sup>[2-3]</sup> 针对旋转引起的陀螺效应、马格努斯效应对于无控旋转弹的稳定性影响进行了研究; Kang, Meyer<sup>[4-6]</sup> 等在分析飞行器姿态稳定性的过程中考虑了有效载荷模块导致的飞行通道耦合行为; 侯鹏<sup>[7]</sup> 等针对直升机地面开车过程耦合气弹动力学行为进行了分析; Zarchan, George, Garnell<sup>[8-10]</sup> 提出分别在非旋转弹俯仰通道和偏航通道设计自动驾驶仪并且成功应用于飞行器设计中; Greagh<sup>[11]</sup> 则尝试将上述方法应用于旋转导弹的设计中; 李克勇<sup>[12]</sup> 等针对气动非线性情况, 利用李雅普诺夫一阶近似方法给

出了弹道顶点锥形运动的稳定性判据; 毛雪瑞<sup>[13]</sup> 基于弹体的短周期运动建立了弹体的章动角运动模型, 并采用李雅普诺夫一级近似方法得出了弹体章动稳定性的基本条件.

考虑受控环节不可避免的时滞对于旋转弹的稳定性影响文献并不多见. Lang, B. O., Idan<sup>[14-15]</sup> 等指出由于控制系统与执行机构之间存在时滞, 俯仰通道和偏航通道之间的耦合会在其他通道产生一个多余的控制力矩. Yang<sup>[16-19]</sup> 对带有自动驾驶仪的旋转导弹锥形运动的稳定性进行了研究, 文中提到了时滞, 但是却未分析时滞对于其稳定性的影响.

已有研究<sup>[20-21]</sup> 表明在一些机械设计过程中如果不考虑时滞, 就会降低控制效果, 甚至会导致控制失败. 近年来随着对飞行精度要求的提高, 考虑动力系统中时滞的影响就显的很有必要. 所以本文选取带有控制系统的旋转弹为研究对象, 考虑气动非线性效应, 进一步完善了旋转弹动力学模型, 得出避免旋转弹发生不收敛运动的时滞及增益量的适当范围以及时滞、控制增益对于系统稳定性的影响, 为旋转弹的工程设计和进一步深入研究提供理论依据.

## 1 旋转弹飞行动力学建模

旋转弹在空间的运动一般看成可控制的变质

2015-03-29 收到第 1 稿, 2015-04-07 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金重点资助项目(11032009)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: xujian@tongji.edu.cn

量系统具有6个自由度的运动. 文献[18]采用具有三回路自动驾驶仪的鸭式气动布局旋转弹作为研究对象, 两对鸭翼作为控制面随着弹体旋转. 文中把要研究的变质量系的旋转弹当作常质量的带有薄翼的细长刚体处理, 且认为旋转弹在小段时间内速度  $v$  及绕弹轴旋转速度  $\dot{\gamma}$  为常值, 即  $\dot{v}=0, \dot{\gamma}=0$ , 得到旋转弹的动力学方程如下:

$$\begin{cases} m\dot{\theta}\cos\varphi = F_{\gamma 2} \\ -m\dot{v}\varphi = F_{z 2} \\ A\ddot{\varphi} + C\dot{\gamma}\dot{\varphi}\cos\varphi - (C-A)\dot{\vartheta}^2\sin\varphi\cos\varphi = M_{y1} \\ A(\dot{\vartheta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\varphi) - C\dot{\gamma}\dot{\varphi} + \\ (C-A)\dot{\varphi}\sin\varphi = M_{z1} \end{cases} \quad (1)$$

其中各字符所代表的物理含义见附录1. 设航向角  $\varphi$ , 偏航角  $\varphi$ , 攻角  $\alpha$  及侧滑角  $\beta$  很小, 则有  $\cos\varphi \approx 1, \cos\varphi \approx 1, \sin\varphi \approx \varphi, \theta = \vartheta - \alpha, \varphi = \psi - \beta$ , 将旋转弹所受力及力矩(见附录2)代入方程(1)则简化为如下形式:

$$\begin{cases} m\dot{\theta} = \frac{1}{2}QSC'_{L\alpha}(1+k_L\alpha^2) - \\ \frac{1}{2}QSC''_{F\mu}(\dot{\gamma}d/v)\beta(1+k_{F\mu}\beta^2) + \\ T\cos\beta\sin\alpha - mg\cos\theta \\ -m\dot{v}\varphi = -\frac{1}{2}QSC'_{L\beta}(1+k_L\beta^2) - \\ \frac{1}{2}QSC''_{F\mu}(\dot{\gamma}d/v)\alpha(1+k_{F\mu}\alpha^2) - \\ T\sin\beta - mg\sin\varphi\sin\theta \\ A\ddot{\varphi} + C\dot{\gamma}\dot{\varphi} - (C-A)\dot{\vartheta}^2\varphi = -\frac{1}{2}QSLC'_{\omega y}(\frac{\dot{\psi}L}{v}) \times \\ (1+k_{M\omega}\beta^2) + \frac{1}{2}QSLC''_{M\mu}(\frac{\dot{\gamma}d}{v})\alpha(1 + \\ k_{M\mu}\alpha^2) + \frac{1}{2}QSLC'_{M\beta}\beta(1+k_{M\beta}\beta^2) + \\ \frac{1}{2}QSLC'_{\sigma}\sigma_2 \\ A\ddot{\vartheta} - C\dot{\gamma}\dot{\varphi} + (C-2A)\dot{\vartheta}\dot{\varphi} = -\frac{1}{2}QSLC'_{\omega z}(\frac{\dot{\psi}L}{v}) \times \\ (1+k_{M\omega}\alpha^2) - \frac{1}{2}QSLC''_{M\mu}(\frac{\dot{\gamma}d}{v})\beta(1+k_{M\mu}\beta^2) + \\ \frac{1}{2}QSLC'_{M\alpha}\alpha(1+k_{M\alpha}\alpha^2) + \frac{1}{2}QSLC'_{\sigma}\sigma_1 \end{cases} \quad (2)$$

令准弹体坐标系上的输出响应  $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$ , 准弹体上

的输入指令  $\sigma_c = \begin{pmatrix} \sigma_{1c} \\ \sigma_{2c} \end{pmatrix}$ , 由文献[18]知,

$$\sigma(t) = k_s k_r G \sigma_c(t) \quad (3)$$

其中,

$$G = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_c + \tau\dot{\gamma}) & \sin(\gamma_c + \tau\dot{\gamma}) \\ -\sin(\gamma_c + \tau\dot{\gamma}) & \cos(\gamma_c + \tau\dot{\gamma}) \end{bmatrix},$$

且

$$k_r = \frac{1}{\sqrt{(1-T_s^2\dot{\gamma}^2)^2 + (2\mu_s T_s \dot{\gamma})^2}},$$

$$\gamma_c = \arccos \frac{1-T_s^2\dot{\gamma}^2}{\sqrt{(1-T_s^2\dot{\gamma}^2)^2 + (2\mu_s T_s \dot{\gamma})^2}}.$$

由于时滞  $\tau$  的存在,  $\vec{\sigma}_c$  实际上是针对  $t-\tau$  时刻的误差信号做出的反应, 则式(3)实际上应为

$$\vec{\sigma}(t) = k_s k_r G \vec{\sigma}_c(t-\tau) \quad (4)$$

文中采用文献[19]中三回路自动驾驶仪对旋转弹进行稳定控制. 由三回路自动驾驶仪的工作原理可知  $t-\tau$  时刻输入指令为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{c1} \\ \sigma_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_p[a_{cy} - k_a(sc\dot{\vartheta} + a_y)] - k_z\dot{\vartheta}}{s} - k_{\omega}\dot{\vartheta} \\ -\frac{k_p[a_{cz} - k_a(sc\dot{\varphi} - a_z)] - k_z\dot{\varphi}}{s} - k_{\omega}\dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

令加速度输入指令  $a_{cy}=0, a_{cz}=0$ , 且旋转弹加速度  $a_y = v\dot{\theta}, a_z = -v\dot{\varphi}$ , 整理式(5)得

$$\begin{bmatrix} \sigma_{c1} \\ \sigma_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(ck_p k_a + k_{\omega})\dot{\vartheta} - (vk_p k_a + k_z)\dot{\vartheta} + vk_p k_a \alpha \\ -(ck_p k_a + k_{\omega})\dot{\varphi} - (vk_p k_a + k_z)\dot{\varphi} + vk_p k_a \beta \end{bmatrix} \quad (6)$$

将式(6)代入式(4)得到

$$\begin{cases} \sigma_1(t) = k_s k_r \cos(\gamma_c + \tau\dot{\gamma}) (-(ck_p k_a + k_{\omega})\dot{\vartheta}(t-\tau) - (vk_p k_a + k_z)\dot{\vartheta}(t-\tau) + vk_p k_a \alpha(t-\tau)) + \\ k_s k_r \sin(\gamma_c + \tau\dot{\gamma}) (-(ck_p k_a + k_{\omega})\dot{\varphi}(t-\tau) - \\ (vk_p k_a + k_z)\dot{\varphi}(t-\tau) + vk_p k_a \beta(t-\tau)) \\ \sigma_2(t) = k_s k_r \sin(\gamma_c + \tau\dot{\gamma}) ((ck_p k_a + k_{\omega})\dot{\vartheta} \times \\ (t-\tau) + (vk_p k_a + k_z)\dot{\vartheta}(t-\tau) - \\ vk_p k_a \alpha(t-\tau)) + k_s k_r \cos(\gamma_c + \tau\dot{\gamma}) \times \\ (-(ck_p k_a + k_{\omega})\dot{\varphi}(t-\tau) - \\ (vk_p k_a + k_z)\dot{\varphi}(t-\tau) + vk_p k_a \beta(t-\tau)) \end{cases} \quad (7)$$

假设在自动驾驶仪的设计过程中考虑了重力的因素, 则将式(7)代入方程(2)经简化得

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \vartheta - a_1\alpha + a_2\beta - a_3\alpha^3 + a_4\beta^3 \\ \dot{\beta} = \varphi - a_1\beta - a_2\alpha - a_3\beta^3 - a_4\alpha^3 \\ \dot{\vartheta} = -b_1\vartheta + b_4\varphi + b_3\alpha - b_2\beta + b_{21}\vartheta\varphi\varphi - \\ b_{22}\vartheta\alpha^2 + b_{23}\alpha^3 - b_{24}\beta^3 + c_3\alpha(t-\tau) + \\ c_6\beta(t-\tau) - c_2\vartheta(t-\tau) - c_5\varphi(t-\tau) - \\ c_1\vartheta(t-\tau) - c_4\varphi(t-\tau) \\ \dot{\varphi} = -b_1\varphi - b_4\vartheta + b_3\beta + b_2\alpha + b'_{21}\vartheta^2\varphi + \\ b_{22}\varphi\beta^2 + b_{23}\beta^3 + b_{24}\alpha^3 - \\ c_6\alpha(t-\tau) + c_3\beta(t-\tau) + c_5\vartheta(t-\tau) - \\ c_2\varphi(t-\tau) + c_4\vartheta(t-\tau) - c_1\varphi(t-\tau) \end{cases} \quad (8)$$

其中各项系数的表达式见附录三。

## 2 旋转弹稳定性分析

下面分析方程(8)受控回路中的时滞对弹体飞行稳定性的影响. 令  $x = (\alpha \ \beta \ \vartheta \ \varphi \ \vartheta \ \varphi)^T$ , 方程(8)可以写成如下形式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + F(x), \quad (9)$$

$$\text{其中, } A = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_3 & -b_2 & 0 & 0 & -b_1 & b_4 \\ b_2 & b_3 & 0 & 0 & -b_4 & -b_1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_6 & -c_2 & -c_5 & -c_1 & -c_4 \\ -c_6 & c_3 & c_5 & -c_2 & c_4 & -c_1 \end{bmatrix}$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} a_3\alpha^3 + a_4\beta^3 \\ a_3\beta^3 - a_4\alpha^3 \\ 0 \\ 0 \\ b_{21}\vartheta\varphi\varphi + b_{22}\vartheta\alpha^2 + b_{23}\alpha^3 + b_{24}\beta^3 \\ b'_{21}\vartheta^2\varphi + b_{22}\varphi\beta^2 + b_{23}\beta^3 + b_{24}\alpha^3 \end{bmatrix}$$

令  $\dot{x} = 0$ , 易得  $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$  是方程(9)的平衡点. 取方程(9)的线性部分有

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \quad (10)$$

从而得到方程(10)的特征方程

$$|\lambda E - A + Be^{-\lambda\tau}| = 0, \quad (11)$$

即

$$\begin{aligned} & \lambda^6 + (d_{11} + d_{12}e^{-\lambda\tau})\lambda^5 + (d_{21} + d_{22}e^{-\lambda\tau} + \\ & d_{23}e^{-2\lambda\tau})\lambda^4 + (d_{31} + d_{32}e^{-\lambda\tau} + d_{33}e^{-2\lambda\tau})\lambda^3 + \\ & (d_{41} + d_{42}e^{-\lambda\tau} + d_{43}e^{-2\lambda\tau})\lambda^2 + (d_{52}e^{-\lambda\tau} + \\ & d_{53}e^{-2\lambda\tau})\lambda + d_{63}e^{-2\lambda\tau} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{41}, d_{42}, d_{43}, d_{52}, d_{53}, d_{63}$  是关于  $a_1, a_2, b_1, b_2, b_4, b_5, b_6, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  的表达式(见附录2), 且我们要考虑的参数只有  $k_p, k_z, \dot{\gamma}, \tau$ , 因此表达式中的未知参数只有  $k_p, k_z, \dot{\gamma}, \tau$ .

由于  $|A| \neq 0$ , 所以方程(11)无零解. 令  $\lambda = \mu + i\omega$ , 由于特征方程(11)的复根总是以共轭复数形式出现, 不妨设  $\omega > 0$ . 我们考虑  $k_p, k_z, \dot{\gamma}, \tau$  满足什么样的条件时, 方程(11)的所有实部  $\mu < 0$ . 当  $\mu = 0$  时,  $\lambda = i\omega$ , 代入方程(12)并将方程(12)的实部和虚部分开, 得到

$$\begin{cases} -\omega^6 + d_{12}\omega^5 \sin(\omega\tau) + (d_{21} + d_{22}\cos(\omega\tau) + \\ d_{23}\cos(2\omega\tau))\omega^4 - (d_{32}\sin(\omega\tau) + \\ d_{33}\sin(2\omega\tau))\omega^3 - (d_{41} + d_{42}\cos(\omega\tau) + \\ d_{43}\cos(2\omega\tau))\omega^2 + (d_{52}\cos(\omega\tau) + \\ d_{53}\cos(2\omega\tau))\omega + d_{63}\cos(\omega\tau) = 0 \\ (d_{11} + d_{12}\cos(\omega\tau) + d_{13}\cos(2\omega\tau))\omega^5 - \\ (d_{22}\sin(\omega\tau) + d_{23}\sin(2\omega\tau))\omega^4 - \\ (d_{31} + d_{32}\cos(\omega\tau) + d_{33}\cos(2\omega\tau))\omega^3 - \\ (d_{42}\sin(\omega\tau) + d_{43}\sin(2\omega\tau))\omega^2 + \\ (d_{52}\cos(\omega\tau) + d_{53}\cos(2\omega\tau))\omega - \\ d_{63}\sin(2\omega\tau) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

为了便于分析, 不失一般性, 假定加速度器位于弹体质心位置, 即  $c = 0$ , 此时, 加速度器测量的是弹体质心实际的加速度, 于是可令加速度调节增益  $k_a = 1$ . 当阻尼回路增益  $k_\omega$  过小时, 令时滞  $\tau$  和转速  $\dot{\gamma}$  为常值时, 无论  $k_p, k_z$  如何取值, 旋转弹都将失稳. 因此, 根据经验我们选取了  $k_\omega = 0.6$ . 通过数值模拟即可得到满足方程(13)的不同的函数曲线  $f(k_p, k_z) = 0$ , 即旋转弹保持稳定的临界曲线, 如图1(a)~(d)所示, 临界曲线下方的区域则表示使系统保持稳定的  $k_p, k_z$  的范围. 表1给出了某旋转弹相关参数.

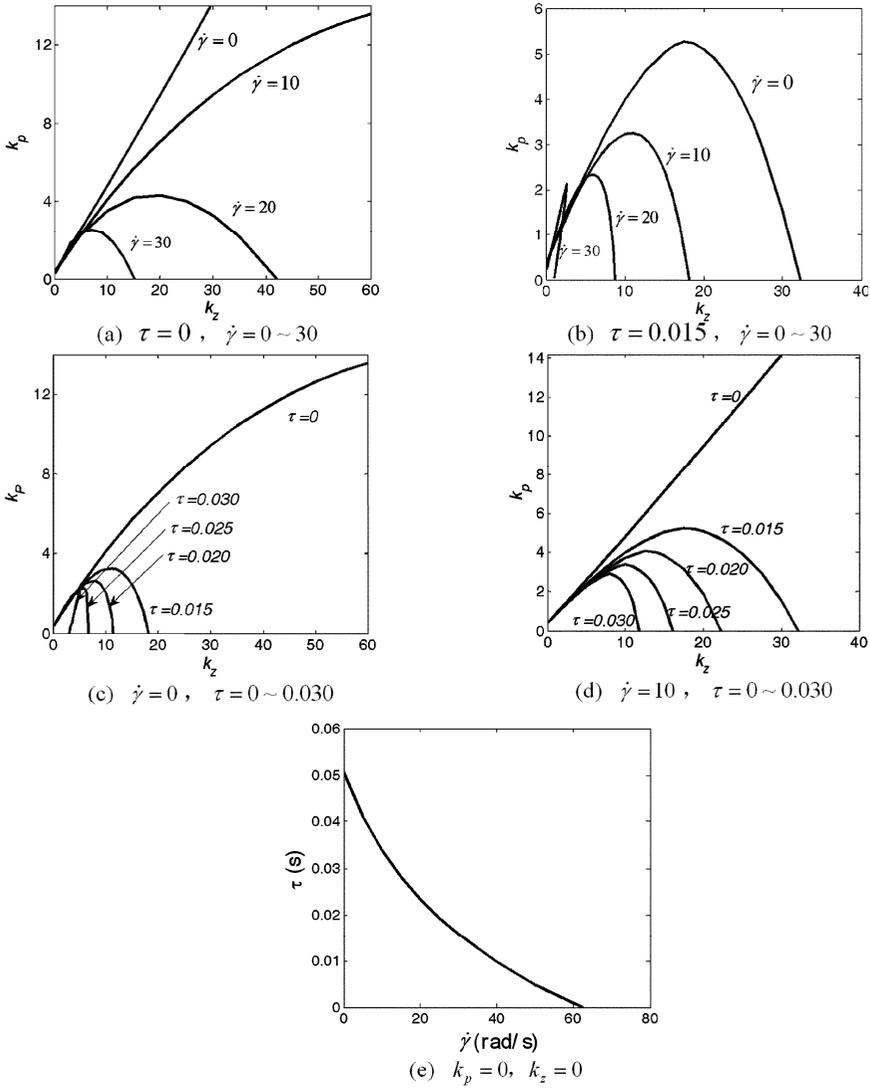


图1 临界曲线

Fig.1 Critical curves

表1 旋转弹的相关参数

Table 1 Parameters of a spinning missile

Para.	Value	Para.	Value
$v, \text{m/s}$	1200	$c'_{L}, k_L$	10.03, 8.91
$C/A$	$3.33 \times 10^{-3}$	$c'_{F\mu}, k_{F\mu}$	-1.103, 13.5
$T_s, \text{s}$	0.016	$c'_{M\omega}, k_{M\omega}$	1.777, 1.8
$k_s$	10	$c'_{M\mu}, k_{M\mu}$	-5.357, 14.8
$\mu_s$	0.5	$c'_{Ms}, k_{Ms}$	-0.6589, 5.66
$c'_{\sigma}$	0.0546		

由图1(a)可知控制系统不存在时滞时,随着转速的增加,使系统保持稳定的 $k_p, k_z$ 范围越来越小;由图1(b)可知控制系统存在时滞时,使系统保持稳定的 $k_p, k_z$ 范围依然随着转速的增加而减小,且与图1(a)的比较可知,当系统中存在时滞 $\tau$ 时,使系统保持稳定的 $k_p, k_z$ 的范围缩小的更为剧烈;

由图1(c)和图1(d)可知无论弹体是否旋转,使系统保持稳定的 $k_p, k_z$ 的范围均随着时滞 $\tau$ 的增大而减小;由图1(a)及图1(b)已知旋转速度的增大会减小使系统稳定的 $k_p, k_z$ 区域,因此当弹体旋转时,时滞的加入使得 $k_p, k_z$ 范围减小的更为剧烈。

由图1(d)可知随着时滞的增加,使系统保持稳定时 $k_p, k_z$ 的范围会减小到零这种极限情况,此时若要保持系统稳定则需要相应的调整转速 $\dot{\gamma}$ .则令 $k_p = 0, k_z = 0$ ,通过式(13)即可得到系统稳定性临界曲线 $f(\dot{\gamma}, \tau) = 0$ ,如图1(e).

图1(e)表明当 $k_p, k_z$ 均缩小为0的时候,若要使时滞继续增加,则必须相应地减小旋转速度,而当时滞达到一定值时,无论怎样调整控制增益 $k_p, k_z$ 及转速 $\dot{\gamma}$ 系统都不能保持稳定状态.如图1(e),

当时滞  $\tau = 0.051$ , 转速  $\dot{\gamma} = 0$ , 无论怎样调整控制增益  $k_p$ 、 $k_z$  系统都将不能保持稳定。

为验证上述所得稳定区域的正确性, 选取不同稳定区域中的点观察平衡点的稳定性, 如图 2(a) ~ 2(d) 所示。如取图 1(a) 中点 A ( $\tau = 0, \dot{\gamma} = 10, k_z = 10, k_p = 4$ ); 图 1(c) 中点 B ( $\dot{\gamma} = 0, \tau = 0.025, k_z = 10, k_p = 3$ );

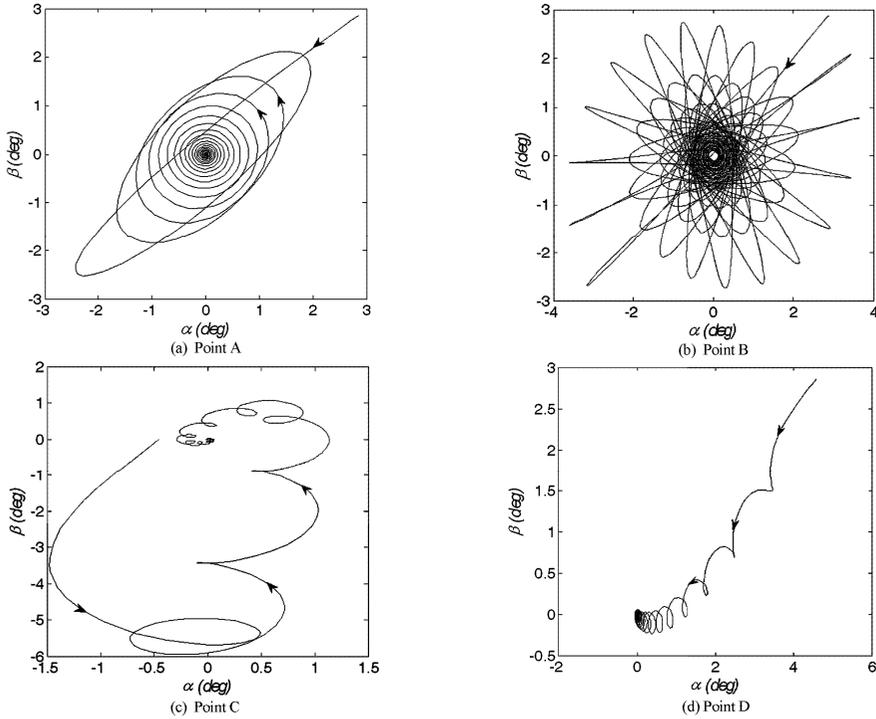


图 2 不同点处的稳定运动曲线

Fig. 2 Stable motion curves at different points

综上可知, 时滞虽未改变旋转弹的锥形运动形式, 但是时滞和转速都会影响使系统保持稳定的  $k_p$ 、 $k_z$  的范围, 且  $k_p$ 、 $k_z$  的范围均随着时滞与转速的增加而减小。同时值得注意的是该时滞存在上限, 当时滞超过某一值时, 无论如何调整  $k_p$ 、 $k_z$  的值系统都将失稳。所以在研究旋转弹的动力学系统稳定性过程中, 考虑时滞的影响就显得很有必要。

### 3 旋转弹失稳运动分析

上一节我们通过数值模拟已经得到了系统 (9) 对应的线性系统的平衡点渐进稳定时的  $k_p$ 、 $k_z$  区域范围。当  $k_p$ 、 $k_z$  的值超过临界曲线进入不稳定区域时, 将导致系统平衡点失稳。由于在临界曲线上存在纯虚根  $\lambda = i\omega$ , 系统 (9) 将出现分岔。由 Hopf 分岔的定义可知, 当临界曲线上的点满足条件

$\left. \frac{d\mu}{dk_p} \right|_{\lambda = i\omega} \neq 0, \left. \frac{d\mu}{dk_z} \right|_{\lambda = i\omega} \neq 0$  时, 系统发生 Hopf 分岔,

4); 图 1(d) 中点 C ( $\dot{\gamma} = 10, \tau = 0.03, k_z = 2, k_p = 0.2$ ); 图 1(e) 中点 D ( $\tau = 0.04, \dot{\gamma} = 5.5, k_z = 0, k_p = 0$ )。

由图 2(a) ~ 2(d) 可知弹体飞行时顶部的运动轨迹随着时间收敛到平凡解, 进而验证了所得稳定性临界曲线的正确性, 同时表明时滞的加入并未改变旋转弹的锥形运动形式。

攻角和侧滑角产生周期解的运动形式。由方程 (12) 可以得到

$$\left\{ \begin{aligned} \left. \frac{d\mu}{dk_p} \right|_{\lambda = i\omega_0} &= \operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{dk_p} \right) \Big|_{\lambda = i\omega_0} = \\ &\operatorname{Re} \left( - \frac{e_1 \lambda^5 + e_2 \lambda^4 + e_3 \lambda^3 + e_4 \lambda^2 + e_5 \lambda + e_6}{f_1 \lambda^5 + f_2 \lambda^4 + f_3 \lambda^3 + f_4 \lambda^2 + f_5 \lambda + f_6} \right) \Big|_{\lambda = i\omega_0} \\ \left. \frac{d\mu}{dk_z} \right|_{\lambda = i\omega_0} &= \operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{dk_z} \right) \Big|_{\lambda = i\omega_0} = \\ &\operatorname{Re} \left( - \frac{g_1 \lambda^5 + g_2 \lambda^4 + g_3 \lambda^3 + g_4 \lambda^2 + g_5 \lambda + g_6}{f_1 \lambda^5 + f_2 \lambda^4 + f_3 \lambda^3 + f_4 \lambda^2 + f_5 \lambda + f_6} \right) \Big|_{\lambda = i\omega_0} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

其中,  $e_1 = \frac{dd_{12}}{dk_p} e^{-\lambda\tau}$ ,  $e_2 = \frac{dd_{22}}{dk_p} e^{-\lambda\tau} + \frac{dd_{23}}{dk_p} e^{-2\lambda\tau}$ ,  
 $e_3 = \frac{dd_{32}}{dk_p} e^{-\lambda\tau} + \frac{dd_{33}}{dk_p} e^{-2\lambda\tau}$ ,  $e_4 = \frac{dd_{42}}{dk_p} e^{-\lambda\tau} + \frac{dd_{43}}{dk_p} e^{-2\lambda\tau}$ ,  
 $e_5 = \frac{dd_{52}}{dk_p} e^{-\lambda\tau} + \frac{dd_{53}}{dk_p} e^{-2\lambda\tau}$ ,  $e_6 = \frac{dd_{63}}{dk_p} e^{-2\lambda\tau}$ ,

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{dd_{12}}{dk_z} e^{-\lambda\tau}, \quad g_2 = \frac{dd_{22}}{dk_z} e^{-\lambda\tau} + \frac{dd_{23}}{dk_z} e^{-2\lambda\tau}, \\
 g_3 &= \frac{dd_{32}}{dk_z} e^{-\lambda\tau} + \frac{dd_{33}}{dk_z} e^{-2\lambda\tau}, \quad g_4 = \frac{dd_{42}}{dk_z} e^{-\lambda\tau} + \frac{dd_{43}}{dk_z} e^{-2\lambda\tau}, \\
 g_5 &= \frac{dd_{52}}{dk_z} e^{-\lambda\tau} + \frac{dd_{53}}{dk_z} e^{-2\lambda\tau}, \quad g_6 = \frac{dd_{63}}{dk_z} e^{-2\lambda\tau}, \\
 f_1 &= 6 - \tau d_{12} e^{-\lambda\tau}, \\
 f_2 &= 5d_{11} + (5d_{12} - \tau d_{22}) e^{-\lambda\tau} - 2\tau d_{22} e^{-2\lambda\tau}, \\
 f_3 &= 4d_{21} + (4d_{22} - \tau d_{32}) e^{-\lambda\tau} + (4d_{23} - 2\tau d_{23}) e^{-2\lambda\tau}, \\
 f_4 &= 3d_{31} + (3d_{32} - \tau d_{42}) e^{-\lambda\tau} + \\
 &\quad (3d_{33} - 2\tau d_{43}) e^{-2\lambda\tau}, \\
 f_5 &= 2d_{41} + (2d_{42} - \tau d_{52}) e^{-\lambda\tau} + \\
 &\quad (2d_{43} - 2\tau d_{53}) e^{-2\lambda\tau}, \\
 f_6 &= d_{52} e^{-\lambda\tau} + (d_{53} - 2\tau d_{63}) e^{-2\lambda\tau}.
 \end{aligned}$$

取图 1(d) 上一点  $E(\tau = 0.02, \dot{\gamma} = 10, k_z = 10)$ ,

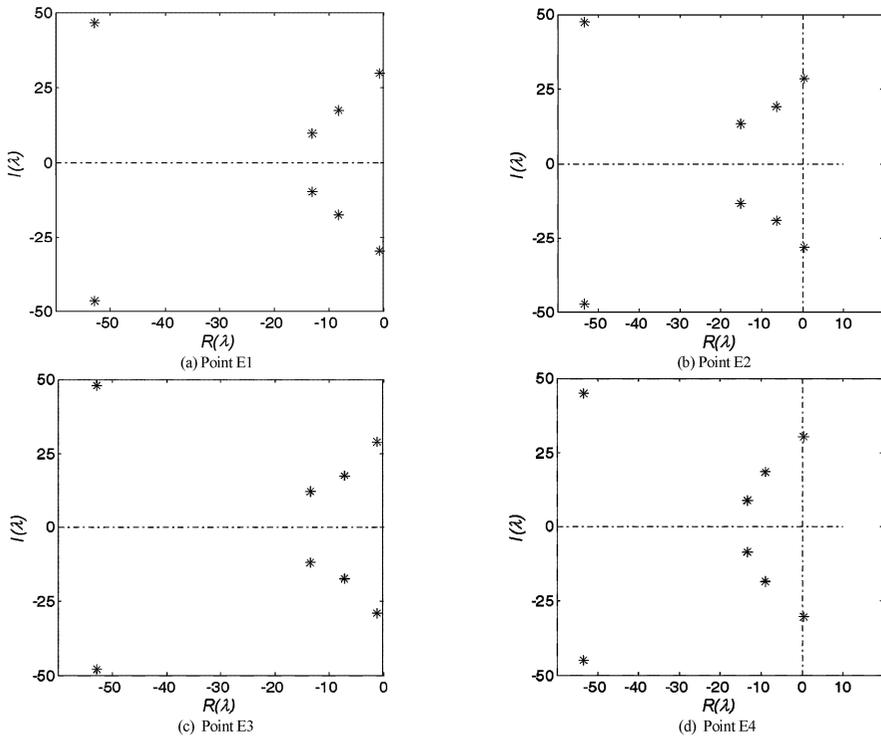


图 3 不同点处的特征值分布

Fig. 3 Distribution of eigenvalues at different points

图 1(e) 表示  $k_p = 0, k_z = 0$  的极限情况, 此时我们以转速  $\dot{\gamma}$  及时滞  $\tau$  为分岔参数. 由 Hopf 分岔的定义可知, 当临界曲线上的点满足条件  $\left. \frac{d\mu}{d\dot{\gamma}} \right|_{\lambda = i\omega_0} = \text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\dot{\gamma}}\right) \Big|_{\lambda = i\omega_0} \neq 0, \left. \frac{d\mu}{d\tau} \right|_{\lambda = i\omega_0} = \text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right) \Big|_{\lambda = i\omega_0} \neq 0$  时, 系统发生 Hopf 分岔. 同理我们取图 1(e) 临界曲线上一点  $F(\tau = 0.034, \dot{\gamma} = 10, k_z = 0, k_p = 0)$  为例, 得

$k_p = 2.021$ ) 为例, 特征值实部存在  $\mu = 0$  的情况. 将该点带入方程 (14), 得到  $\left. \frac{d\mu}{dk_p} \right|_{\lambda = i\omega_0} > 0, \left. \frac{d\mu}{dk_z} \right|_{\lambda = i\omega_0} > 0$ , 即当  $k_p, k_z$  穿过临界值增大时, 方程 (11) 的特征值的实部  $\mu$  由负变正. 我们取  $E$  点附近数据观察方程 (11) 的特征值的分布情况: (1) E1:  $\tau = 0.02, \dot{\gamma} = 10, k_z = 10, k_p = 1.9$ ; (2) E2:  $\tau = 0.02, \dot{\gamma} = 10, k_z = 10, k_p = 2.1$ ; (3) E3:  $\tau = 0.02, \dot{\gamma} = 10, k_p = 2.021, k_z = 9.8$ ; (4) E4:  $\tau = 0.02, \dot{\gamma} = 10, k_p = 2.021, k_z = 10$ . 2, 如图 3(a) ~ 3(d) 所示.

由图 3(a) ~ 3(d) 可知  $k_p, k_z$  的值穿过临界曲线增大时, 特征方程 (11) 的特征值的实部由负变正, 与理论预测结果一致. 由非线性时滞系统的 Hopf 分岔定理可知, 当  $k_p, k_z$  从稳定区域经过上述稳定性临界点时, 系统 (9) 发生了 Hopf 分岔.

到  $\left. \frac{d\mu}{d\dot{\gamma}} \right|_{\lambda = i\omega_0} > 0, \left. \frac{d\mu}{d\tau} \right|_{\lambda = i\omega_0} > 0$ , 即当  $\dot{\gamma}, \tau$  穿过临界值增大时, 特征方程 (11) 的特征值的实部  $\mu$  由负变正, 即当  $\dot{\gamma}, \tau$  从稳定区域经过  $F$  点时, 系统 (9) 发生了 Hopf 分岔.

同理我们验证了图 1(c) 上临界点  $G(\tau = 0.02, \dot{\gamma} = 0, k_z = 15, k_p = 3.967)$ , 图 1(d) 上临界点  $H(\tau = 0.025, \dot{\gamma} = 10, k_z = 6.879, k_p = 0)$  满足 Hopf 分

岔条件. 同时我们分别在 E、G、H、F 点附近失稳区域选取一个不同点, 观察旋转弹失稳之后的运动形式: (1)  $E_u: \tau = 0.02, \dot{\gamma} = 10, k_z = 10, k_p = 2.1$ ; (2)

$G_u: \tau = 0.02, \dot{\gamma} = 0, k_z = 15, k_p = 4.1$ ; (3)  $H_u: \tau = 0.025, \dot{\gamma} = 10, k_z = 8, k_p = 0$ ; (4)  $F_u: \tau = 0.05, \dot{\gamma} = 10, k_z = 0, k_p = 0$  如图 4(a) ~ 4(d) 所示.

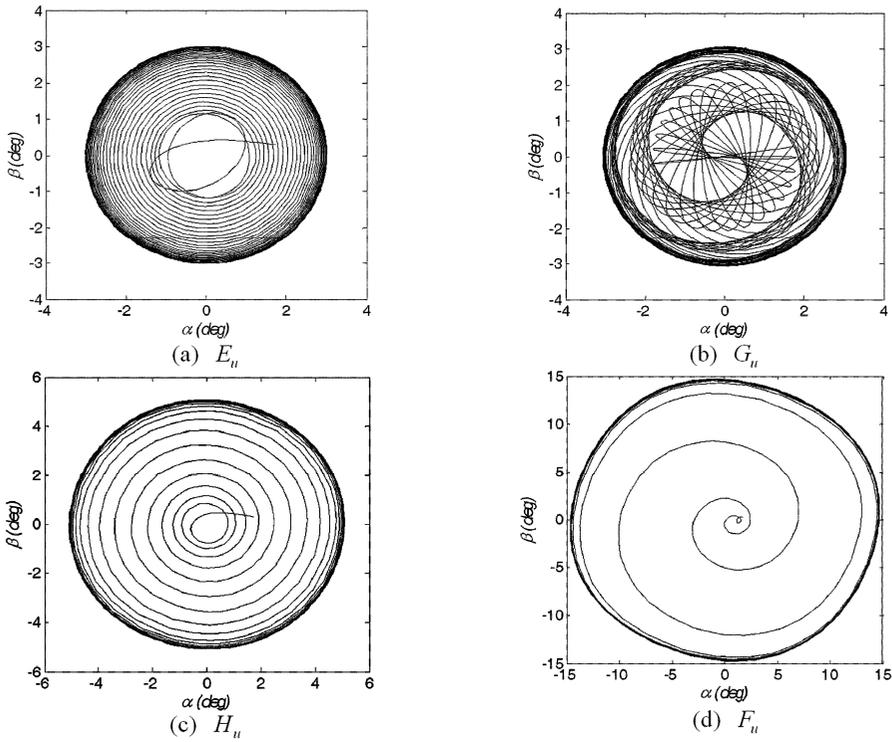


图 4 不同点的失稳运动曲线

Fig. 4 Unstable motion curves at different points

由图 4(a) ~ 4(d) 可知当增益  $k_p, k_z$  及时滞  $\tau$  穿过临界值某些点时系统平衡点失稳发生 Hopf 分岔, 产生周期解, 且在非稳定区域内选取不同的参数值时, 产生的周期解的振幅也不相同. 例如, 设初始扰

动为  $(5^\circ \ 3^\circ \ 5^\circ \ 3^\circ \ 0 \ 0)$ , 图 5(a) 中令  $\dot{\gamma} = 10, \tau = 0.015$ , 图 5(b) 中令  $\dot{\gamma} = 10, k_p = 1$ , 分别模拟了  $k_z$  取不同值平衡点失稳后攻角和侧滑角周期运动振幅随比例调节增益  $k_p$  及时滞  $\tau$  的变化情况.

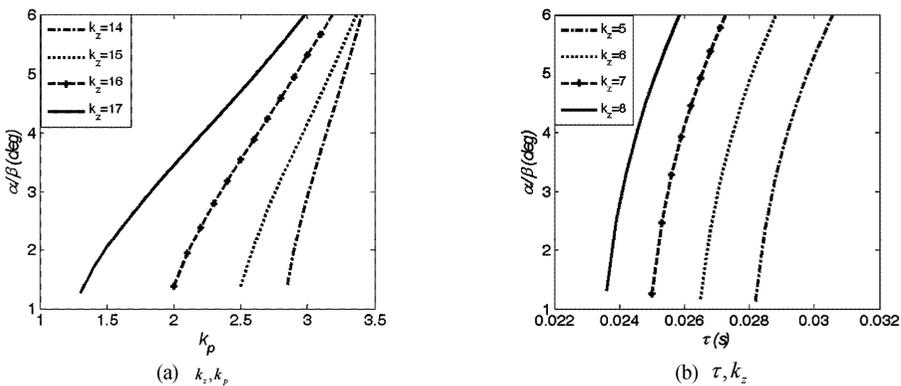


图 5 周期解振幅随参数变化的曲线

Fig. 5 Amplitude of periodic solution changing with parameters

图 5(a) 及图 5(b) 表明, 当所取参数超过临界曲线进入非稳定区域时, 旋转弹并不是立即发散, 而是在一定范围内做周期性运动, 随着参数远离临

界值周期解振幅也随之变大, 则旋转弹的命中率也随之降低.

## 4 结论

本文选取带有控制系统的旋转弹为研究对象. 在考虑时滞及气动非线性效应下, 从理论上进一步完善了旋转弹的动力学模型. 以时滞  $\tau$ 、增益  $k_p$ 、 $k_z$  为控制参数, 数值模拟得到系统的稳定性临界曲线及平衡点失稳后的运动形式, 进而得到以下结论:

(1) 虽然时滞的存在未改变旋转弹锥形运动形式, 但时滞和转速均会影响系统稳定时  $k_p$ 、 $k_z$  的取值范围, 并且  $k_p$ 、 $k_z$  的取值范围均会随着时滞及转速的增大而减小. 因此当弹体旋转时, 时滞的存在就会使得  $k_p$ 、 $k_z$  的取值范围缩小地更为剧烈. 同时系统的时滞存在上限, 即超过某一值时, 无论如何调整  $k_p$ 、 $k_z$  的值系统都将失稳. 因此可以看出时滞的存在对于系统保持稳定是非常不利的, 所以随着对飞行精度要求的提高, 考虑控制系统时滞的影响就显得更加重要.

(2) 增益  $k_p$ 、 $k_z$  及时滞  $\tau$  在穿越临界曲线上的点时会发生 Hopf 分岔, 产生周期解, 且周期解的振幅随分岔参数远离临界值而增大, 从而降低了旋转弹的命中率.

## 参 考 文 献

- Nicolaides J D, On the free flight motion of missiles having slight configurational asymmetries, U. S. Army Ballistic Research Lab. Rept. 858, June 1953
- Murphy C H. Free-flight motion of symmetric missiles, Ballistic Research Lab. Rept. 1216, Aberdeen Proving Ground, MD, 1963
- Murphy C H. Some special cases of spin yaw lock-in. *Journal of Guidance*, 1989, 12(6): 771 ~ 776
- Kang, J Y, Cochran J E. Stability criteria of slosh motion with periodicity in a spinning spacecraft. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2004, 27(3): 356 ~ 364
- Meyer R X. Coning instability of spacecraft during period of thrust. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1996, 33(6): 781 ~ 788
- Kang J Y, Cochran J E. Resonant motion of a spinning stabilized thrusting spacecraft. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2004, 27(3): 356 ~ 364
- 侯鹏, 杨卫东, 孙东红, 等. 直升机地面开车过程旋翼/机体/起落架耦合气弹动力学分析. *振动工程学报*, 2013, 26(3): 318 ~ 327 (Hou P, Yang W D, Sun D H, et al. Aero-elastic analysis of rotor/fuselage/landing gears coupled system for helicopter during rotor starting process on the ground. *Journal of Vibration Engineering*, 2013, 26(3): 318 ~ 327 (in Chinese))
- Zarchan P. Tactical and strategic missile guidance, 5th ed., AIAA, Reston, VA, 2007: 510 ~ 527
- George M S. Missile guidance and control systems, Springer-Verlag, New York, 2004: 129 ~ 151
- Garnell P. Guided weapon control systems, 2nd ed. New York: Pergamon, 1980: 92 ~ 151
- Creagh M A, Mee D J. Attitude guidance for spinning vehicles with independent pitch and yaw control. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2010, 33(3): 915 ~ 922
- 李克勇, 赵良玉, 周伟. 一类旋转弹在高空的锥形运动的稳定性. *动力学与控制学报*, 2012, 10(3): 239 ~ 243 (Li K Y, Zhao L Y, Zhou W. Stability of coning motion of spinning rocket projectiles at high altitude. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, 10(3): 239 ~ 243 (in Chinese))
- Mao X R, Yang S X, Xu Y. Coning motion stability of wrap around fin rockets. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2007, 50(3): 343 ~ 350
- Lange B O, Fleming A W, Parkinson B W. Control synthesis for spinning aerospace vehicles. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1967, 4(2): 142 ~ 150
- Idan M, Shinma T, Golan O M. Integrated sliding mode autopilot guidance for dual-control missile. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2007, 30(4): 1081 ~ 1089
- 闫晓勇, 杨树兴, 张成. 基于章动运动理论的火箭弹锥形运动稳定性分析. *兵工学报*, 2009, 30(10): 1291 ~ 1296 (Yan X Y, Yang S X, Zhang C. Analysis of stability for coning motion of rockets based on theory of nutation movement. *Acta Armamentarii*, 2009, 30(10): 1291 ~ 1296 (in Chinese))
- Yan X Y, Yang S X, Zhang C. Coning motion of spinning missiles induced by the rate loop. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2010, 33(3): 1490 ~ 1499
- Li K Y, Yang S X, Zhang C. Stability of spinning missiles with an acceleration autopilot. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2012, 35(3): 774 ~ 786
- Li K Y, Yang S X, Zhao L Y. Three-loop autopilot of spinning missiles. *Journal of Aerospace Engineering*, 2014, 228(7): 1195 ~ 1201
- Xu J, Chung K W, Chan C L. An efficient method for studying weak resonant double Hopf bifurcation in nonlinear systems with delayed feedbacks. *SIAM Journal Applied Dynamical Systems*, 2007, 6(1): 29 ~ 60
- Xu J, Chung K W. Effects of time delayed position feedback on a van der Pol-Duffing oscillator. *Physica D*, 2003, 180: 17 ~ 39

# MODELING AND STABILITY ANALYSIS OF SPINNING MISSILE WITH CONTROL SYSTEM\*

Zhen Tingting Xu Jian<sup>†</sup> Wen Jianming

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract** A spinning missile with control system was chosen as the research object in this paper. The dynamic model of the spinning missile was improved in theory by considering nonlinear aerodynamics and time delay in control segment. Setting time delay and control gains as the bifurcation parameters, stability analysis of one equilibrium point was made based on the characteristic equation of this model. Critical Hopf bifurcation values were obtained when the equilibrium point lost its stability. Then, the instable states of the attack angle and sideslip angle were numerically simulated under theoretical prediction. Meanwhile, the amplitude of periodic solutions changing with control gains and time delay were achieved. The numerical results indicate that the theoretical prediction is relatively reasonable. Time delay made little change on the coning motion of the spinning missile, but it dramatically decreases the selectable ranges of control gains in keeping the system stable. In consequence, time delay can not be ignored for designing stability system of the spinning missile.

**Key words** spinning missile, time delay, control gains, stability analysis, Hopf bifurcation

## 附录1 主要符号表

$C$  横向转动惯量,  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$   
 $A$  极转动惯量,  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$   
 $a_{cy}, a_{cz}$  加速度指令,  $\text{m}/\text{s}^2$   
 $a_y, a_z$  旋转弹加速度,  $\text{m}/\text{s}^2$   
 $d$  弹轴半径,  $\text{m}$   
 $L$  参考长度,  $\text{m}$   
 $m$  弹体质量,  $\text{kg}$   
 $Q$  动压力,  $\text{N}/\text{m}^2$   
 $S$  参考面积,  $\text{m}^2$   
 $c$  加速器与弹体质心之间的距离,  $\text{m}$   
 $v$  弹体质心速度,  $\text{m}/\text{s}$   
 $\alpha$  攻角,  $\text{rad}$   
 $\beta$  侧滑角,  $\text{rad}$   
 $\vartheta, \varphi, \gamma$  俯仰角, 偏航角及滚转角,  $\text{rad}$   
 $\theta, \varphi$  航迹角, 航向角,  $\text{rad}$   
 $T_s$  伺服系统的时间常数,  $\text{s}$   
 $\mu_s$  伺服系统的阻尼率  
 $\tau$  控制系统时滞,  $\text{s}$   
 $\gamma_c$  伺服系统的耦合角,  $\text{rad}$   
 $k_p$  比例调节增益

$k_a$  加速度反馈增益  
 $k_z$  角位置反馈增益  
 $k_\omega$  阻尼回路增益  
 $k_s$  伺服系统增益  
 $c'_L$  升力系数的一阶偏导数  
 $c'_{F\mu}, c''_{F\mu}$  马格努斯力系数的一阶偏导数和二阶偏导数  
 $c'_\omega$  阻尼力矩系数的一阶偏导数  
 $c'_{M_s}$  静稳定力矩系数的一阶偏导数  
 $c''_{M_\mu}$  马格努斯力矩系数的二阶偏导数  
 $c'_\sigma$  控制力矩系数

## 附录2 旋转弹所受力与力矩表达式

假设旋转弹气动轴对称, 考虑气动非线性的力与力矩的表达式可有文献[12]得到:

升力  $F_{Ly}$  及侧向力  $F_{Lz}$  为

$$F_{Ly} = QSC'_L \alpha (1 + k_l \alpha^2), F_{Lz} = -QSC'_L \beta (1 + k_l \beta^2);$$

的马格努斯力在速度坐标系  $Oy_v, Oy_v$  轴上的分量

$F_{\mu y}, F_{\mu z}$  为

$$F_{\mu y} = -QSC''_{F\mu} (\dot{\gamma}d/v) \beta (1 + k_{F\mu} \beta^2),$$

$$F_{\mu z} = -QSC''_{F\mu} (\dot{\gamma}d/v) \alpha (1 + k_{F\mu} \alpha^2);$$

Received 29 March 2015, revised 7 April 2015.

\* The project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China(11032009)

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: xujian@tongji.edu.cn

阻尼力矩在准弹体坐标系  $Oy_{nb}$  轴及  $Oz_{nb}$  轴上的分量  $M_{\omega_y}$ 、 $M_{\omega_z}$  为

$$M_{\omega_y} = -\frac{1}{2}QSLc'_{\omega} \left(\frac{\dot{\varphi}L}{v}\right) (1 + k_{M\omega}\beta^2),$$

$$M_{\omega_z} = -\frac{1}{2}QSLc'_{\omega} \left(\frac{\dot{\theta}L}{v}\right) (1 + k_{M\omega}\alpha^2);$$

马格努斯力矩在准弹体坐标系  $Oy_{nb}$  轴及  $Oz_{nb}$  轴上的分量  $M_{\mu_y}$ 、 $M_{\mu_z}$  为

$$M_{\mu_y} = \frac{1}{2}QSLc''_{M\mu} \left(\frac{\dot{\gamma}d}{v}\right) \alpha (1 + k_{M\mu}\alpha^2),$$

$$M_{\mu_z} = -\frac{1}{2}QSLc''_{M\mu} \left(\frac{\dot{\gamma}d}{v}\right) \beta (1 + k_{M\mu}\beta^2);$$

静稳定力矩在准弹体坐标系  $Oy_{nb}$  轴及  $Oz_{nb}$  轴上的分量  $M_{s_y}$ 、 $M_{s_z}$  为

$$M_{s_y} = \frac{1}{2}QSLc'_{Ms}\beta (1 + k_{Ms}\beta^2),$$

$$M_{s_z} = \frac{1}{2}QSLc'_{Ms}\alpha (1 + k_{Ms}\alpha^2);$$

控制力矩在准弹体坐标系  $Oy_{nb}$  轴及  $Oz_{nb}$  轴上的分量为

$$M_{\sigma_y} = \frac{1}{2}QSLc'_{\sigma}\sigma_2, \quad M_{\sigma_z} = \frac{1}{2}QSLc'_{\sigma}\sigma_1.$$

推力  $T$  及重力  $G$  在速度坐标系上的分量可参考文献[18], 利用速度坐标系与弹体坐标系、惯性坐标系之间的转换关系得到:

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = L^{-1}(\alpha)L^{-1}(\beta) \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T\cos\beta\cos\alpha \\ T\cos\beta\sin\alpha \\ -T\sin\beta \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = L(\varphi)L(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg\cos\varphi\sin\theta \\ -mg\cos\theta \\ -mg\sin\varphi\sin\theta \end{bmatrix},$$

且有

$$F_{y2} = F_{Ly} + F_{\mu_y} + T_y + G_y, \quad F_{z2} = F_{Lz} + F_{\mu_z} + T_z + G_z,$$

$$M_{y1} = M_{\omega_y} + M_{\mu_y} + M_{s_y} + M_{\sigma_y},$$

$$M_{z1} = M_{\omega_z} + M_{\mu_z} + M_{s_z} + M_{\sigma_z}.$$

### 附录3 文中相关系数的表达式

$$a_1 = \frac{QSc'_{L}}{mv} - \frac{T}{mv}; \quad a_2 = \frac{QSc''_{F\mu}}{mv} \left(\frac{\dot{\gamma}d}{v}\right);$$

$$a_3 = \frac{QSc'_{Lk_L}}{mv}; \quad a_4 = \frac{QSc''_{F\mu k_{F\mu}}}{mv} \left(\frac{\dot{\gamma}d}{v}\right);$$

$$b_1 = \frac{QSLc'_{\omega}(L/v)}{A}; \quad b_2 = \frac{QSLc''_{M\mu}(\dot{\gamma}d/v)}{A};$$

$$b_3 = \frac{QSLc'_{ms}}{A}; \quad b_4 = \frac{C\dot{\gamma}}{A}; \quad b_{21} = \frac{2A-C}{A};$$

$$b_{22} = \frac{QSLc'_{\omega}k_{M\omega}(L/v)}{A}; \quad b_{23} = \frac{QSLc'_{Ms}k_{Ms}}{A};$$

$$b_{24} = \frac{QSLc''_{M\mu}k_{M\mu}(\dot{\gamma}d/v)}{A}; \quad b'_{21} = \frac{C-A}{A};$$

$$c_1 = \frac{QSLc'_{\sigma}k_s k_r \cos(\gamma_d)(ck_p k_a + k_{\omega})}{A};$$

$$c_2 = \frac{QSLc'_{\sigma}k_s k_r \cos(\gamma_d)(vk_p k_a + k_z)}{A};$$

$$c_3 = \frac{QSLc'_{\sigma}k_s k_r \cos(\gamma_d)vk_p k_a}{A};$$

$$c_4 = \frac{QSLc'_{\sigma}k_s k_r \sin(\gamma_d)(ck_p k_a + k_{\omega})}{A};$$

$$c_5 = \frac{QSLc'_{\sigma}k_s k_r \sin(\gamma_d)(vk_p k_a + k_z)}{A};$$

$$c_6 = \frac{QSLc'_{\sigma}k_s k_r \sin(\gamma_d)vk_p k_a}{A}.$$

$$d_{11} = 2a_1 + 2b_1;$$

$$d_{21} = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_4^2 + 4a_1b_1 - 2b_3;$$

$$d_{22} = 4a_1c_1 + 2b_1c_1 - 2b_4c_4 + 2c_2 - 2c_3;$$

$$d_{23} = c_1^2 + c_4^2;$$

$$d_{31} = 2a_1b_1^2 + 2a_1^2b_1 + 2a_2^2b_1 + 2a_1b_4^2 - 2a_1b_3 - 2a_2b_2 - 2b_1b_3 - 2b_2b_4;$$

$$d_{32} = 2a_1c_1^2 + 2a_2^2c_1 + 4a_1c_2 - 2a_1c_3 + 2a_2c_6 + 2b_1c_2 - 2b_1c_3 - 2b_3c_1 + 2b_2c_4 - 2b_4c_5 + 2b_4c_6 + 4a_1b_1c_1 - 4a_1b_4c_4;$$

$$d_{33} = 2c_1c_2 - 2c_1c_3 + 2c_4c_5 - 2c_4c_6 + 2a_1c_1^2 + 2a_1c_4^2;$$

$$d_{41} = b_2^2 + b_3^2 + a_1^2b_1^2 + a_1^2b_4^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_4^2 - 2a_1b_1b_3 - 2a_1b_2b_4 - 2a_2b_1b_2 + 2a_2b_3b_4;$$

$$d_{42} = 2b_2c_5 - 2b_2c_6 - 2b_3c_2 + 2b_3c_3 + 2a_1^2c_2 + 2a_2^2c_2 + 4a_1b_1c_2 - 2a_1b_1c_3 + 2a_2b_1c_6 - 2a_2b_2c_1 - 2a_2b_3c_4 + 2a_2b_4c_3 + 2a_1b_2c_4 - 2a_1b_3c_1 - 4a_1b_4c_5 + 2a_1b_4c_6 + 2a_2^2b_1c_1 - 2a_2^2b_4c_4 + 2a_1^2b_1c_1 - 2a_1^2b_4c_4;$$

$$d_{43} = c_2^2 + c_3^2 + c_5^2 + c_6^2 - 2c_2c_3 - 2c_5c_6 + a_1^2c_4^2 + a_2^2c_1^2 + a_2^2c_4^2 + 4a_1c_1c_2 - 2a_1c_1c_3 + 4a_1c_4c_5 - 2a_1c_4c_6 + 2a_2c_1c_6 - 2a_2c_3c_4;$$

$$d_{52} = -2a_1b_3c_2 - 2a_2b_2c_2 + 2a_1b_2c_5 - 2a_2b_3c_5 + 2a_1^2b_1c_2 + 2a_2^2b_1c_2 - 2a_1^2b_4c_5 - 2a_2^2b_4c_5;$$

$$d_{53} = 2a_1c_2^2 + 2a_1c_5^2 - 2a_1c_2c_3 + 2a_2c_2c_6 - 2a_2c_3c_5 - 2a_1c_5c_6 + 2a_1^2c_1c_2 + 2a_2^2c_1c_2 + 2a_1^2c_4c_5 + 2a_2^2c_4c_5;$$

$$d_{63} = a_1^2c_2^2 + a_1^2c_5^2 + a_2^2c_2^2 + a_2^2c_5^2.$$