

复模态分析超临界轴向运动梁横向非线性振动*

张国策¹ 丁虎^{1†} 陈立群^{1,2}

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072) (2. 上海大学力学系, 上海 200444)

摘要 近似解析研究了简支边界条件下超临界轴向运动梁横向非线性自由振动的固有频率和模态函数. 采用复模态方法处理控制方程, 一个积分偏微分方程. 将 Galerkin 截断思想用于近似处理线性化方程, 一个含空间依赖系数的常微分方程. 给出了不同截断项数对固有频率的影响. 基于 8 项截断, 讨论了系统参数对模态函数的影响.

关键词 轴向运动梁, 非线性, 超临界速度, 模态, 频率

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-030

引言

动力传送带、带锯、空中缆车索道、高楼升降机缆绳、单索架空索道等工程元件, 均可模型化为轴向运动梁或弦线^[1,2,3]. 其横向振动的研究有着重要的理论意义和应用价值. 关于轴向运动系统固有频率和模态函数的研究已经非常广泛. Mote 于 1965 年运用 Galerkin 截断法近似计算了两端简支边界下, 前三阶固有频率及相应的模态^[4]. 1992 年, Wickert 研究了两端简支边界下, 轴向运动梁横向非线性振动的基频^[5]. 2001 年, Öz 给出了两端固定边界下轴向运动梁横向振动的前两阶固有频率和模态函数^[6]. 2006 年, 李晓军和陈立群研究了一端固定、一端简支的情形^[7]. 2009 年, 李彪等通过半解析半数值方法求解了两端铰支的非对称混杂边界下轴向运动 Timoshenko 梁的固有频率和模态^[8]. 2010 年, Chen 等给出了简支边界下 Timoshenko 梁模型固有频率的复模态分析方法^[9]. 2010 年, Ghayesh 和 Balar 通过半解析半数值方法研究了固定边界下轴向运动 Timoshenko 梁横向振动的固有频率^[10].

在超临界传输速度范围内, 陈立群课题组数值研究了轴向运动梁的横向静平衡位形^[11,12]、固有频率^[13,14]和简谐受迫振动的稳态响应^[15]. 本文基

于积分偏微分模型, 采用复模态方法分离变量, 将 Galerkin 截断思想用于计算简支边界条件下超临界轴向运动梁横向自由振动的近似固有频率及相应的模态函数, 并研究轴向速度、非线性系数和弯曲刚度对模态函数的影响.

1 近似解析结果

考虑一个均匀黏弹性矩形梁, 密度为 ρ , 横截面积为 A , 弹性模量为 E , 惯性矩为 I , 初始张力为 P_0 . 该梁在支承两端间距为 L 的长度上以一致的轴向传输速度 T 运动. 不考虑轴向位移, 梁在平面内只有横向位移为 $V(X, T)$ 的弯曲振动. 这里 T 为时间, X 为轴向坐标. 在准静态应力假设下, 超临界轴向运动梁积分偏微分模型的无量纲方程为^[5,11-14]

$$v_{,tt} + 2\gamma v_{,xt} + \pi^2 k_f^2 v_{,xx} + k_f^2 v_{,xxxx} + k_1^2 A_s \pi^4 \sin(\pi x) \int_0^1 [v \sin(\pi x)] dx = \frac{k_1^2}{2} v_{,xx} \int_0^1 v_{,x}^2 dx - \frac{k_1^2 A_s \pi^2}{2} \sin(\pi x) \int_0^1 v_{,x}^2 dx + k_1^2 A_s \pi^2 v_{,xx} \int_0^1 [v \sin(\pi x)] dx \quad (1)$$

简支边界条件为

$$v(0, t) = v_{,xx}(0, t) = v(1, t) = v_{,xx}(1, t) = 0 \quad (2)$$

式中, 无量纲参数为

2013-11-24 收到第 1 稿, 2015-05-08 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11232009, 11372171 和 11422214), 上海市教育委员会科研创新项目(12YZ028)和上海市青年科技启明星计划(11QA1402300)

† 通讯作者 E-mail: dinghu3@shu.edu.cn

$$t = \frac{T}{L} \sqrt{\frac{P_0}{\rho A}}, \gamma = \Gamma \sqrt{\frac{\rho A}{P_0}}, k_f = \sqrt{\frac{EI}{P_0 L^2}}, k_1 = \sqrt{\frac{EA}{P_0}},$$

$$x = \frac{X}{L}, A_s = \frac{2}{\pi k_1} \sqrt{\gamma^2 - 1 - \pi^2 k_f^2}, v = \frac{V}{L} - A_s \sin(\pi x) \quad (3)$$

在微幅振动时,忽略式(1)中的高阶非线性项可得

$$v_{,tt} + 2\gamma v_{,xt} + \pi^2 k_f^2 v_{,xx} + k_1^2 v_{,xxxx} + k_1^2 A_s^2 \pi^4 \sin(\pi x) \int_0^1 [v \sin(\pi x)] dx = 0 \quad (4)$$

方程(4)的解可以写作^[5]

$$v(x, t) = \varphi_n(x) e^{i\omega_n t} + \bar{\varphi}_n(x) e^{-i\omega_n t} \quad (5)$$

式中, ω_n 为系统的第 n 阶固有频率, $\varphi_n(x)$ 为第 n 阶模态函数. 将式(5)代入局部线性化方程(4)可得

$$k_1^2 A_s^2 \pi^4 \sin(\pi x) \int_0^1 [\sin(\pi x) \varphi_n(x)] dx - \omega_n^2 \varphi_n(x) + 2i\gamma \omega_n \varphi_n'(x) + k_f^2 \pi^2 \varphi_n''(x) + k_1^2 \varphi_n^{(4)}(x) = 0 \quad (6)$$

选用静止梁的模态函数为基函数,不妨假设

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^N C_{nk} \sin(k\pi x) \quad (7)$$

形式解(7)自然满足简支边界条件(2). 将模态函数(7)代入方程(6),然后在方程两边同乘以 $\sin(m\pi x)$, $m=1, 2, 3, \dots, N$, 并从0到1积分,可得关于 ω_n 和 c_{nk} ($k=1, 2, 3, \dots, N$) 的超定齐次线性代数方程组

$$[-\omega_n^2 \mathbf{M} + i\omega_n \mathbf{G} + \mathbf{K}] (1 \quad c_{n2} \quad \dots \quad c_{nN})^T = \mathbf{0} \quad (8)$$

式中, $c_{nk} = C_{nk}/C_{n1}$, $C_{n1} \neq 0$, 质量矩阵 \mathbf{M} 为单位阵, 阻尼矩阵 \mathbf{G} 和刚度矩阵 \mathbf{K} 分别满足

$$\mathbf{G}_{mk} = \begin{cases} 4\gamma m k \frac{[1 - (-1)^{m+k}]}{m^2 - k^2} & (m \neq k) \\ 0 & (m = k) \end{cases} \quad (9)$$

$$\mathbf{K}_{mk} = \begin{cases} 0 & (m \neq k) \\ \pi^4 k_f^2 (m^4 - k^4) & (m = k > 1) \\ 2\pi^2 (\gamma^2 - 1 - \pi^2 k_f^2) & (m = k = 1) \end{cases} \quad (10)$$

为使方程组(8)有非零解,则需其系数矩阵行列式为0. 于是得到系统固有频率的特征方程为

$$|-\omega_n^2 \mathbf{M} + i\omega_n \mathbf{G} + \mathbf{K}| = 0 \quad (11)$$

将参数值代入式(11)便可近似求得前 N 阶固有频率. 观察发现, \mathbf{M} 、 \mathbf{G} 和 \mathbf{K} 三矩阵只与刚度系

数和轴向速度有关,而非线性系数无关. 因此,对于超临界速度范围内轴向运动梁的微幅振动,非线性系数对固有频率没有影响. 这一结论与参考文献[13,14]一致. 对于已求得系统任意阶固有频率,即可求出相应的模态函数.

取8项截断($N=8$)为例,考虑轴向速度 $\gamma=4.0$, 刚度系数 $k_f=0.8$, 非线性系数 $k_1=100$, 则可由式(11)求得前两阶固有频率分别为 $\omega_1=9.9181$, $\omega_2=29.9272$. 从而可知前两阶模态函数实部和虚部分别为

$$\begin{cases} \text{Re}[\varphi_1(x)] = \sin(\pi x) + 0.0291\sin(3\pi x) + \\ \quad 0.0015\sin(5\pi x) + 0.0002\sin(7\pi x) \\ \text{Im}[\varphi_1(x)] = -0.3431\sin(2\pi x) - 0.0047\sin(4\pi x) - \\ \quad 0.0006\sin(6\pi x) - 0.0001\sin(8\pi x) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \text{Re}[\varphi_2(x)] = \sin(\pi x) - 0.4015\sin(3\pi x) - \\ \quad 0.0113\sin(5\pi x) - 0.0019\sin(7\pi x) \\ \text{Im}[\varphi_2(x)] = 1.1613\sin(2\pi x) - 0.0632\sin(4\pi x) - \\ \quad 0.0057\sin(6\pi x) - 0.0012\sin(8\pi x) \end{cases} \quad (13)$$

式中, $C_{n1}=1$. 显然,超临界轴向运动梁作微振动时,非线性系数对模态函数也没有影响,模态函数主要与刚度系数和轴向速度有关. 对于已经求得的近似模态函数,可以进一步用于多尺度方法解析分析受迫振动和参激振动的稳态响应.

2 数值计算结果

对于给定的轴向速度、刚度系数和截断项数,即可求得前 N 阶固有频率. 为了简略确定截断项数的精度,将不同截断项数下所求得的前四阶固有频率进行对比. 从图1给出了不同项数截断的对比结果,图中 $k_1=100$, $k_f=0.8$, 截断项数分别取 $N=2, 4, 8$ 和 16 . 图示表明,在超临界速度范围内,各阶截断预测了相同的变化趋势. 随着轴向速度增加,高阶固有频率均增大. 观察发现,各阶截断均能得到较好的第1阶固有频率值. 相比之下,2项截断所得第1阶固有频率在轴向速度偏大时稍有误差. 对于第2阶固有频率值,2项截断结果比更高阶截断结果值偏大,不宜使用. 对于第3阶和第4阶固有频率值,8项截断结果和16项截断结果吻合得很好,而4项截断结果误差较大. 下文将采用8项

截断近似计算模态函数.

采用有限差分法结合 Fourier 变换,可数值求解非线性振动的固有频率.将有限差分法用于计算非线性自由振动的时间历程,选取时间序列,采用 Fourier 变换进行数值求解低阶固有频率.数值算例表明,当初始振幅较小时,8 项截断结果与数值结果吻合得很好^[14].

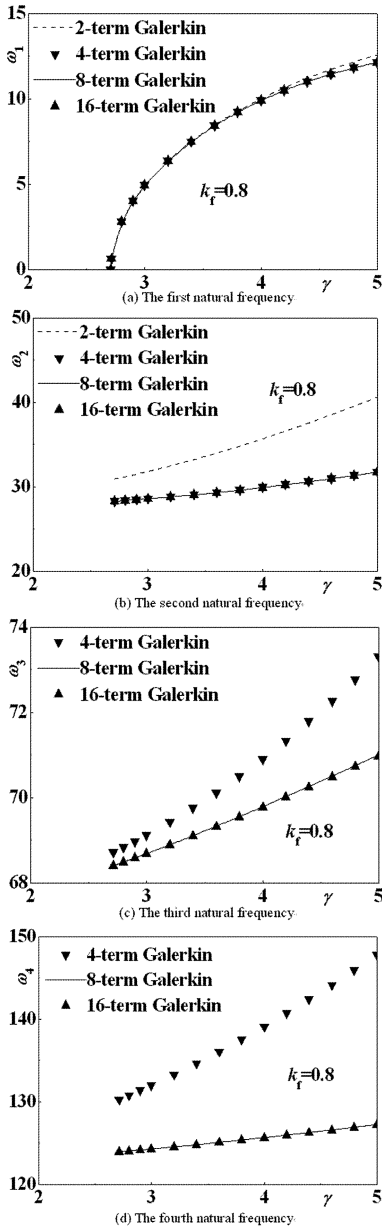


图 1 不同截断项数对固有频率的影响

Fig. 1 Effects of different truncations on natural frequencies

研究表明,虽然非线性系数与静平衡位形成反比关系^[12],但对超临界速度范围内微幅振动的固有频率和模态函数没有影响.考虑 8 项截断,轴向速度分别取作 3.5,4.0 和 4.5,研究轴向速度对模态函数的影响,如图 2 所示,图中参数值为 $k_1 =$

100, $k_f = 0.8, C_{n1} = 1$.图例表明,轴向速度对前两阶模态函数实部的影响较小,第 1 阶模态函数虚部的幅值随着轴向速度增加而增大,第 2 阶模态函数虚部的幅值随着轴向速度增加而减小.

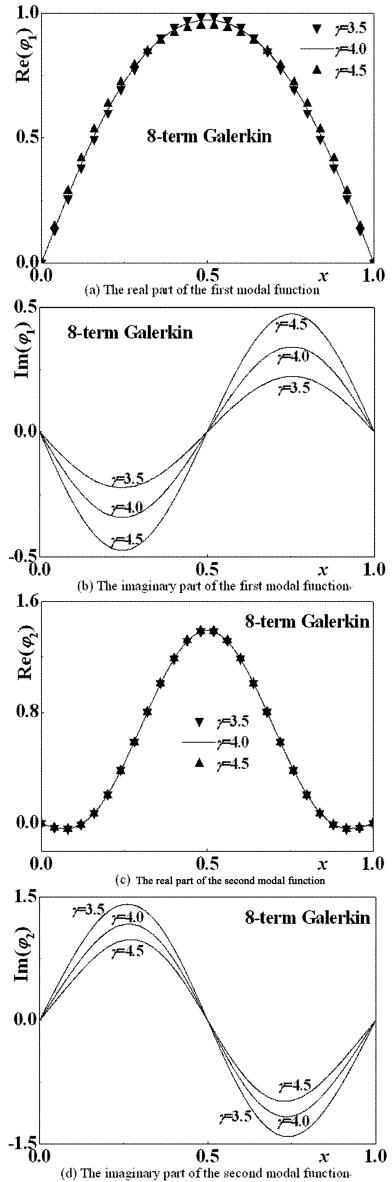


图 2 轴向速度对模态函数的影响

Fig. 2 Effects of axial speed on modal functions

考虑 8 项截断,刚度系数分别取作 0.2,0.4,0.6,0.8 和 1.0,研究刚度系数对模态函数的影响,如图 3 所示,图中参数值为 $\gamma = 4.0, k_1 = 100, C_{n1} = 1$.图例表明,第 1 阶模态函数实部中点的幅值随着刚度系数增加而增大,而第 1 阶模态函数虚部的幅值随着刚度系数增加而减小.第 2 阶模态函数实部的幅值随着刚度系数增加而减小,而第 2 阶模态函数虚部的幅值随着刚度系数增加先减小,后增大,并且由 4 个驻点逐渐过渡成 2 个驻点.

从图2和图3可以看到,模态函数实部均为轴对称图形,虚部为中心对称图形.这是因为 $C_{n1} = 1$ 的缘故.事实上 C_{n1} 是任意常数,如果选作虚数单位 i ,实部便成为中心对称图形,虚部为轴对称图形.更或是,选择一个任意复数取代它,模态函数便会成为非对称图形.相反,我们也能看到,将该近似模态函数用于多尺度方法计算超临界轴向运动梁受迫振动的稳态响应幅频特性曲线时,假设 $C_{n1} = 1$ 将会带来一定便捷.

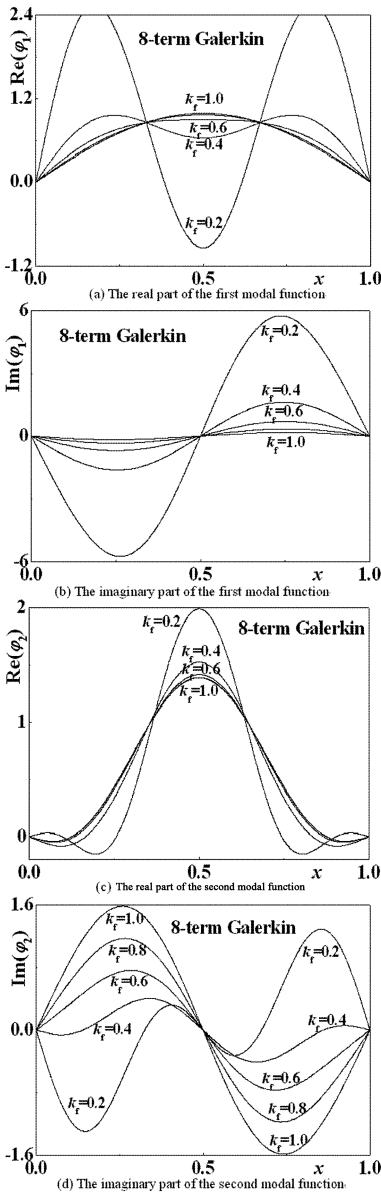


图3 刚度系数对模态函数的影响

Fig. 3 Effects of stiffness coefficient on modal functions

3 结论

在超临界传输速度范围内,本文基于8项 Galerkin 截断,构造了实部为轴对称图形、虚部为

中心对称图形的近似模态函数,并研究了轴向速度、非线性系数和弯曲刚度对轴向运动梁横向非线性自由振动模态函数的影响.研究表明,在微幅振动的情况下,非线性系数对固有频率和模态函数的数值结果没有影响.随着轴向速度增加,高阶固有频率增大.轴向速度对前两阶模态函数实部的影响较小,第1阶模态函数虚部的幅值随着轴向速度增加而增大,而第2阶模态函数虚部的幅值随着轴向速度增加而减小.第1阶模态函数实部中点的幅值随着刚度系数增加而增大,而第1阶模态函数虚部的幅值随着刚度系数增加而减小.第2阶模态函数实部的幅值随着刚度系数增加而减小.随着刚度系数增加,第2阶模态函数虚部的幅值先减小,后增大,并且由4个驻点逐渐过渡成2个驻点.该方法可推广至近似解析分析受迫振动和参激振动.

参考文献

- 冯志华,胡海岩. 直线运动柔性梁非线性动力学-主参数共振与内共振联合激励. 振动工程学报, 2004, 17(2): 126 ~ 131 (Feng Z H, Hu H Y. Nonlinear dynamics of flexible beams undergoing a large linear motion of base-movement: principal parametric and internal resonances. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, 17(2): 126 ~ 131 (in Chinese))
- 张伟,温洪波,姚明辉. 黏弹性传动带 1:3 内共振时的周期和混沌运动. 力学学报, 2004, 36(4): 443 ~ 454 (Zhang W, Wen H B, Yao M H. Periodic and chaotic oscillation of a parametrically excited viscoelastic moving belt with 1:3 internal resonance. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(4): 443 ~ 454 (in Chinese))
- 陈树辉,黄建亮. 轴向运动梁非线性振动内共振研究. 力学学报, 2005, 37(1): 57 ~ 63 (Chen S H, Huang J L. On internal resonance of nonlinear vibration of axially moving beams. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37(1): 57 ~ 63 (in Chinese))
- Mote C D. A study of band saw vibrations. *Journal of the Franklin Institute*, 1965, 279 (6): 430 ~ 444
- Wickert J A. Non-linear vibration of a traveling tensioned beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1992, 27 (3): 503 ~ 517
- Öz H R. On the vibrations of an axially traveling beam on fixed supports with variable velocity. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 239 (3): 556 ~ 564

- 7 李晓军,陈立群. 轴向运动简支-固定梁的横向振动和稳定性. 机械强度, 2006, 28 (5): 654 ~ 657 (Li X J, Chen L Q. Transverse vibration and stability of an axially moving beam with pinned and fixed ends. *Journal of Mechanical Strength*, 2006, 28 (5): 654 ~ 657 (in Chinese))
- 8 李彪,丁虎,陈立群. 非对称混杂边界轴向运动 Timoshenko 梁横向振动分析. 固体力学学报, 2009, 30 (6): 565 ~ 570 (Li B, Ding H, Chen L Q. Transverse vibration of axially moving timoshenko beams with unsymmetrical hybrid supports. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2009, 30 (6): 565 ~ 570 (in Chinese))
- 9 Chen L Q, Tang Y Q, Lim C W. Dynamic stability in parametric resonance of axially accelerating viscoelastic Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329 (5): 547 ~ 565
- 10 Ghayesh M H, Balar S. Non-linear parametric vibration and stability analysis for two dynamic models of axially moving Timoshenko beams. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34 (10): 2850 ~ 2859
- 11 Ding H, Chen L Q. Equilibria of axially moving beams in the supercritical regime. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, 81 (1): 51 ~ 64
- 12 Ding H, Zhang G C, Chen L Q. Supercritical equilibrium solutions of axially moving beams with hybrid boundary conditions. *Mechanics Research Communications*, 2011, 38 (1): 52 ~ 56
- 13 Ding H, Chen L Q. Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329 (17): 3484 ~ 3494
- 14 Ding H, Zhang G C, Chen L Q. Supercritical vibration of nonlinear coupled moving beams based on discrete Fourier transform. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, 47(10): 1095 ~ 1104
- 15 Zhang G C, Ding H, Chen L Q, Yang S P. Galerkin method for steady-state response of nonlinear forced vibration of axially moving beams at supercritical speeds. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(7): 1612 ~ 1623

COMPLEX MODAL ANALYSIS OF TRANSVERSALLY NON-LINEAR VIBRATION FOR SUPERCRITICALLY AXIALLY MOVING BEAMS *

Zhang Guoce¹ Ding Hu^{1†} Chen Liqun^{1,2}

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

(2. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract Under the simply supported boundary conditions, the natural frequencies and modal functions of transversally nonlinear free vibrations of axially moving beams were approximately analyzed in the supercritical regime. Complex modal analysis method was devoted to the governing equation, an integro-partial-differential equation. Galerkin method was applied for the linear standard equation, an ordinary differential equation with a spatially dependent coefficient. The effects of different truncations on natural frequencies were shown. Based on the 8-term Galerkin truncation, the effects of system parameters on modal functions were discussed.

Key words axially moving beam, nonlinearity, supercritical speed, mode, frequency

Received 24 November 2013, revised 8 May 2015.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11232009, 11372171 and 11422214), Innovation Program of Shanghai Municipal Education Commission (12YZ028) and Shanghai Rising-Star Program (11QA1402300)

† Corresponding author E-mail: dinghu3@shu.edu.cn