第 14 卷第 1 期 2016 年 2 月
1672-6553/2016/14(1)/019-7

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 14 No. 1
Feb. 2016

关于 Hamilton 原理*

梅凤翔[1] 李彦敏[2†]

(1. 北京理工大学宇航学院,北京 100081)(2. 商丘师范学院物理与电气信息学院,商丘 476000)

摘要 Hamilton 发展了 Lagrange 分析力学,他对分析力学的主要贡献是一个原理—Hamilton 原理和一个方程-Hamilton 方程. 本文给出 Hamilton 原理的经过史,包括 Hamilton 原著的表述,以及后人对这个原理的理解和发展.

关键词 分析力学, Hamilton 原理, 史料

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-015

引言

学科史研究是科学技术史研究的一个重要领域. 分析力学史是力学史的一部分. 国内外大多力学史中的分析力学部分内容较少,较粗,较旧,且有遗误,需要将分析力学史研究得较全,较细,较新,较准确. 目前,国内外还没有人专门研究分析力学的学科史. 本文作者期望对 Lagrange 力学,Hamilton 力学,非完整力学,以及 Birkhoff 力学等的发生和发展给出历史的、客观的梳理与评价.

英国著名数学力学家 Hamilton W R 发展了 Lagrange 分析力学,他基于积分变分原理在分析力学发展中做出了非常重大的贡献, 主要体现在给出了 Hamilton 原理和 Hamilton 正则方程. 本文在第一手资料的基础上,给出 Hamilton 原理的经过史,包括 Hamilton 原著的表述,以及后人对这个原理的理解,并进一步阐述了 Hamilton 原理的意义与发展.

1 Hamilton 原理

1.1 Hamilton 的贡献

Hamilton W R(1805—1865),汉译哈密顿,英国数学家,物理学家,力学家. 他在分析力学方面的贡献是两篇长文:《论动力学中的一个普遍方法》(On a general method in dynamics,1834)和《再论动力学中的普遍方法》(Second essay on a general method in dynamics,1835)其中给出正则方程和 Hamilton 原理.

1.2 Hamilton 的原著

Hamilton 在第二篇长文中写道[1]:

"这个函数 S 已在第一个工作中表述为形式

$$S = \int_0^t (T + U)\,dt$$

其中公式中的符号 T 和 U 有通常意义. 必须注意,当 S 用这个定积分表示时,为消去它的变分条件(如果给定初始和终了位置和时间)恰好是由 Lagrange 给出的运动微分方程. 因此,这个定积分 S 的变分具有双重性质:当端点位置当作固定的,它给出对任何变换坐标的运动微分方程;当端点位置当作变动的,它给出这些微分方程的积分."

[注]以上文字就是 Hamilton 对他的原理的表述,未明显指出 $\delta S = 0$.

1.3 对 Hamilton 原著的理解和表述

1)Полак 对上述双重性质给出如下表达[2]

$$\delta S = \left[\sum \frac{\partial T}{\partial \eta'}\delta\eta\right]_0^t - \int_0^t \left[\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta'} - \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\delta\eta\right]\mathrm{d}t$$

[注] 对端点固定情形 $\delta\eta|_{t=0} = \delta\eta|_{t=t} = 0$,由 Lagrange 方程导出 $\delta S = 0$;反之,由 $\delta S = 0$ 可导出 Lagrange 方程. 而 $\delta S = 0$ 就是 Hamilton 原理.

2)Jacobi 的表述

Jacobi C G J(1804—1851)在其《动力学讲义》第八讲"Hamilton 积分与动力学方程的第二 La-

2014-12-10 收到第 1 稿,2014-12-28 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10932002, 11272050, 11372169)

† 通讯作者 E-mail: hnynmnl@163.com

grange 形式”中写道[3]：

“代替最小作用量原理，可提出另一原理，也是使某一积分的一次变分为零，由此可比最小作用量原理更简单地得到运动微分方程. ……Hamilton 是第一个由这个原理出发的. 我们利用这个原理建立 Lagrange 在分析力学中给出的运动方程形式. 首先设 X_i, Y_i, Z_i 是函数 U 的偏导数；进而设 T 为活力之半

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i{}^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i\left[\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]$$

此时新原理表示为方程

$$\delta\int(T + U)\mathrm{d}t = 0 \qquad (1)$$

这个新原理比最小作用量原理更普遍，因为这里 U 可显含 t，而最小作用量原理不含 t. …”

“完全表示的新原理这样表述：

如果给定系统在初时刻 t_0 和给定末时刻 t_1 位置，那么为确定真实发生的运动就有方程

$$\delta\int_{t_0}^{t1}(T + U)\mathrm{d}t = 0 \qquad (2)$$

这里积分从 t_0 至 t_1，U 是力函数，可包含时间 t，而 T 是活力之半…”

［注］Jacobi 将 Hamilton 原理表述清楚了，而且 U 可含时间 t，是一进步.

3）Moiseev 的评介

Moiseev N D（1902—1955）为苏联力学史著名专家，他在《力学发展史》中有如下段落[4]：

“…Hamilton 基于积分变分原理在分析力学发展中做出了非常重大的贡献，这个原理称为 Hamilton-Ostrogradsky 原理，稍晚一些，Ostrogradsky 独立于 Hamilton，在其工作中找到并研究了这个原理，并指出这个原理有可能应用于比 Hamilton 更多更广一类力学问题.”

“首先，Hamilton 将 Maupertuis 最小作用量原理中研究作用量作为轨道始、末点坐标的函数. 这个函数在光学研究中起重要作用，Hamilton 称其为“特征函数”

$$W = \int_{t_0}^{t_1} 2T\mathrm{d}t$$

它不是别的，就是 Lagrange 作用量. Hamilton 还引出一个重要函数

$$S = \int_{t_0}^{t_1}(T + U)\mathrm{d}t$$

他称其为主函数. 这个函数表示 Hamilton 作用量. Hamilton 建立了函数 W 和 S 之间的关系，并借助它建立起基于作用量 S 稳定的原理的完整动力学系统.”

“在这些表达式中 T 表示系统的动能，而 U 为系统的力函数. Hamilton 仅研究带不依赖于时间的约束的保守系统.”

“在两个工作中建立的一般原理表述如下.

对系统的任何轨道段，作用量（主函数 S）取稳定值（驻值），如果作为比较的临近曲线在同样时间有同样的端点 A 和 B. 因此，Hamilton 假设系统的总能在相邻轨道上可以不同，而在最小作用量原理中对所有比较轨道这个量是一样的.”

“因此，Hamilton 稳定作用量原理的解析表达如下

$$\delta S = \delta\int_{(t_0)}^{(t_1)}(T + U)\mathrm{d}t = 0$$

进而，Hamilton 证明他的函数 W 和 H 满足某个微分方程组，方程组的解与下述偏微分方程

$$H\left(q_1, q_2, \cdots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) - h = 0 \qquad (3)$$

的解相关，其中所谓“Hamilton 函数”H 是广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 和广义动量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的下述函数

$$H(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n) = T - U$$

Hamilton 建立了方程（3）的解与正则形式运动常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial P_K} \quad \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1,2,\cdots,n) \qquad (4)$$

的解的联系，其中 n 为系统的自由度数.

现时以 Hamilton 名字命名的这个原理和运动的正则方程（4），不仅是许多力学现象，而且是许多物理过程研究的工具.”

“Jacobi 对这个理论有兴趣，于 1837 年继续发展了 Hamilton 原理，以及由此原理导出的运动微分方程. 但是，Jacobi 给出这个复杂理论具体应用的两个例子：他研究了质点在受到两个中心牛顿引力作用下的运动问题，以及质点在光滑椭球面上无外力作用条件下的运动问题. 至于第一个问题早在 100 年前已由 Euler 解决，而后不止一次地由其他人借助运动的常微分方程解决了. 第二个问题，Jacobi 借助 Hamilton-Jacobi 偏微分方程的复杂工具

由他首先解决,但没有原则上困难.”

[注] 1) 以上段落提到 Ostrogradsky 和 Jacobi 在 Hamilton 原理方面的工作. 2) 关于对 Jacobi 定理工作的评价与 Arnold 的评价相距甚远. Arnold 指出“Jacobi 定理将常微分方程组的求解化为求偏微分方程的完全积分. 这样由简“化”繁却提供了解决问题的有效方法,这是令人惊奇的. 然而这却是求精确解的最有力的方法,而 Jacobi 解出的许多问题用别的方法是解不出来的.”[5]

4) Appell 的表述

Appell 在其著作第二卷第 484 节“Hamilton 原理”中有如下表述:[6]

“前一章已经看到,在系统无摩擦下,每一时刻 t,对这一时刻为约束允许的可能位移 $\delta x,\delta y,\delta z$ 有下述形式的方程

$$\sum\left[\begin{array}{l}\left(-m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+X\right)\delta x+\left(-m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+Y\right)\delta y\\+\left(-m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+Z\right)\delta z\end{array}\right]=0 \tag{5}$$

这个结果可表示为以下形式,由此可组建 Hamilton 原理.

给定系统在时刻 t_0 和 t_1 的位置 P_0 和 P_1. 在系统由位置 P_0 到位置 P_1 在给定力和约束力作用下的真实运动中,不同点的坐标 x,y,z 是时间的函数,这些函数在给定的时刻 t_0 和 t_1 满足约束方程. 设 $x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z$ 是时间的任意函数,它们无限接近相应真实运动的函数 x,y,z. 这些函数,如 x,y,z 也在时刻 t_0 和 t_1 满足约束方程. 因此,$\delta x,\delta y,\delta z$ 是时间的无限小函数,在时刻 t_0 和 t_1 变为零,由在这个间隔中为约束允许的位移所确定. 用 $T=\dfrac{1}{2}\sum m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$ 表示系统在真实运动中的动能,用 δT 表记当 x,y,z 得到上述变分 $\delta x,\delta y,\delta z$ 时,这个能的变分. Hamilton 原理在于,积分

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T+\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\right]\mathrm{d}t$$

在满足所指条件下对所有值 $\delta x,\delta y,\delta z$, 等于零. 积分号中和号 $\sum$ 对约束反力外的所有给定力. 为证明 δS 等于零,注意到

$$\delta T=\sum m(x'\delta x'+y'\delta y'+z'\delta z')$$

但是因为 $\delta\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$等于$\dfrac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t}$,有

$$\int_{t_0}^{t_1}mx'\delta x'\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\delta x$$

分部积分,上述积分写成形式

$$\left|m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\delta x\right|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\delta x\mathrm{d}t$$

因 δx 在边界上为零,其中积分出来的部分为零. 因此,变换积分$\int\delta T\mathrm{d}t$ 的所有项,最终得到

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\sum\left[\begin{array}{l}\left(X-m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\delta x+\left(Y-m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\delta y\\+\left(Z-m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)\end{array}\right]\mathrm{d}t$$

由方程(5)知,δS 等于零,因为 $\delta x,\delta y,\delta z$ 是时刻 t 具有约束允许的位移.”

在第 485 节“由 Hamilton 原理导出 Lagrange 方程”中写道:

“上面的计算不能应用于非完整系统,因为对这类系统等式 $\mathrm{d}\delta q=\delta\mathrm{d}q$ 不对.”

“特殊情形,当施加力沿坐标轴的分量等于依赖坐标和时间的函数 U 的偏导数. 在此情形虚功之和

$$\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$$

是函数 U 的全微分 δU,取 t 为常数. 此时有

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta U)\mathrm{d}t=\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\mathrm{d}t$$

而 Hamilton 原理表述如下. 如果给定系统在时刻 t_0和 t_1的位置,那么积分

$$S=\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\mathrm{d}t$$

在由真实运动向为约束允许的无限接近的任何运动过渡时,它的变分为零.”

[注] 1) Appell 由动力学普遍方程(5)导出原理

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T+\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\right]\mathrm{d}t=0$$

它是一般完整系统的 Hamilton 原理. 2) Appell 指出原理的前提是无摩擦运动,无摩擦约束后来发展为理想约束. 3) Appell 指出这个原理不适合非完整系统.

5) Whittaker 的表述

Whittaker 在其著作第 99 节“完整保守系统的 Hamilton 原理”中写道[7]:

“研究任何完整保守动力学系统,其在任何瞬时的位形由 n 个独立坐标($q_1,q_2,\cdots,q_n$)来确定,并令 L 是表征其运动的动势. 令 n 维空间中一给定

弧 AB 表示系统的部分轨道,而令 CD 为一邻近弧,它不一定是系统的轨道;然而,当然可能使 CD 是系统遵从附加约束的轨道. 令 t 是代表点$(q_1,q_2,\cdots,q_n)$在 AB 上占据任何位置 P 的时间. 假设 CD 上每个点与时间的某个值相关联,那么在 CD(或者使 CD 是其部分的弧)上存在一点 Q,它对应与 P 一样的同值 t. ……

用 δ 表示变分,用这个变分使 AB 上的一点到 CD 上的点,与时间同值相关,用 $t_0,t_1,t_0+\Delta t_0,t_1+\Delta t_1$ 分别表示对应端点 A,B,C,D 的 t 值,而用 L_R 表示在两弧上任意点 R 的函数 L 的值.

如果构成积分

$$\int L(\dot q_1,\dot q_2,\cdots,\dot q_n,q_1,q_2,\cdots,q_n,t)\,\mathrm{d}t$$

沿弧 AB 和 CD 上的差,就是

$$\int_{CD}L\mathrm{d}t-\int_{AB}L\mathrm{d}t=L_B\Delta t_1-L_A\Delta t_0+\int_{t_0}^{t_1}\delta L\mathrm{d}t=$$

$$L_B\Delta t_1-L_A\Delta t_0+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\gamma=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_\gamma}\delta\dot q_\gamma+\frac{\partial L}{\partial q_\gamma}\delta q_\gamma\right)\mathrm{d}t\overset{\text{Lagrange}}{=}$$

$$L_B\Delta t_1-L_A\Delta t_0+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\gamma=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_\gamma}\delta\dot q_\gamma+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_\gamma}\right)\delta q_\gamma\right)\mathrm{d}t=$$

$$L_B\Delta t_1-L_A\Delta t_0+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\gamma}\delta q_\gamma\right)\mathrm{d}t=L_B\Delta t_1-$$

$$L_A\Delta t_0+\left(\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\gamma}\delta q_\gamma\right)_B-\left(\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\gamma}\delta q_\gamma\right)_A$$

但是如果用$(\Delta q_\gamma)_B$表记 q_γ 由 B 到 D 的增量,就有

$$(\Delta q_\gamma)_B=(\delta q_\gamma)_B+(\dot q_\gamma)_B\Delta t_1$$

类似地有

$$(\Delta q_\gamma)_A=(\delta q_\gamma)_A+(\dot q_\gamma)_A\Delta t_0$$

而因此有

$$\int_{CD}L\mathrm{d}t-\int_{AB}L\mathrm{d}t=\left[\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\gamma}\Delta q_\gamma+\left(L-\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\gamma}\delta\dot q_\gamma\right)\Delta t\right]_A^B\tag{6}$$

现在假设 C 与 A,D 与 B 重合,与 C 和 D 关联的时间分别是 t_0和 t_1,那么 $\Delta q_1,\Delta q_2,\cdots,\Delta q_n,\Delta t$ 在 A 和 B 是零,而最后一个方程成为

$$\int_{CD}L\mathrm{d}t-\int_{AB}L\mathrm{d}t=0$$

这表明对真实轨道的任何部分 AB,与和真实轨道有同样端点,时间同样端值的邻近路径 CD 相比较,积分 $\int L\mathrm{d}t$ 有稳定值. 这个结果称为 Hamilton 原理”.

［注］Whittaker 由作用量 $\int L\mathrm{d}t$ 的全变分出发并利用 Lagrange 导出了式(6),再由设 C 与 A,D 与 B 重合而导出了 Hamilton 原理 $\delta\int L\mathrm{d}t=0$.

6)Suslov 的表述

Suslov 在其著作第 201 节“Hamilton 形式的稳定作用量原理”中写道[8]:

“取系统两个可能位置 A_0和 A_1,它们可用直路联结. 设系统沿直路从 A_0到 A_1在时间间隔 t_1-t_0 内完成,其中 t_0和 t_1表示系统在 A_0和 A_1的时间. 研究积分

$$W=\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t\tag{7}$$

比较这个积分在系统沿直路运动的值和系统沿旁路运动的值,这个旁路也由初始位置 A_0到终了位置 A_1,并设系统沿任何旁路由 A_0到 A_1与直路运动同时开始并同时终了. 此时有,直路的积分值 W 与旁路的相比较是稳定的,换言之,对直路的积分(7)的一次变分为零. 在变分时需要注意所有以上所指限制

(1)系统的约束不能破坏;

(2)所有旁路在时刻 t_0同时开始并在时刻 t_1同时结束;沿直路的运动也在这些时刻开始与结束;

(3)系统的起始和终了位置对所有路径是一样的.

…对函数 W 取变分,有

$$\delta W=\delta\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\sigma}\delta\dot q_\sigma+$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\mathrm{d}t\tag{8}$$

为变换第一项,注意到当时间不变分时,变分与对时间的微分是可交换的. 实际上令 $\hat q_\sigma$ 是函数 q_σ 的变分值,有

$$\delta q_\sigma=\hat q_\sigma-q_\sigma$$

两端求导数,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_s=\dot{\hat q}_\sigma-\dot q_\sigma=\sigma q_\sigma$$

于是得到

$$\int\frac{\partial L}{\partial\dot q_\sigma}\delta\dot q_\sigma\mathrm{d}t=\int\frac{\partial L}{\partial\dot q_\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_\sigma\mathrm{d}t$$

$$=\left.\frac{\partial L}{\partial\dot q_\sigma}\delta q_\sigma\right|_{t_0}^{t_1}-\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\sigma}\delta q_\sigma\mathrm{d}t$$

按条件 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 坐标变分 q_σ 等于零,因此有

$$\left|_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}\delta q_\sigma = 0\right.$$

据所指对函数 W 的变分表达式(8),可得到下述形式

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}\right)\delta q_\sigma \mathrm{d}t \tag{9}$$

因沿直路的运动满足方程(7),那么上式中积分号下函数等于零,这就证明了

$$\delta W = \delta\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t = 0$$

积分(7)的所证性质导出了 Hamilton 原理. 积分 W 本身通常称为 Hamilton 作用量而原理本身可表述为:Hamilton 作用量沿直路由系统给定的初始位置到终了位置与在同样位置间发生的沿旁路的作用量相比较具有稳定值,如果系统沿所有路径在同样时间间隔 t_1-t_0 内完成…".

[注] 1)Suslov 由 Lagrange 方程证明了 Hamilton 原理. 2)Suslov 给出例子证明 Hamilton 原理不适合非完整系统.

7)Lurie 的表述

Lurie 在其著作第十二章"力学的变分原理"中写道[9]:

"设　$q_1(t),\cdots,q_n(t)$　(10)

是时间的函数,它们是受有完整理想约束的质点系在真实发生运动中的广义坐标. 主动(给定)力有势. 将说,函数(1)的总合确定的真实路径,而 ∞^n 个无限接近真实位形为约束允许的任何一个

$$q_1^* = q_1(t)+\delta q_1,\cdots,q_n^* = q_n(t)+\delta q_n \tag{11}$$

确定邻近路径,其中变分 δq_s 是时间的任何无限小可微函数.

用 L 表记动势,即动能与势能之差. 在真实路径上

$$\mathrm{L}(q_1,\cdots,q_n,\dot q_1,\cdots,\dot q_n,t) \tag{12}$$

是时间的某个已知函数. 在过渡到 ∞^n 邻近路径中的一个,动势的变分等于

$$\delta L = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\delta \dot q_s\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}(\delta q_s)'\right) \tag{13}$$

这里已用法则《$\delta\mathrm{d}=\mathrm{d}\delta$》.

[注] Lurie 在式(13)之后利用 Lagrange 方程导出了 $\delta S=0$.

1.4　Hamilton 原理的极值性质

1)Lurie 的论述

Hamilton 原理指出 $\delta S=0$,那么这个极值是极大还是极小呢? Lurie 证明,如果积分区间充分小,那么在定常约束下,Hamilton 作用量具有极小值.

2)陈滨的论述

陈滨在其著作中给出 Hamilton 作用量有强极小值和弱极小值的充分条件[10].

2　Hamilton 原理的推广

2.1　对完整系统的推广

Appell 给出原理对完整保守系统的推广

$$\int_{t_0}^{t_1}[\delta T+\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)]\mathrm{d}t = 0$$

写成广义坐标形式,有

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\sum Q_s\delta q_s)\mathrm{d}t = 0$$

文献[11]给出一类新型积分变分原理. 在 m 次速度空间中,如果力学系统受有完整理想约束,并且所有主动力有势,势函数为 $V=V(t,q_s)$,则系统的运动使泛函

$$I = \int_{t_0}^{t_1}\{\overset{(m)}{T}+m\overset{(m)}{T_0}-\overset{(m)}{V}\}\mathrm{d}t$$

在系统的真实运动轨道上取驻值,其中

$$T = \sum\frac{1}{2}m_iv_i^2,\quad \overset{(m)}{T} = \frac{\mathrm{d}\overset{(m-1)}{T}}{\mathrm{d}t},$$

$$\overset{(m)}{T_0} = \frac{\partial T}{\partial q_s}\overset{(m+1)}{q_s},\quad \delta\overset{m}{q}\big|_{t=t_0} = \delta\overset{m}{q}\big|_{t=t_1} = 0$$

当 $m=0$ 时给出 Hamilton 原理.

2.2　对非完整系统的推广

1)Chetaev 型非完整系统

将广义有势情形的 d'Alembert-Lagrange 原理

$$\sum\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\right)\delta q_s = 0$$

写成形式

$$\delta L-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\delta q_s\right)+\sum\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)-\delta\dot q_s\right] = 0$$

将其对 t 由 t_0 至 t_1 积分,并注意到端点条件,得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta L+\sum\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_s)-\delta\dot q_s\right]\right\}\mathrm{d}t = 0$$

根据对 $\delta\dot q_s$ 的两种定义,可得到非完整系统两种形式的 Hamilton 原理:Suslov 形式的和 Hölder 形式的[12,13].

Hölder 形式也叫 Voronets 形式.

[注] 1)文献[12]称 Hölder 形式为 Voronets 形式. 2) Suslov (1857-1935) 是老师, Voronets (1871-1923)是学生,关于 Hamilton 原理应用于非完整系统,两人有过争议,而实际上他们两人都没有错.

2) Vacco 动力学系统

Goldstein 在其《经典力学》中指出,对受有约束

$$f_\alpha(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n)=0$$

的系统,Hamilton 原理可写成[14]:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(L+\sum\lambda_\alpha f_\alpha)\mathrm{d}t=0$$

由此导出方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\sum\left\{\lambda_\alpha\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot{q}_k}\right]-\frac{\mathrm{d}\lambda_\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\dot{q}_k}\right\}$$

[注] 1)所得方程为 Vacco 动力学方程. 2)文献[15]指出,上述原理是数学变分问题,导出的方程在力学/物理上是不正确的.

3 Hamilton 原理的意义与进一步发展

3.1 Hamilton 原理的意义

Полак 指出"很难指出物理-数学科学的其他领域,把抽象的数学研究与具体的物理内容如此深刻地结合起来. 力学的变分原理不仅是自然和技术的最复杂、多方面问题的精美工具,而且运动规律的独特表达形式远远超出了经典力学的限制."[2] Hamilton 原理正是这样的.

Hamilton 原理是力学的基本原理,并且它把原理归结为更一般的形式. 同时它与坐标选择无关,因此,更具有普遍性并在多方面应用上更为方便. 例如,应用 Hamilton 原理来推导 Lagrange 方程和正则方程更为简单更为自然. 这不单是反映数学逻辑推理上的巧妙,主要是反映了原理更深刻地揭示了客观事物之间紧密的联系[16,17].

对 Hamilton 原理在近似计算上的应用,文献[17,18]给出很好的例子. 文献[10,19]将 Hamilton 原理应用于耦合 RLC 电路、柔性多体以及刚柔耦合系统动力学.

3.2 Hamilton 原理的进一步发展

1927 年 Birkhoff 在其著作《动力系统》中提出一类新型积分变分原理和一类新型运动微分方程. 1983 年 Santilli 将这些结果推广到包含时间的情形[20]. 那个原理可称为 Pfaff-Birkhoff 原理[20,21],有形式

$$\delta A=0$$

$$A=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum R_\nu(t,\boldsymbol{a})\dot{a}^\nu-B(t,\boldsymbol{a})\right]\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\delta a^\nu=\delta\mathrm{d}a^\nu,\quad \delta a^\nu\Big|_{t=t_0}=\delta a^\nu\Big|_{t=t_1}=0$$

当取

$$R_\mu=\begin{cases}p_\mu & (\mu=1,2,\cdots,n)\\ 0 & (\mu=n+1,\cdots,2n)\end{cases}$$

$$a^\mu=\begin{cases}q_\mu & (\mu=1,2,\cdots,n)\\ p_{\mu-n} & (\mu=n+1,\cdots,2n)\end{cases}$$

$$B=H$$

则给出 Hamilton 原理

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(\sum p_s\dot{q}_s-H)\mathrm{d}t=0$$

文献[21, 22]研究了 Birkhoff 系统动力学. 文献[21]还由 Pfaff-Birkhoff 原理导出了 Pfaff-Birkhoff-d′Alembert 原理.

4 结语

(1) 本文给出有关 Hamilton 原理的一些史料,包括 Hamilton 原著的表述,后人的理解与发展.

(2) Hamilton 给出了 Hamilton 作用量 S,但未明确地给出 $\delta S=0$. Jacobi 明确给出了原理 $\delta S=0$. Ostrogradsky 也研究了这个原理,因此,俄国人称原理为 Hamilton-Ostrogradsky 原理.

(3) Hamilton 原理的前提是:约束是双面理想完整定常的,力是有势的且不含时间,可比较路径与真实路径有同样始、终点并在同样时间间隔内完成. 这个原理可推广到完整非保守系统和非完整系统,但一般说已不再是稳定作用量原理.

(4) Hamilton 原理推广到 Pfaff-Birkhoff 原理,经历了 90 多年,为 Birkhoff 系统动力学打下了理论基础.

(5) 文献[2]指出,文献中大量出现的"原理的证明"无疑是不合理的,原理无需证明. 当然,人们开始时总是希望用已有的知识来验证新知识的正确性,因此就有了 Appell 用动力学普遍方程,Whittaker 用 Lagrange 方程来验证 Hamilton 原理的经历.

参 考 文 献

1 Hamilton W R. Second essay on a general method in dynamics. *Phil. Trans. Roy. Soc*, 1835, 1: 95~144

2 Полак ЛС ВаРиционные Принципы Механики. Москва: ГИФМЛ, 1959

3 Jacobi C. Vorlesungen über Dynamik. Berlin: Clebsch, 1866

4 Моисеев Н Д. Очерки Развития Механики. Москва: NМУ, 1961

5 Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. New York: Spriger-Verlag, 1978

6 Appell P. Traité de Mécanigue Rationnelle, T Ⅱ. Sixème Édition, Paris: Gautnier-Villars, 1953

7 Whittaker E T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Fourth Edition. Cambridge: Cambridge Unir. Press, 1952

8 Суслов Г К. Теоретическая Механика. Москва: Тостехиздат, 1946

9 Луръе А И. Аналити Ческая Механика. Москва: ГИФМЛ, 1961

10 陈滨. 分析动力学,第二版. 北京: 北京大学出版社, 2012 (Chen B. Analysis of dynamics, Second edition. Beijing: Peking University Press, 2012 (in Chinese))

11 赵跃宇. 力学的新型积分变分原理. 力学学报, 1989, 21(1): 101 ~ 106 (Zhao Y Y. New integral variational principle of mechanics. *Acta Mechanica Sinica*, 1989, 21 (1): 101 ~ 106 (in Chinese))

12 Новосёлов В С. Вариационные Метды в Мехлнике. ИЛУ, 1966

13 梅凤翔. 分析力学,下卷. 北京: 北京理工大学出版社, 2013(Mei F X. Analysis of mechanics Ⅱ. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013(in Chinese))

14 Golastein H. Poole G, Safko J. Classical Mechanics. Third Edition, Beijing: Higher Education Press, 2005

15 Papastravridis JG. Anaiyticai Mechanics. New York: Oxford Unir. Press, 2002

16 梅凤翔,刘桂林. 分析力学基础. 西安: 西安交通大学出版社, 1987(Mei F X, Liu G L. The foundation of analytical dynamics. Xi ′an: Xi ′an Jiaotong University Press, 1987(in Chinese))

17 朱照宣,周起钊,殷全生. 理论力学,下册. 北京:北京大学出版社, 1982(Zhu Z X, Zhou Q Z, Yin Q S. Theoretical mechanics Ⅱ. Beijing: Peking University Press, 1982 (in Chinese))

18 黄昭度,钟奉俄. 工程系统分析力学. 北京:北京高等教育出版社, 1992(Huang Z D, Zhong F E. Analytical dynamics of engineering system. Beijing: Higher Education Press, 1992(in Chinese))

19 丁光涛. 三种耦合 RLC 电路的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数. 动力学与控制学报, 2014, 12(4): 304 ~ 308 (Ding G T. Lagrangians and Hamiltonians of three coupled RLC circuit. *Journal of dynamics and control*, 2014, 12(4): 304 ~ 308(in Chinese))

20 Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ. New York: Springer-Verlag, 1983

21 梅凤翔,史荣昌,张永发等. Birhoff 系统动力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1996 (Mei F X, Shi R C, Zhang Y F etc. Dynamics of Birkhoff system. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996(in Chinese))

22 Галиуллин А С, Гаораров Г Г, Малайшка Р П, Хван А М. Аналитическая Динамика Систем Гельмгольца, Биркгоора, Намьу. Москва: УФН, 1997

ON HAMILTON PRINCIPLE

Mei Fengxiang[1] Li Yanmin[2†]

(1. *School of Aerospace*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

(2. *Department of Physics and Information Engineering*, *Shangqiu Normal University*, *Shangqiu* 476000, *China*)

Abstract Hamilton WR developed Lagrange analytical mechanics, and his main contribution to analytical mechanics is a principle of the Hamilton principle and an equation of the Hamilton equation. The developing history of the Hamilton principle is given in this paper, including the expression of the Hamiltonian original version, the understanding of other researchers on the principle as well as its development.

Key words analytical mechanics, Hamilton principle, historical materials

Received 10 December 2014, revised 28 December 2014.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10932002, 11272050, 11372169)

†E-mail: hnynmnl@163. com