

# 一类不连续映射的分岔分析\*

李群宏<sup>†</sup> 韦丽梅 卢裕木

(广西大学数学与信息科学学院, 南宁 530004)

**摘要** 研究一类一维分段不连续映射的边界碰撞分岔问题, 推导了周期  $n$  解的边界碰撞分岔曲线及 fold 分岔条件, 通过数值仿真验证了这些条件的正确性. 研究发现系统存在周期增加序列和周期叠加序列. 最后, 对分段不连续映射进行三参数分岔研究, 揭示了系统各参数对其动力学行为的综合影响.

**关键词** 分段映射, 边界碰撞分岔, 周期叠加, 周期增加

DOI: 10.6052/1672-6553-2014-021

## 引言

一些工程和物理科学的问题在数学上可由非光滑系统表出, 如碰撞转子<sup>[1]</sup>、干摩擦振子<sup>[2]</sup>、心脏模型的一种交替现象等经常表示为分段映射模型. 在非光滑系统的分析中, 边界碰撞分岔研究对于描述系统的动力学行为具有重要作用. 许多学者对不同非光滑系统的边界碰撞分岔做了大量工作. Nusse 等<sup>[3]</sup>研究了二维分段映射的边界碰撞分岔现象. 此外, Nusse 等<sup>[4]</sup>指出了一维分段映射在发生边界碰撞分岔后将出现周期运动转化为混沌、多带混沌以及周期增加分岔现象. Feigin 等<sup>[5]</sup>对  $n$  维映射中的边界碰撞分岔的分类做了开创性的研究. Di Bernardo 等<sup>[6]</sup>将该系列成果在现代分岔理论框架下对分段映射的边界碰撞分岔进行分类. Chin 等<sup>[7-8]</sup>分析了二维分段映射在发生擦边碰撞后系统将出现周期增加和周期共存现象.

根据系统在边界性质的不同, 可将系统分为分段光滑连续系统和分段光滑不连续系统. 虽然两者都能产生边界碰撞分岔, 但所得分岔性质有明显差异. 对一维分段光滑连续系统, 文献[9-13]研究表明系统在发生边界碰撞分岔后均产生成对的环(鞍结点型和鞍点-鞍点型), 也可发生环的同宿分岔. 对一维分段光滑不连续系统, 文献[14-15]研究结果表明系统在发生边界碰撞分岔后不仅能产生单一的环, 还伴随周期增加、周期叠加、混沌等动力学行为. 以上考虑的分段映射具有如下特性:

分界面一侧函数是单调增函数, 另一侧函数是单调减函数, 且其中一侧函数具有不动点. 最近, 文献[16-17]讨论了一维分段光滑不连续系统中两侧函数都为单调增函数的情况.

在文献[15]中, 考虑了如下分段映射:

$$G(x) = \begin{cases} f(x) = ax & x \leq 1 \\ g(x) = \frac{cx}{1+b(x-1)} & x > 1 \end{cases}, \quad (1)$$

$a > 1, a < c, 1 < c < b$

该模型可以用来解释一些经济现象, 如技术交易与基本交易间的金融关系, “牛熊市动力学”, 金融危机等. 再比如, 在股市交易市场中, 价格的调整过程可以用简单的线性函数表示, 而庄家的调节模式则用双曲线函数表示. 对上述系统, 文献[15]只讨论了参数范围为  $a > 1, a < c, 1 < c < b$  的情形, 研究结果表明: 以上系统存在周期增加 1 的序列  $RL^k$  和周期增加 2 的序列  $LR^k$ , 并伴随出现周期窗口与混沌相交替的现象. 本文研究系统(1)在  $f(x) = ax + b$  且  $a > 1, 0 < c < 1, 0 < b < 1$  时系统动力学行为的变化. 通过理论与数值分析, 不仅得到系统存在周期增加序列和周期叠加序列的结果, 而且对三参数分岔的研究展现了系统全部参数对其动力学行为的综合影响. 因此, 本文是对文献[15]的进一步补充和完善.

## 1 系统模型

考虑如下映射:

2014-01-26 收到第 1 稿, 2014-04-03 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(10972059 和 11372077)和广西自然科学基金资助项目(2010GXNSFA013110 和 2013GXNSFAA019017)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: liqh@gxu.edu.cn

$$T(x) = \begin{cases} f(x) = ax + b & x \leq 1 \\ g(x) = \frac{cx}{1 + b(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (2)$$

由于分段映射(2)两边都是单调增函数,为了后面讨论的需要,要求映射(2)满足以下条件:

$$g(1) < 1 < f(1) \quad (3)$$

$$0 < g'(x) < 1, g'(x) < f'(x) \quad (4)$$

由(3)、(4)解得  $a > 1, 0 < c < 1, 0 < b < 1$ . 映射(2)的图像如图1所示.

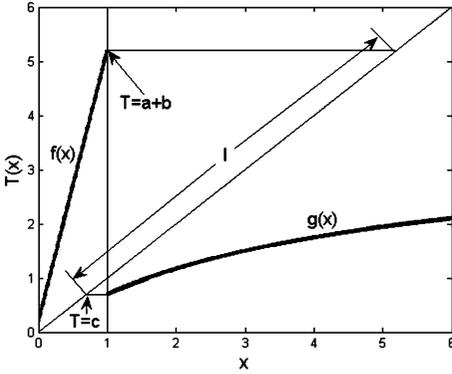


图1 当  $a=5, b=0.2, c=0.7$  时分段映射  $T(x)$  的图像  
Fig. 1 Schematic diagram of the piecewise map  $T(x)$  with  $a=5, b=0.2, c=0.7$

分段映射(2)的不变吸引区间为

$$I = [g(1), f(1)] = [c, a + b] \quad (5)$$

本文将在此不变吸引区间上研究映射(2)的动力学行为.

## 2 以 $b$ 为分岔参数的边界碰撞分岔

以  $b$  为分岔参数,系统(2)的全局分岔图如图2所示.由图2可知,映射(2)存在周期增加序列和周期叠加序列.以下将通过理论分析证实数值结果的准确性.

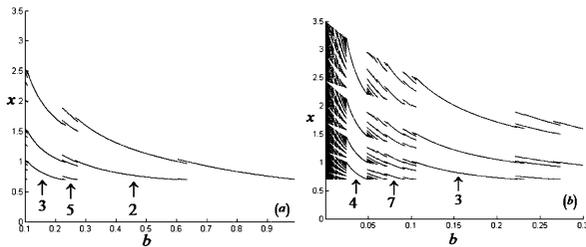


图2  $a=5, c=0.7, x_0=1.5$  (a) 映射  $T(x)$  关于  $b$  的分岔序列, (b) 局部放大图

Fig. 2  $a=5, c=0.7, x_0=1.5$  (a) Bifurcation sequence of map  $T(x)$  with parameter  $b$ , (b) Partially enlarged diagram of Fig. 2 (a)

### 2.1 $LR^k$ 序列下的边界碰撞分岔

对于分段映射,边界碰撞分岔会导致任意周期的环的出现或消失,而环的边界碰撞分岔条件则通过周期点碰撞不连续边界得到.以周期3环的边界碰撞分岔为例,如图3所示,只要  $x_0 \in [g(1), 1]$ , 则周期3环存在,其周期点分别为  $x_0 < 1, x_1 > x_2 > 1$ . 当周期点碰撞不连续边界后,周期3环发生边界碰撞分岔,其分岔条件为  $x_0 = 1$  (如图3(a)) 和  $x_2 = 1$  (如图3(b)),  $x_2 = 1$  也等价于  $x_0 = g(1)$ .

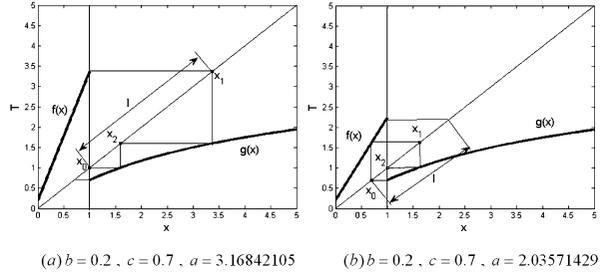


图3 周期3环的边界碰撞分岔  
Fig. 3 Border-collision bifurcation of a period-3 cycle

由以上分析可知:导致环出现或消失的两个边界碰撞分岔条件对应于吸引区间  $I = [c, a + b]$  的边界,即  $x_0 = 1$  对应  $x_1 = f(x_0) = a + b, x_2 = 1$  对应  $x_0 = g(1) = c$ .

下面考虑周期  $k + 1$  环,定义为  $\{x_0 < 1, x_1 > x_2 > \dots > x_k > 1\}$  的边界碰撞分岔,即系统在边界的左边迭代1次,用符号  $L$  表示,在边界的右边迭代  $k$  次,用符号  $R$  表示,则周期  $k + 1$  解的形式为  $LR^k$ , 而边界碰撞分岔条件由复合映射  $g^k \circ f(x_0) = x_0$  的不动点  $x_0$  来决定,其迭代表达式如下:

$$\begin{cases} x_1 = ax_0 + b \\ x_2 = \frac{cx_1}{1 + b(x_1 - 1)} \\ x_3 = \frac{c^2 x_1}{x_1 b \frac{c^2 - d^2}{c - d} + d^2} \\ \vdots \\ x_k = \frac{c^{k-1} x_1}{x_1 b \frac{c^{k-1} - d^{k-1}}{c - d} + d^{k-1}} \end{cases}$$

通过迭代表达式,可知  $x_0$  表示如下(其中  $d = 1 - b$ ):

$$x_0 = \frac{c^k (ax_0 + b)}{(ax_0 + b)b \frac{c^k - d^k}{c - d} + d^k} \quad (6)$$

下面先考虑环  $LR^k$  的存在条件,其次研究环  $LR^k$  的边界碰撞分岔曲线. 环的存在性通过  $x_0 \in [g(1), 1]$  得出, 即:

$$g(1) = c < x_0 < 1 \tag{7}$$

对于环  $LR^k$  的边界碰撞分岔曲线, 记周期点从左边与不连续边界发生碰撞的曲线为  $BCB^l_{LR^k}$ , 由  $x_0 = 1$  解出. 周期点从右边与不连续边界发生碰撞的曲线记为  $BCB^r_{LR^k}$ , 通过  $x_k = 1$  或  $x_0 = g(x_k) = c$  解出, 所得表达式分别如下:

$$BCB^l_{LR^k}: a = \frac{c^k b - d^k - b^2 \frac{c^k - d^k}{c - d}}{b \frac{c^k - d^k}{c - d} - c^k} \tag{8}$$

$$BCB^r_{LR^k}: a = \frac{c^{k-1} b - d^k - b^2 \frac{c^k - d^k}{c - d}}{bc \frac{c^k - d^k}{c - d} - c^k} \tag{9}$$

以下将在参数平面  $(a, b)$  上描述边界碰撞曲线(8)、(9), 其中  $P_{k+1}$  为  $BCB^l_{LR^k}$  与  $BCB^r_{LR^k}$  所围成的区域, 该区域就是周期  $k+1$  环  $LR^k$  的存在区域. 若用  $b_{LR^k}^{\min}$  表示  $BCB^r_{LR^k}$ ,  $b_{LR^k}^{\max}$  表示  $BCB^l_{LR^k}$ , 根据[18]结论, 当满足条件  $b_{LR^k}^{\min} < b_{LR^k}^{\max} < b_{LR^{k+1}}^{\min} < b_{LR^{k+1}}^{\max}$  时, 则存在任意两个相邻环的叠加现象. 由图4知(其中实线表示周期点从左边与不连续边界发生碰撞的曲线  $BCB^l_{LR^k}$ , 虚线表示周期点从右边与不连续边界发生碰撞的曲线  $BCB^r_{LR^k}$ ), 在环  $LR$  的区域  $P_2$  与环  $LR^2$  的区域  $P_3$  之间存在环  $LRLR^2$  的区域  $P'_5$ , 在环  $LR^2$  的区域  $P_3$  与环  $LR^3$  的区域  $P_4$  之间存在环  $LR^2 LR^3$  的区域  $P'_7$ , 在环  $LR^3$  的区域  $P_4$  与环  $LR^4$  的区域  $P_5$  之间存在环  $LR^3 LR^4$  的区域  $P'_9$  等.

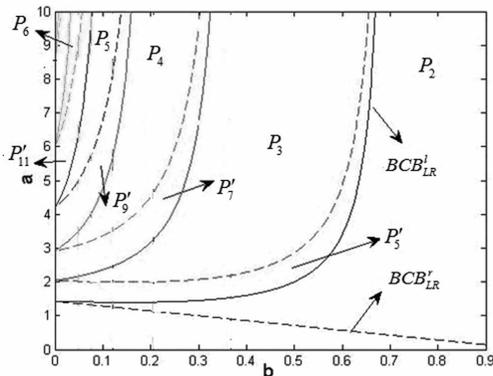


图4  $c=0.7$  平面  $(a, b)$  上的  $LR^k$  周期区域

Fig. 4 Periodic regions of  $LR^k$  in the plane  $(a, b)$  for  $c=0.7$

最后讨论环的稳定性, 其稳定性条件如下:

$$\lambda(LR^k) = ag'(x_1) \cdots g'(x_k) = \frac{ac^k(1-b)^k}{(1+b(x_1-1))^2 \cdots (1+b(x_k-1))^2} \tag{10}$$

由于  $x_1 > x_2 > \cdots > x_k > 1$ , 故  $\lambda(LR^k) < ac^k(1-b)^k < 1$ , 则稳定性条件为:

$$a < \frac{1}{c^k(1-b)^k} \tag{11}$$

### 2.2 $RL^k$ 序列下的边界碰撞分岔

本小节考虑周期  $k+1$  环, 定义为  $\{x_0 > 1, x_1 < x_2 < \cdots < x_k < 1\}$ , 即系统在边界的左边迭代  $k$  次, 用符号  $L$  表示, 在边界的右边迭代  $1$  次, 用符号  $R$  表示, 则周期  $k+1$  环的表达式为  $RL^k$ . 而边界碰撞分岔条件由复合映射  $f^k \circ g(x_0) = x_0$  的不动点  $x_0$  来决定,  $x_0$  的表达式如下:

$$x_0 = \frac{a^k c x_0}{1 + b(x_0 - 1)} + \frac{1 - a^k}{1 - a} b \tag{12}$$

边界碰撞曲线可分为两种, 记周期点从左边与不连续边界  $x=1$  发生碰撞的曲线为  $BCB^l_{RL^k}$ , 周期点从右边与不连续边界  $x=1$  发生碰撞的曲线为  $BCB^r_{RL^k}$ . 由  $x_0 = 1$  解出如下表达式:

$$BCB^r_{RL^k}: b = \frac{1 - a^k c}{1 - a^k} (1 - a) \tag{13}$$

下面, 考虑  $BCB^l_{RL^k}$  的计算表达式, 由  $x_0 = 1 = f(x_k) = a + b$  得

$$\begin{aligned} & \frac{1 - a^{k-1}}{1 - a} b^3 + (a^{k-1} - 2) b^2 + \\ & b \left( \frac{1 - a^{k-1}}{1 - a} + a^{k-1} c + 1 - a \right) + a^k c - 1 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

令  $e = \frac{1 - a^{k-1}}{1 - a}$ ,  $f = a^{k-1} - 2$ ,  $g = e + h - a + 2$ ,  $h = a^k c - 1$ , 其中  $k \neq 1$ , (14) 可表示为:

$$eb^3 + fb^2 + gb + h = 0 \tag{15}$$

令  $A = f^2 - 3eg$ ,  $B = fg - 9eh$ ,  $C = g^2 - 3fh$ ,  $\Delta = B^2 - 4AC$ . 根据一元三次方程的求根公式<sup>[19]</sup>, (15) 的根可以分为以下4种情况.

(i) 当  $A = B = 0$  时,

$$b_1 = b_2 = b_3 = \frac{-f}{3e} = \frac{-g}{f} = \frac{-3h}{g} \tag{16}$$

(ii) 当  $\Delta = B^2 - 4AC > 0$  时,

$$b_1 = \frac{-f - (\sqrt[3]{Y_1} + \sqrt[3]{Y_2})}{3e} \tag{17}$$

其中  $Y_{1,2} = Af + 3e \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ ,  $b_2, b_3$  为虚根(略去).

(iii) 当  $\Delta = B^2 - 4AC = 0$  时,

$$b_1 = \frac{-f}{e} + \frac{B}{A} \tag{18}$$

$$b_2 = b_3 = \frac{-B}{2A} \tag{19}$$

(iv) 当  $\Delta = B^2 - 4AC < 0$  时,

$$b_1 = \frac{-f - 2\sqrt{A}\cos\frac{\theta}{3}}{3e} \tag{20}$$

$$b_{2,3} = \frac{-f + \sqrt{A}(\cos\frac{\theta}{3} \pm \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3})}{3e} \tag{21}$$

其中  $\theta = \arccos T, T = \frac{2Af - 3eB}{2\sqrt{A^3}}, A > 0, -1 < T < 1$ .

由以上分析可知,根据不同的参数范围  $BCB'_{RL^k}$  存在 4 种不同的表达式.

最后通过特征值确定环  $RL^k$  的稳定性,结论如下:

$$\lambda(RL^k) = \frac{a^k c(1-b)}{(1+b(x_0-1))^2} \tag{22}$$

由  $x_0 > 1$  知  $\lambda(RL^k) = \frac{a^k c(1-b)}{(1+b(x_0-1))^2} < a^k c(1-b) < 1$ , 则环的稳定性条件为:

$$1 - \frac{1}{ca^k} < b \tag{23}$$

环  $RL^k$  发生 fold 分岔的条件如下:

$$\lambda(RL^k) = \frac{a^k c(1-b)}{(1+b(x_0-1))^2} = 1 \tag{24}$$

解得相应的  $x_0$  为:

$$x_0 = \frac{\sqrt{ca^k(1-b)} - 1}{b} + 1 \tag{25}$$

令(12)中的  $B = ca^k, A = \frac{1-a^k}{1-a}b$ , 解得

$$x_0 = \frac{B + Ab + b - 1 + \sqrt{(B + Ab)^2 + (1-b)^2 + 2B(b-1) - 2Ab(b-1)}}{2b} \tag{26}$$

联立(25) (26), 解得环  $RL^k$  发生 fold 分岔时对应的参数范围:

$$b = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(1 - 3ca^k)\left(\frac{1-a^k}{1-a}\right)}}{2\frac{1-a^k}{1-a}} \tag{27}$$

以下将在平面  $(a, b)$  上描述边界碰撞曲线  $BCB'_{RL^k}$  与(27). 仿真结果如图 5 所示, 其中记  $P_{RL^k}$  为 fold 分岔曲线(27)与  $BCB'_{RL^k}$  所围成的区域, 该区域就是周期  $k+1$  环  $RL^k$  的存在区域, 实线表示 fold 分岔曲线, 虚线表示周期点从右边与不连续边界  $x =$

1 发生碰撞的曲线  $BCB'_{RL^k}$ . 由图 5 可知, 系统(2)存在环  $RL$  的周期区域  $P_{RL}$ , 存在环  $RL^2$  的周期区域  $P_{RL^2}$ , 存在环  $RL^3$  的周期区域  $P_{RL^3}$ , 存在环  $RL^4$  的周期区域  $P_{RL^4}$ , 存在环  $RL^5$  的周期区域  $P_{RL^5}$ , 存在环  $RL^6$  的周期区域  $P_{RL^6}$  等.

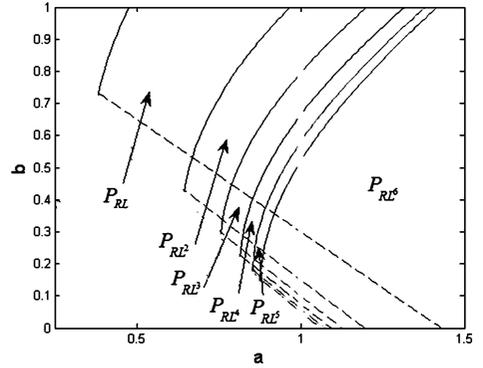


图 5  $c=0.7$  平面  $(a, b)$  上的  $RL^k$  周期区域

Fig. 5 Periodic regions of  $RL^k$  in the plane  $(a, b)$  for  $c=0.7$

### 3 以 $c$ 为分岔参数的边界碰撞分岔

对于以  $b$  为分岔参数的情形, 上一节研究了环  $LR^k$  和  $RL^k$  的边界碰撞曲线, 存在性条件及稳定性条件, 在参数平面  $(a, b)$  上由  $BCB'_{LR^k}$  和  $BCB'_{RL^k}$  确定了环  $LR^k$  存在的区域, 由  $BCB'_{RL^k}$  和 fold 分岔曲线确定环  $RL^k$  的存在区域.

本节讨论以  $c$  为分岔参数时, 映射(2)的动力学行为. 全局分岔图如图 6 所示, 通过数值仿真观察到系统(2)存在周期增加序列, 周期叠加序列, 与以  $b$  为分岔参数的数值结果相同(如图 2 所示).

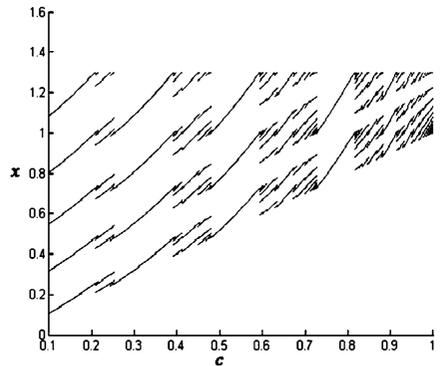


图 6  $a=1.1, b=0.2, x_0=1.5$  映射  $T(x)$  关于  $c$  的分岔序列

Fig. 6 Bifurcation sequence of map  $T(x)$  with parameter  $b$  for  $a=1.1, b=0.2, x_0=1.5$

下面研究以  $c$  为分岔参数时, 环  $RL^k$  的边界碰撞曲线, 边界超平面  $\xi^{env}$  及大碰撞分岔(即无数条分

岔曲线的交点). 环  $LR^k$  的讨论方法与  $RL^k$  的讨论方法一样,故只讨论环  $RL^k$  的边界碰撞分岔.

与以  $b$  为分岔参数的情形相比,右边的分岔曲线  $BCB^r_{RL^k}$  都由  $x_0 = 1$  得出,不同之处在于左边的分岔曲线  $BCB^l_{RL^k}$ ,前者由条件  $x_0 = a + b$ ,后者由  $x_{k-1} = 1 (x_0 = a^2 + ab + b)$  得出,即

$$BCB^l_{RL^k} : c = \frac{(a^2 + ab + b - \frac{1-a^k}{1-a}b)(1 + a^2b + ab^2 + b^2 - b)}{a^{k+2} + a^{k+1}b + a^k b} \quad (28)$$

边界超平面  $\xi^{env}$  由条件  $g(f(1)) = f(g(1))$  得到:

$$\xi^{env} : c = \frac{1 + ab + b^2 - b}{1 + ab - a^2b - ab^2} \quad (29)$$

由(13),对于  $c \rightarrow 1$  时所有的分岔曲线  $BCB^r_{RL^k}$  在平面  $(b, c)$  从右边趋向于如下点:

$$B^l(a) \Big|_{a>1} = \{a, c=1, b=1-a\} \Big|_{a>1} \quad (30)$$

即在点  $B^l(a)$  即发生大碰撞分岔.

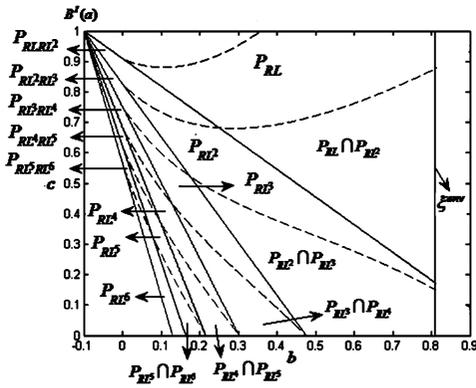


图7  $a = 1.1$  平面  $(b, c)$  上的  $RL^k$  周期区域

Fig. 7 Periodic regions of  $RL^k$  in the plane  $(b, c)$  for  $a = 1.1$

以下将在参数平面  $(b, c)$  上描述边界碰撞曲线(13)(28)及  $\xi^{env}$ . 其中  $P_{RL^k}$  为  $BCB^l_{RL^k}$ 、 $BCB^r_{RL^k}$  及  $\xi^{env}$  所围成的区域,该区域就是周期  $k + 1$  环  $RL^k$  的存在区域. 用  $b_{RL^k}^{min}$  表示  $BCB^r_{RL^k}$ ,  $b_{RL^k}^{max}$  表示  $BCB^l_{RL^k}$ . 根据[18]结论,当满足  $b_{RL^{k+1}}^{min} < b_{RL^k}^{max} < b_{RL^{k+1}}^{min} < b_{RL^k}^{max}$  时,则存在任意两个相邻环的叠加现象,当满足  $b_{RL^{k+1}}^{min} < b_{RL^k}^{min} < b_{RL^{k+1}}^{max} < b_{RL^k}^{max}$  时,则存在周期增加和吸引子共存的现象. 由图7知(其中实线表示周期点从左边碰撞不连续边界的曲线  $BCB^l_{RL^k}$ ,虚线表示周期点从右边碰撞不连续边界的曲线  $BCB^r_{RL^k}$ ) 在环  $RL$  的区域  $P_{RL}$  与环  $RL^2$  的区域  $P_{RL^2}$  存在环  $RLRL^2$  的区域

$P_{RLRL^2}$  及环  $RL$  与环  $RL^2$  共存的区域  $P_{RL} \cap P_{RL^2}$ ; 在环  $RL^2$  的区域  $P_{RL^2}$  与环  $RL^3$  的区域  $P_{RL^3}$  存在环  $RL^2RL^3$  的区域  $P_{RL^2RL^3}$  及环  $RL^2$  与环  $RL^3$  共存的区域  $P_{RL^2} \cap P_{RL^3}$ ; 在环  $RL^3$  的区域  $P_{RL^3}$  与环  $RL^4$  的区域  $P_{RL^4}$  存在环  $RL^3RL^4$  的区域  $P_{RL^3RL^4}$  及环  $RL^3$  与环  $RL^4$  共存的区域  $P_{RL^3} \cap P_{RL^4}$  等.

### 4 三参数的分岔分析

本节将通过数值仿真,研究映射(2)的环的周期区域随3个参数改变的情况.

首先在平面  $(a, b)$  上讨论环  $LR^k$  存在的周期区域随参数  $c$  改变的情况,仿真结果如图8所示. 其中虚线表示  $BCB^r_{LR^k}$ ,实线表示  $BCB^l_{LR^k}$ ,  $P_{LR^k}$  表示环  $LR^k$  的存在区域,  $P_{LR^{k-1}LR^k}$  表示环  $LR^{k-1}$  与环  $LR^k$  叠加的区域,  $P_{LR^{k-1}} \cap P_{LR^k}$  表示环  $LR^{k-1}$  与环  $LR^k$  共存的区域.

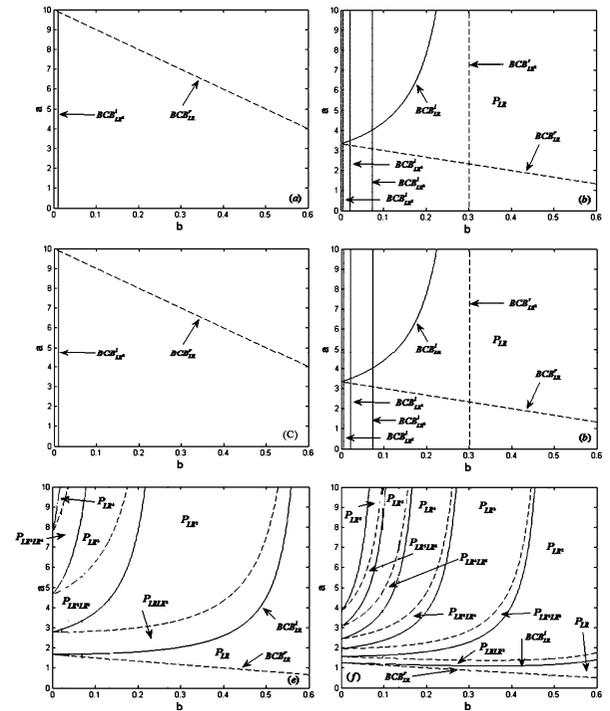


图8 平面  $(a, b)$  上环存在的周期区域随参数  $c$  改变的情况 ((a)  $c = 0.1$ , (b)  $c = 0.2$  或  $0.3$ , (c)  $c = 0.4$ , (d)  $c = 0.5$ , (e)  $c = 0.6$ , (f)  $c = 0.7 \sim 0.9$ )

Fig. 8 The change of periodic regions with the variation of parameter  $c$  in the plane  $(a, b)$  ((a)  $c = 0.1$ , (b)  $c = 0.2$  或  $0.3$ , (c)  $c = 0.4$ , (d)  $c = 0.5$ , (e)  $c = 0.6$ , (f)  $c = 0.7 \sim 0.9$ )

图8(a)说明  $c = 0.1$  时,系统(2)在  $b \in (0, 0.6)$  不存在任何的周期区域;图8(b)说明  $c = 0.2$  或  $0.3$  时,系统(2)在  $b \in (0, 0.6)$  存在周期2环的区

域  $P_{LR}$ ;图8(c)说明  $c = 0.4$  时,系统(2)在  $b \in (0, 0.6)$  存在周期2环的区域  $P_{LR}$ ,周期3环的区域  $P_{LR^2}$ ;图8(d)说明  $c = 0.5$  时,系统(2)在  $b \in (0, 0.6)$  存在周期2环的区域  $P_{LR}$ ,周期3环的区域  $P_{LR^2}$ ,周期4环的区域  $P_{LR^3}$ ;图8(e)说明  $c = 0.6$  时,系统(2)在  $b \in (0, 0.6)$  存在周期2环的区域  $P_{LR}$ ,周期3环的区域  $P_{LR^2}$ ,周期4环的区域  $P_{LR^3}$ ,周期5环的区域  $P_{LR^4}$ ;图8(f)说明  $c = 0.7 \sim 0.9$  时,系统(2)在  $b \in (0, 0.6)$  存在周期2环的区域  $P_{LR}$ ,周期3环的区域  $P_{LR^2}$ ,周期4环的区域  $P_{LR^3}$ ,周期5环的区域  $P_{LR^4}$ ,周期6环的区域  $P_{LR^5}$ ,周期7环的区域  $P_{LR^6}$ .图8(a)~(f)说明了,环的周期随着参数  $c$  的增加而增加.

其次在平面  $(b, c)$  上讨论环  $RL^k$  存在的周期区域随参数  $a$  改变的情况,仿真结果如图9所示.其中虚线表示  $BCB_{LR^k}^l$ ,实线表示  $BCB_{LR^k}^r$ ,  $P_{LR^k}$  表示环  $RL^k$  的存在区域,  $P_{LR^{k-1}RL^k}$  表示环  $RL^{k-1}$  与环  $RL^k$  叠加的区域.  $P_{LR^{k-1}} \cap P_{LR^k}$  表示环  $RL^{k-1}$  与环  $RL^k$  共存的区域.

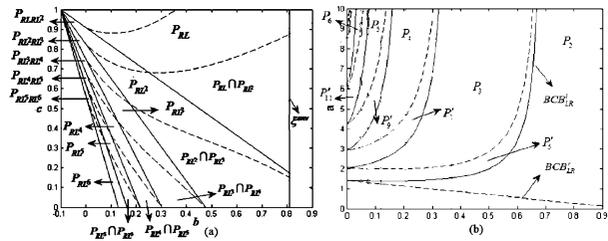


图9 平面  $(b, c)$  上环存在的周期区域随参数  $a$  改变的情况((a)  $a = 1.1 \sim 1.6$ , (b)  $a = 1.7$  or  $> 1.7$ )

Fig. 9 The change of periodic regions with the variation of parameter  $a$  in the plane  $(a, b)$  ((a)  $a = 1.1 \sim 1.6$ , (b)  $a = 1.7$  or  $> 1.7$ )

图9(a)(b)说明了系统(2)存在周期2环的区域  $P_{RL}$ ,周期3环的区域  $P_{RL^2}$ ,周期4环的区域  $P_{RL^3}$ ,周期5环的区域  $P_{RL^4}$ ,周期6环的区域  $P_{RL^5}$ ,周期7环的区域  $P_{RL^6}$ ,环  $RL$  与环  $RL^2$  共存的区域  $P_{RL} \cap P_{RL^2}$ ,环  $RL^2$  与环  $RL^3$  共存的区域  $P_{RL^2} \cap P_{RL^3}$ ,环  $RL^3$  与环  $RL^4$  共存的区域  $P_{RL^3} \cap P_{RL^4}$ ,环  $RL^4$  与环  $RL^5$  共存的区域  $P_{RL^4} \cap P_{RL^5}$ ,环  $RL^5$  与环  $RL^6$  共存的区域  $P_{RL^5} \cap P_{RL^6}$ ,环  $RL$  与环  $RL^2$  叠加的区域  $P_{RLRL^2}$ ,环  $RL^2$  与环  $RL^3$  叠加的区域  $P_{RL^2RL^3}$ ,环  $RL^3$  与环  $RL^4$  叠加的区域  $P_{RL^3RL^4}$ ,环  $RL^4$  与环  $RL^5$  叠加的区域  $P_{RL^4RL^5}$ ,环  $RL^5$  与环  $RL^6$  叠加的区域  $P_{RL^5RL^6}$ .不同之处在于图9(a)在  $a = 1.1 \sim 1.6$  时,系统(2)

存在曲线  $\xi^{env}$ ,而当  $a = 1.7$  (或  $> 1.7$ ) 时,图9(b)不存在曲线  $\xi^{env}$ .

### 5 小结

对一类分段映射(2),在新的参数范围内,讨论了导致环  $RL^k$  与环  $LR^k$  出现或消失的边界碰撞分岔曲线及 fold 分岔条件,并且本文还综合考虑了各参数对系统动力学行为的影响,更加全面地揭示了系统的动力学特性.通过数值仿真,发现在新的参数范围内,系统不产生混沌,但是出现了周期环的周期增加、周期叠加现象.以上分析对全面了解分段映射(2)的动力学性质具有指导意义.

### 参 考 文 献

- 1 梁海花,郑伟峰. 碰摩转子映射系统的非线性反馈混沌控制. 动力学与控制学报, 2007,5(1):30~33 (Liang H H, Zheng W F. Nonlinear feedback control of chaos in rub-impact rotor mapping systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2007,5(1):30~33 (in Chinese))
- 2 李志从,王琪. 受两个频率激励和皮带驱动的具有干摩擦的振子的动力学分析. 动力学与控制学报, 2008,6(1):45~49 (Li Z C, Wang Q. Dynamical analysis of a dry friction oscillator with two-frequency excitation and belt driving. *Journal of Dynamics and Control*, 2008,6(1):45~49 (in Chinese))
- 3 Nusse H E, Ott E, Yorke J A. Border-collision bifurcations: an explanation for observed bifurcations phenomena. *Physical Review E*, 1994,49(2):1073~1076
- 4 Nusse H E, Yorke J A. Border-collision bifurcation including "period two to period three" for piecewise smooth systems. *Physica D*, 1992,57(1):39~57
- 5 Feigin M I. The increasingly complex structure of the bifurcation tree of a piecewise-smooth system. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1995,59(6):853~863
- 6 di Bernardo M, Feigin M I, Hogan S J, Homer M E. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1999,10(11):1881~1908
- 7 Chin W, Ott E, Nusse H E, Grebogi C. Grazing bifurcations in impact oscillators. *Physical Review E*, 1994,50(6):4427~4444
- 8 de Weger J, van de Water W, Molenaar J. Grazing impact oscillations. *Physical Review E*, 2000,62(2):2030~2041

- 9 Gardini L, Tramontana F, Banerjee S. Bifurcation analysis of an inductorless chaos generator using 1D piecewise smooth map. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2013, 95:137 ~ 145
- 10 Avrutin V, Dutta P S, Schanz M, Banerjee S. Influence of a square-root singularity on the behaviour of piecewise smooth maps. *Nonlinearity*, 2010, 23(2):445 ~ 463
- 11 Sushko I, Agliari A, Gardini L. Bifurcation structure of parameter plane for a family of unimodal piecewise smooth maps: Border-collision bifurcation curves. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, 29(3):756 ~ 770
- 12 Gardini L, Tramontana F, Sushko I. Border-collision bifurcations in one dimensional linear-hyperbolic maps. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2010, 81(4):899 ~ 914
- 13 Gardini L, Sushko I, Naimzada A K. Growing through chaotic intervals. *Journal of Economic Theory*, 2008, 143(1):541 ~ 557
- 14 Gardini L, Tramontana F. Border-collision bifurcation curves and their classification in a family of 1D discontinuous maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2011, 44(4-5):248 ~ 259
- 15 Tramontana F, Gardini L. Border-collision bifurcations in discontinuous one dimensional linear-hyperbolic maps. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(3):1414 ~ 1423
- 16 Tramontana F, Gardini L, Agliari A. Endogenous cycles in discontinuous growth models. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2011, 81:1625 ~ 1639
- 17 Bischi G I, Gardini L, Tramontana F. Bifurcation curves in discontinuous maps. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*, 2010, 13(2):249 ~ 267
- 18 Avrutin V, Schanz M, Banerjee S. Multi-parametric bifurcations in a piecewise linear discontinuous map. *Nonlinearity*, 2006, 19:1875 ~ 1906
- 19 范盛金. 一元三次方程的新求根公式与新判别法. 海南师范学院学报(自然科学版), 1989, 2(2):91 ~ 98 (Fan S J. A new extracting formula and a new distinguishing means on the one variable cubic equation. *Natural Science Journal of Hainan Teachers College*, 1989, 2(2):91 ~ 98 (in Chinese))

## BIFURCATION ANALYSIS IN A CLASS OF DISCONTINUOUS MAPS \*

Li Qunhong<sup>†</sup> Wei Limei Lu Yumu

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China)

**Abstract** Border-collision bifurcations of a class of one-dimensional piecewise discontinuous maps were investigated. The border-collision bifurcation curves and fold bifurcation conditions for period-n solutions were derived. The correctness of the deduced results was confirmed through the numerical simulations. It is found that there are period adding sequences and period overlapping sequences in the system. Finally, the three-parameter bifurcations of the piecewise discontinuous map were considered, which demonstrates the combined influence of all the parameters in the map.

**Key words** piecewise map, border-collision bifurcation, period overlapping, period adding

Received 26 January 2014, revised 3 April 2014.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10972059 and 11372077) and the Guangxi Natural Science Foundation (2010GXNSFA013110 and 2013GXNSFAA019017)

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: liqh@gxu.edu.cn