第 13 卷第 5 期 2015 年 10 月
1672-6553/2015/13(5)/329-3

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 13 No. 5
Oct. 2015

Birkhoff 系统的广义斜梯度表示*

梅凤翔[1†]　吴惠彬[2]

(1. 北京理工大学宇航学院,北京　100081)(2. 北京理工大学数学学院,北京　100081)

摘要　提出广义斜梯度系统并研究 Birkhoff 系统的广义斜梯度表示. 给出系统成为广义斜梯度系统的条件. 利用广义斜梯度系统的性质来研究系统解的稳定性. 举例说明结果的应用.

关键词　Birkhoff 系统，　广义斜梯度系统，　稳定性

DOI：　10.6052/1672-6553-2015-011

引言

梯度系统对研究积分和解的稳定性十分方便. 文献[1]研究了通常梯度系统的性质,文献[2]讨论了斜梯度系统. 有关力学系统与梯度系统的研究已有一些结果,如文献[3－8]. 通常斜梯度系统中的函数不包含时间. 若包含时间,则称为广义斜梯度系统. 广义斜梯度系统对研究非定常力学系统解的稳定性有重要价值. 有关 Birkhoff 系统的稳定性研究大多限于定常系统[9]. 本文期望借助广义斜梯度系统来研究一般 Birkhoff 系统的稳定性.

1　广义斜梯度系统

广义斜梯度系统的微分方程有形式

$$\dot{x}_i = b_{ij}(\boldsymbol{X})\frac{\partial V(t,\boldsymbol{X})}{\partial x_j},(i,j=1,2,\cdots,m) \tag{1}$$

这儿及以后我们约定:同一项中,相同的活动指标表示对其求和,其中 $b_{ij}(\boldsymbol{X}) = -b_{ji}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2,\cdots,x_m)$. 若 V 不含时间 t,则式(1)成为通常斜梯度系统.

按方程(1)求 $\dot{V}$,得

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_i} b_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{2}$$

由(b_{ij})的反对称性质,上式右端第二项为零,于是有

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} \tag{3}$$

如果 $V=V(t,\boldsymbol{X})$ 为正定的 Lyapunov 函数,且$\frac{\partial V}{\partial t}\leqslant 0$,那么就可用 Lyapunov 定理来判断解的稳定性. 特别地,如果$\frac{\partial V}{\partial t}=0$,即通常斜梯度系统情形,那么 $V=V(\boldsymbol{X})$ 是积分. 此时,如果 V 可成为 Lyapunov 函数,那么解是稳定的.

2　Birkhoff 系统的梯度表示

Birkhoff 系统的微分方程有形式[9－10]

$$\dot{a}^{\mu} = \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}} + \frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right),(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{4}$$

其中 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数,$R_{\mu}=R_{\mu}(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数组,且

$$\begin{aligned} &\Omega_{\nu\rho} = \frac{\partial R_{\rho}}{\partial a^{\nu}} - \frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\rho}} \\ &\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho} \quad ,(\mu,\nu,\rho=1,2,\cdots,2n) \\ &\det(\Omega_{\nu\rho}) \neq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

方程(4)一般还不能成为广义斜梯度系统(1). 如果存在反对称矩阵$(b_{\mu\nu}(\boldsymbol{a}))$和函数 $V=V(t,\boldsymbol{a})$满足下式

$$\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}} + \frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right) = b_{\mu\rho}\frac{\partial V}{\partial a^{\rho}},(\mu,\nu,\rho=1,2,\cdots,2n) \tag{6}$$

则它可成为广义斜梯度系统(1).

2015-06-15 收到第 1 稿,2015-06-22 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(10932002, 11272050)
† 通讯作者 E-mail：meifx@ bit. edu. cn

对半自治 Birkhoff 系统,有

$$\frac{\partial R_\nu}{\partial t}=0,(\nu=1,2,\cdots,2n)$$

$$B=B(t,\boldsymbol{a}) \tag{7}$$

此时,式(6)成为

$$\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}=b_{\mu\rho}\frac{\partial V}{\partial a^\rho} \tag{8}$$

只要取

$$b_{\mu\nu}=\Omega^{\mu\nu},V=B \tag{9}$$

则 Birkhoff 系统成为广义斜梯度系统. 此时,若 B 正定,且有$\frac{\partial B}{\partial t}<0$,则解是稳定的.

3 算例

例 1 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,\ R_2=0,\ B=(a^1)^2+(a^2)^2[1+\exp(-t)] \tag{10}$$

试将其化为广义斜梯度系统,并研究其零解的稳定性.

解: 由 $R_1=a^2$, $R_2=0$ 得

$$(\Omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

取

$$(b_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ V=B$$

因 V 在 $a^1=a^2=0$ 邻域内正定,且有

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-(a^2)^2\exp(-t)<0$$

故零解 $a^1=a^2=0$ 是稳定的.

例 2 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,\ R_2=0,\ B=(a^1)^2+(a^2)^2\left(1+\frac{1}{1+t}\right) \tag{11}$$

试将其化为广义斜梯度系统,并研究其零解的稳定性.

解: 由 $R_1=a^2$, $R_2=0$ 得

$$(\Omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

取

$$(b_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ V=B$$

则其成为一个广义斜梯度系统. V 在 $a^1=a^2=0$ 邻域内正定,且有

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-(a^2)^2\frac{1}{(1+t)^2}<0$$

因此,零解 $a^1=a^2=0$ 是稳定的.

4 结论

在非定常力学系统稳定性研究中,Lyapunov 函数的构造是一大难题. 本文首先提出了广义斜梯度系统并研究了它的性质,然后将非自治 Birkhoff 系统在一定条件下化成广义斜梯度系统,并利用广义斜梯度系统来构造 Birkhoff 系统的 Lyapunov 函数,从而解决了一些非自治 Birkhoff 系统的稳定性问题.

参 考 文 献

1 Hirsch M W, Smale S. Differential equations, dynamical systems and linear algebra. New York: Academic Press, 1974

2 McLachlan R I, Quispel G R W, Robidoux N. Geometric integration using discrete gradients. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 1999,357:1021 ~ 1045

3 楼智美,梅凤翔. 力学系统的二阶梯度表示. 物理学报, 2012,61(2):024502,1 ~ 4 (Lou Z M, Mei F X. A second order gradient representation of mechanics system. *Acta Physica Sinica*, 2012,61(2):024502,1 ~ 4 (in Chinese))

4 梅凤翔, 崔金超, 吴惠彬. Birkhoff 系统的梯度表示和分数维梯度表示. 北京理工大学学报, 2012,32(12):1298 ~ 1300 (Mei F X, Cui J C, Wu H B. A gradient representation and a fractional gradient representation of Birkhoff system. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2012,32(12):1298 ~ 1300 (in Chinese))

5 梅凤翔. 关于梯度系统. 力学与实践,2012,34(1):89 ~ 90 (Mei F X. On the gradient system. *Mechanics in Engineering*, 2012,34(1):89 ~ 90 (in Chinese))

6 梅凤翔,吴惠彬. 广义 Birkhoff 系统的梯度表示. 动力学与控制学报, 2012,10(4):289 ~ 292 (Mei F X, Wu H B. A gradient representation for generalized Birkhoff system. *Journal of Dynamics and Control*, 2012,10(4):289 ~ 292 (in Chinese))

7 梅凤翔,吴惠彬. 广义 Hamilton 系统与梯度系统. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013,43(4):538 ~ 540 (Mei F X, Wu H B. Generalized Hamilton system and gradient system. *Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomi-*

ca, 2013,43(4):538 ~ 540 (in Chinese))

8 梅凤翔. 分析力学(Ⅱ). 北京:北京理工大学出版社, 2013(Mei F X. Analytical Mechanics (Ⅱ). Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013 (in Chinese))

9 梅凤翔,史荣昌,张永发,吴惠彬. Birkhoff 系统动力学. 北京:北京理工大学出版社, 1996 (Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B. Dynamics of Birkhoffian system. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996 (in Chinese))

10 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅱ. New York: Springer-Verlag, 1983

GENERALIZED SKEW-GRADIENT REPRESENTATION FOR BIRKHOFF SYSTEM *

Mei Fengxiang[1†]　Wu Huibin[2]

(1. *School of Aerospace Engineering*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

(2. *School of Mathematics*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

Abstract A generalized skew-gradient system is proposed, and the generalized skew-gradient representation for a Birkhoff system is studied. A condition under which the Birkhoff system can be considered as a generalized skew-gradient system is obtained. The characteristic of generalized skew-gradient system is then used to study the stability of the Birkhoff system. The application of this developed generalized skew-gradient system is also presented through some case studies in this paper.

Key words Birkhoff system, generalized skew-gradient system, stability

Received 15 June 2015, revised 22 June 2015.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10932002, 11272050).

† Corresponding author E-mail: meifx@ bit. edu. cn