第 13 卷第 4 期 2015 年 8 月
1672-6553/2015/13(4)/250-6
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 13 No. 4
Aug. 2015

状态空间中约束系统的运动方程*

丁光涛†
(安徽师范大学物理与电子信息学院,芜湖 241000)

摘要 引入状态变量表示力学系统的约束方程;建立状态空间中运动约束系统的新型变分原理;导出运动约束系统的带乘子的运动微分方程和广义状态变量运动微分方程;证明状态空间中运动约束系统的运动方程是奇异的;举例说明所得结果的应用.

关键词 分析力学, 状态空间, 运动约束, 变分原理, 运动方程
DOI: 10.6052/1672-6553-2013-098

引言

上世纪 90 年代初期,我国力学界围绕非完整系统的力学模型曾发生过一场影响深远的争论[1],其中一些重要工作涉及状态空间[2-5]. 对状态空间中完整系统的分析力学理论已进行过研究[6],本文将上述工作拓展到存在与速度相关的运动约束系统,给出对应的变分原理和运动微分方程,并证明了方程的奇异性.这种从位形空间中力学系统运动方程到对应的状态空间中运动方程的变换,在数学上等效,在物理上有可能带来新的结果.例如,在上世纪初,曾经围绕是否所有的二阶微分方程都可以表示成为 Lagrange 方程的问题进行过讨论,得到的结论是否定的[7];值得注意的是,有些二阶方程虽然不能直接或间接地从变分原理导出,但是 Hojman 证明将这些方程变换成等效的一阶微分方程后,就能够导出一阶 Lagrange 函数,将其表示为 Lagrange 方程[8].此外,虽然本文得到的理论不同于通常的非完整力学,但是在某些特殊条件下却与非完整力学结果一致.最后通过实例说明所得结果的应用.

1 状态空间中力学系统的约束

1.1 力学系统的状态空间

经典力学中引入多种空间描述系统的运动,并在其中分别建立对应的动力学理论.对于由 N 个质点组成的 Newton 力学系统,其全部质点在时刻 t 的位置集合

$$\mathbf{C}=\{x_{k1},x_{k2},x_{k3};k=1,\cdots,N\} \tag{1}$$

描述了系统的位形,由位置坐标(位形变量)张成的空间称为位形空间.系统全部质点在时刻 t 的位置和速度集合

$$\mathbf{S}=\{x_{k1},x_{k2},x_{k3};v_{k1},v_{k2},v_{k3};k=1,\cdots,N\} \tag{2}$$

描述了系统的状态,由状态变量(位置和速度)张成的空间称为状态空间.在位形空间中速度的定义是坐标对时间的微商,即

$$v_{ki}=\dot{x}_{ki},(k=1,\cdots,N;i=1,2,3) \tag{3}$$

但是,在状态空间中速度变量应作为独立变量,方程(3)不能再看作当然成立的定义式.以下把 x_{ki},v_{ki} 写成 $x_j,v_j,(j=3k-2,3k-1,3k;k=1,\cdots,N)$.以上的坐标速度变量是严格力学意义上的状态变量,这种空间可以称为狭义的状态空间.

1.2 状态空间中的约束方程

位形空间中和状态空间中的约束方程的形式和约束的分类有所不同,集中表现在运动约束上.

几何约束仅限制质点的几何位置,两种空间中这种约束方程都写成

$$F_r=F_r(x_1,\cdots,x_{3N},t)=F_r(x,t)=0,\quad (r=1,\cdots,l<3N) \tag{4}$$

运动约束是与速度相关的约束,在位形空间中这种约束方程写成

$$\Phi_r=\Phi_r(x,\dot{x},t)=0,(r=1,\cdots,g<3N) \tag{5}$$

其中线性运动约束方程写成

2013-11-03 收到第 1 稿,2013-11-27 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11472063)
† 通讯作者 E-mail:dgt695@sina.com

$$\Phi_r = A_{rj}(x,t)\dot{x}_j + A_r(x,t) = c_r,\quad (j=1,\cdots,3N;r=1,\cdots,g) \tag{6}$$

方程(5)和(6)所表示的约束有时称为微分约束,这些微分约束又分成可积分的和不可积分的,因而带来了完整和非完整约束的分类. 这里以及后面的求和约定是,对同一项中重复的拉丁下标 i,j 自动从 1 到 $3N$ 求和;对重复的拉丁下标 r,s 自动从 1 到 g 求和;对重复的希腊下标 α,β 自动从 1 到 $S=3N-g$ 求和.

在状态空间中,将一般的运动约束方程写成

$$\Phi_r = \Phi_r(x,v,t) = 0,\ (r=1,\cdots,g<3N) \tag{7}$$

其中线性运动约束方程写成

$$\Phi_r = A_{rj}(x,t)v_j + A_r(x,t) = C_r,\quad (j=1,\cdots,3N;r=1,\cdots,l) \tag{8}$$

方程(7)和(8)中,$x_1,\cdots,x_{3N};v_1,\cdots,v_{3N}$是彼此独立的变量. 在本文中按照式(7)表达的运动约束方程与式(4)表达的几何约束方程,都是有限形式的方程,而不是微分方程,方程(7)和(8)没有可积和不可积的区别,也就是说,在状态空间中约束力学系统没有完整和非完整系统的区别. 下面的讨论中,如果不作专门说明,就将状态空间中系统受到的约束统一写成式(7)形式,而将几何约束看成它的特殊情形.

1.3　状态变量的虚变更

考虑力学系统状态的虚变更,约束加在其上的限制条件为

$$\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_j}\delta x_j + \frac{\partial\Phi_r}{\partial v_j}\delta v_j = 0,\ (r=1,\cdots,g) \tag{9}$$

将 $\delta x_j,\delta v_j$ 全体称为系统在状态空间中的虚变更,δx_j 和 δv_j 分别称为坐标虚变更和速度虚变更. 这里的虚变更定义可以看作通常几何约束对虚位移定义的自然推广,当约束 Φ_r 是几何约束时,即

$$\frac{\partial\Phi_r}{\partial v_j} = 0,\ (j=1,\cdots,3N) \tag{10}$$

式(9)就化作几何约束对虚位移的限制条件.

2　状态空间中力学系统的变分原理

2.1　微分形式的变分原理

设系统由 N 个质点组成,质点 k 的质量为 m_k,坐标为 x_{3k-2},x_{3k-1},x_{3k},速度分量为 v_{3k-2},v_{3k-1},v_{3k},作用于其上的合力的分量 F_{3k-2},F_{3k-1},F_{3k},系统受到 g 个式(7)形式的约束. 将 D′Alembert 原理推广到状态空间,得到

$$-m_j\dot{v}_j + F_j + R_j = 0,$$
$$m_j\dot{x}_j - m_jv_j + U_j = 0,\ (j=1,\cdots,3N) \tag{11}$$

应当指出,这里以及下面公式中质量 m_j 的下标作为求和约定的例外处理,不求和. 式中 R_j,U_j 分别是约束对系统运动的影响,在坐标子空间和速度子空间中的表现.

引入系统状态变量的虚变更 $\delta x_j,\delta v_j$,则可以从方程(11)导出下列关系式

$$(-m_j\dot{v}_j + F_j + R_j)\delta x_j + [m_j(\dot{x}_j - v_j) + U_j]\delta v_j = 0$$

推广位形空间力学系统理想约束定义,引入满足下列条件的状态空间中的理想约束

$$R_j\delta x_j + U_j\delta v_j = 0 \tag{12}$$

就导出状态空间中理想约束系统的微分形式的变分原理

$$(-m_j\dot{v}_j + F_j)\delta x_j + m_j(\dot{x}_j - v_j)\delta v_j = 0 \tag{13}$$

这是一种新的微分形式的变分原理,在系统只存在几何约束的特殊情况下,这个原理就变换成为通常的 D′Alembert − Lagrange 原理.

2.2　积分形式的变分原理

式(13)乘以 dt 并从 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 积分,得到

$$\int_{t_1}^{t2}[(-m_j\dot{v}_j + F_j)\delta x_j + m_j(\dot{x}_j - v_j)\delta v_j]\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t2}[-m_jv_j\delta v_j + F_j\delta x_j + m_j\dot{x}_j\delta v_j + m_jv_j\delta\dot{x}_j]\mathrm{d}t - [m_jv_j\delta x_j]_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{14}$$

上式推导过程中利用了对易关系

$$\frac{d}{dt}\delta x_j = \delta\dot{x}_j \tag{15}$$

这个对易关系与约束方程(7)是有限形式的相关.

取端点条件为

$$\delta x_j(t_1) = \delta x_j(t_2) = 0 \tag{16}$$

上述条件与位形空间 Lagrange 力学的变分原理端点条件相同,只要求两个端点在坐标子空间中是固定的,并没有要求在整个状态空间中固定.

定义虚功和动能

$$\delta W = F_j\delta x_j \tag{17}$$

$$T = \frac{1}{2}m_jv_jv_j = \frac{1}{2}m_jv_j^2 \tag{18}$$

引入新的状态函数

$$G = m_jv_j\dot{x}_j - T = \frac{\partial T}{\partial v_j}(\dot{x}_j - v_j) + T \tag{19}$$

则从式(14)得到状态空间中力学系统积分形式变

分原理的一般形式

$$\int_{t_1}^{t2}(\delta W+\delta G)\mathrm{d}t=0 \tag{20}$$

如果系统是有势的，即存在势能函数 $V=V(x_j,t)$，使得

$$F_j=-\frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{21}$$

代人式(17)，得到 $\delta W=-\delta V$，则式(20) 写成

$$\int_{t_1}^{t2}\delta(G-V)\mathrm{d}t=0$$

由于约束方程(7) 是有限形式的，故从上式可以得到

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t2}K\mathrm{d}t=0 \tag{22}$$

式中引入了力学系统在状态空间中的特性函数

$$K=K(x_j,v_j,\dot{x}_j,t)=G-V=\frac{\partial L}{\partial v_j}(\dot{x}_j-v_j)+L \tag{23}$$

$$L=L(x,v,t)=T-V \tag{24}$$

这个结果与文献[6]一致.

3 状态空间中力学系统带乘子的运动方程

由于存在式(7)运动约束，微分变分原理(13)中状态的虚变更受到条件(9)限制，引入不定乘子 λ_r，从式(13)和(9)导出

$$(-m_j\dot{v}_j+F_j+\lambda_r\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_j})\delta x_j+[m_j(\dot{x}_j-v_j)+\lambda_r\frac{\partial\Phi_r}{\partial v_j}]\delta v_j=0$$

由此得到带乘子的运动微分方程

$$m_j\dot{v}_j=F_j+\lambda_r\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_j}$$

$$m_j\dot{x}_j=m_jv_j-\lambda_r\frac{\partial\Phi_r}{\partial v_j} \tag{25}$$

关于方程(25)，作如下说明：

1)如果系统约束都是几何约束，满足条件(10)，那么从式(25)的第二组方程得到

$$\dot{x}_j=v_j \tag{26}$$

代人式(25)的第二组方程得到

$$m_j\ddot{x}_j=F_j+\lambda_r\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_j} \tag{27}$$

这组方程就是分析力学中的第一类 Lagrange 方程.

2)如果系统约束不满足条件(10)，即约束中存在与速度相关的运动约束，那么就得不到式(26)的结果. 从方程(25)可以导出

$$m_j\ddot{x}_j=F_j+\lambda_r(\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi_r}{\partial v_j})-\dot{\lambda}_r\frac{\partial\Phi_r}{\partial v_j} \tag{28}$$

这组方程与通常非完整力学中的 Routh 方程不同，笛卡尔坐标下 Routh 方程为[9]

$$m_j\ddot{x}_j=F_j+\lambda_r\frac{\partial\Phi_r}{\partial\dot{x}_j} \tag{29}$$

笛卡尔坐标下 Vacco 方程为[10]

$$m_j\ddot{x}_j=F_j+\mu_r(\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi_r}{\partial\dot{x}_j})-\dot{\mu}_r\frac{\partial\Phi_r}{\partial\dot{x}_j} \tag{30}$$

由于对运动约束系统而言，式(26)不成立，故方程(28)与 Vacco 方程形式相似而实质不同.

3)在下面讨论中，将指出方程(25)是奇异的，它的解不是唯一确定的.

综上所述，对几何约束系统方程(25)与传统的第一类 Lagrange 方程一致，这是这组方程可能成立的必然要求；但是，对运动约束系统，这组方程是新型的运动微分方程.

4 状态空间中广义状态变量的运动方程

4.1 广义状态变量运动方程的导出

引入 S 个广义状态变量 $q_\alpha(S=6N-g)$，系统的坐标和速度的变换方程为

$$x_j=x_j(q_\alpha,t);v_j=v_j(q_\alpha,t)$$
$$(\alpha=1,\cdots,S;j=1,\cdots,3N) \tag{31}$$

将上述变换方程代人(7)，所有约束方程都应当成为恒等式. 将以下各式

$$\delta x_j=\frac{\partial x_j}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha,\dot{x}_j=\frac{\partial x_j}{\partial t}+\frac{\partial x_j}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta;$$

$$\delta v_j=\frac{\partial v_j}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha,\dot{v}_j=\frac{\partial v_j}{\partial t}+\frac{\partial v_j}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta \tag{32}$$

代人变分原理(13)，展开并整理得到

$$[M_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta+N_\alpha-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}+Q_\alpha]\delta q_\alpha=0 \tag{33}$$

这是广义状态变量表示的微分形式变分原理. 式中

$$M_{\alpha\beta}=m_j(\frac{\partial v_j}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_j}{\partial q_\beta}-\frac{\partial v_j}{\partial q_\beta}\frac{\partial x_j}{\partial q_\alpha}) \tag{34}$$

$$N_\alpha=m_j(\frac{\partial x_j}{\partial t}\frac{\partial v_j}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial v_j}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial q_\alpha}) \tag{35}$$

$$T=\frac{1}{2}m_jv_jv_j=\frac{1}{2}m_jv_j^2 \tag{36}$$

$$Q_\alpha=F_j\frac{\partial x_j}{\partial q_\alpha} \tag{37}$$

由于广义状态变量变更 δq_α 是独立的,故从式(33)得到

$$M_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta + N_\alpha - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha = 0,(\alpha = 1,\cdots,S) \quad (38)$$

这就是广义状态变量表示的状态空间中运动约束系统的运动方程. 容易证明上述方程可以从变分原理(20)导出.

对于有势系统,运动微分方程可以直接从变分原理(22)导出,即

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial K}{\partial q_\alpha} = 0,(\alpha = 1,\cdots,S) \quad (39)$$

将式(23)中 K 代入方程(39),导出的方程与(38)形式一致,其中广义力为有势力

$$Q_\alpha = F_j\frac{\partial x_j}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (40)$$

4.2　广义状态变量运动方程是奇异的

方程(38)(和(39))形式上与完整系统的状态空间中的 Lagrange 方程相同[6],但是,实质上存在重大区别,即运动约束系统的运动方程是奇异的. 可以直接看出,如果约束数 g 是奇数,即 S 也是奇数,而 $M_{\alpha\beta}$是反对称的,则行列式$[M_{\alpha\beta}]$为零,系统是奇异的. 但是,根本问题在于对方程(38)而言,不论 g(或 S)是奇数还是偶数,系统都必然是奇异的. 证明如下:

对存在 g 个运动约束(7)的系统,将式(7)对时间求导可得到

$$\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial v_j}\frac{\partial v_j}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\beta + \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial v_j}\frac{\partial v_j}{\partial t} \equiv 0,(r = 1,\cdots,g) \quad (41)$$

上述恒等式可以看作是对运动方程的限制条件

$$A_{r\beta}\dot{q}_\beta + B_r = 0,(r = 1,\cdots,g) \quad (42)$$

这就是说 $\dot{q}_\alpha$ 不是全部独立的,它们之间存在上述 g 个齐次线性相关的关系,即矩阵$[M_{\alpha\beta}]$的最高秩只能是 $S-g$,行列式

$$\det(M_{\alpha\beta}) \equiv 0 \quad (43)$$

系统(38)是奇异的,方程中广义速度 $\dot{q}_\alpha$ 不是全部独立的的. 对于奇异系统,应当补充条件才能求解,即方程的解不是唯一确定的. 与 Lagrange 力学类似,方程(25)和(38)是等价的,因此方程组(38)的奇异性,在方程(25)中也应当表现出来,换句话说,带乘子的运动微分方程的解也不是唯一确定的,下面将结合例题讨论说明.

5　算例分析

讨论受线性运动约束的质点运动的典型问题. 设单位质量的质点所受主动力分量为 F_1,F_2,F_3,约束为

$$v_1 - x_3 v_2 = 0 \quad (44)$$

列出质点运动微分方程,并讨论下列两种情况下质点的运动. 1)质点不受任何主动力作用;2)质点在重力场中运动.

首先,列出带乘子的运动方程. 引入乘子 λ,根据方程(25)得到

$$\dot{v}_1 = F_1,\dot{v}_2 = F_2,\dot{v}_3 = F_3 - \lambda v_2;$$
$$\dot{x}_1 = v_1 - \lambda,\dot{x}_2 = v_2 + \lambda x_3,\dot{x}_3 = v_3. \quad (45)$$

其次,列出广义状态变量运动微分方程. 选取变量 $q_\alpha(\alpha = 1,2,3,4,5)$,变换方程为

$$x_1 = q_1,x_2 = q_2,x_3 = q_3$$
$$v_1 = q_3 q_4,v_2 = q_4,v_3 = q_5 \quad (46)$$

由式(34)-(37)得到

$$M_{11} = M_{22} = M_{33} = M_{44} = M_{55} = M_{12} = M_{21} = M_{15} = M_{51} = M_{23} = M_{32} = M_{25} = M_{52} = M_{34} = M_{43} = M_{45} = M_{54} = 0,$$
$$M_{13} = -M_{31} = -q_4,M_{14} = -M_{41} = -q_3,$$
$$M_{24} = -M_{42} = M_{35} = -M_{53} = -1. \quad (47)$$
$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N_5 = 0,Q_1 = F_1,$$
$$Q_2 = F_2,Q_3 = F_3,Q_4 = Q_5 = 0,$$
$$T = \frac{1}{2}(q_4^2 + q_5^2 + q_3^2 q_4^2) \quad (48)$$

代入方程(38),得到质点状态空间中运动方程为

$$-q_4\dot{q}_3 - q_3\dot{q}_4 + F_1 = 0,\ -\dot{q}_4 + F_2 = 0$$
$$q_4\dot{q}_1 - \dot{q}_5 - q_3 q_4^2 + F_3 = 0,$$
$$q_3\dot{q}_1 + \dot{q}_2 - q_4 - q_3^2 q_4 = 0,$$
$$\dot{q}_3 - q_5 = 0. \quad (49)$$

结合约束方程(44),从方程(45)中消去乘子,就导出方程(49),这说明带乘子方程与广义变量运动方程是一致的,而且容易证明方程(49)是奇异的,相对应的方程(45)结合约束方程(44)也不能唯一确定的解.

方程(49)中 5 个 $\dot{q}_\alpha$ 不是全部独立的,必须引入补充条件. 如果假设

$$\dot{q}_5 = f_5(t) \quad (50)$$

则方程(49)约化成为

$$-q_4\dot{q}_3 - q_3\dot{q}_4 + F_1 = 0,$$

$$-\dot{q}_4+F_2=0$$
$$q_4\dot{q}_1-f_5-q_3q_4^2+F_3=0,$$
$$q_3\dot{q}_1+\dot{q}_2-q_4-q_3^2q_4=0. \tag{51}$$

这个方程中4个广义速度是独立的,可以求解.

需要指出,从数学上要考虑主动力和补充条件的函数形式,使导出的约化方程是否相容和可积;从力学物理学上要考虑这些条件是否合理,能否实现;当然补充条件的引入也给解决实际问题以新的可能. 下面讨论两种简单的情况:

1)主动力为零,即

$$F_1=F_2=F_3=0 \tag{52}$$

并设

$$\dot{q}_5=f_5(t)=0 \tag{53}$$

代人方程(51),并结合方程(49)第5式,可以得到如下的一组解:

$$q_1=c_3c_4t+c_1,\quad q_2=c_4t+c_2,$$
$$q_3=c_3,\quad q_4=c_4,\quad q_5=c_5=0 \tag{54}$$

式中 c_1,c_2,c_3,c_4 是积分常数. 上述解满足约束(4),而且可以导出

$$\dot{q}_1=v_1,\dot{q}_2=v_2=q_4,\dot{q}_3=v_3=q_5 \tag{55}$$

这时约束方程(44)与典型的非完整约束方程[9]

$$\dot{x}_1-x_3\dot{x}_2=0 \tag{56}$$

一致,但是,质点运动犹如作自由运动,非完整约束的影响消失了[11]. 需要指出的是,这种情况下与方程(49)对应的方程(45)的解中 $\lambda=0$.

2)质点在重力场中运动,轴向上,即

$$F_1=F_2=0,F_3=-g \tag{57}$$

方程(51)写成

$$-q_4\dot{q}_3-q_3\dot{q}_4=0,-\dot{q}_4=0,$$
$$q_4\dot{q}_1-f_5-q_3q_4^2-g=0,$$
$$q_3\dot{q}_1+\dot{q}_2-q_4-q_3^2q_4=0 \tag{58}$$

仍然选择式(53),方程(58)的一组解为

$$q_1=c_3c_4t+\frac{gt}{c_4}+c_1,q_2=c_4t-\frac{c_3}{c_4}gt+c_2,$$
$$q_3=c_3,q_4=c_4,q_5=c_5=0 \tag{59}$$

与解(54)比较,解(59)反映了约束(44)的影响,对应的乘子运动方程(45)中 $\lambda=g/c_4$,回到原来的变量,$\dot{x}_1\neq v_1,\dot{x}_2\neq v_2$,约束(44)不再能写成式(56)形式.

如果设

$$\dot{q}_5=f_5(t)=-g \tag{60}$$

在物理上上述假设可以实现,引入一个控制装置以抵消重力影响. 从表面上看,方程(58)又成为1)中讨论过的情况,又导出解(54),然而,这是不可以的,因为这组解将导致方程(49)中第5式不成立. 但是,可以给出另一组解

$$q_1=c_1,q_2=c_2,q_3=-\frac{1}{2}gt^2+c_5t+c_3,$$
$$q_4=0,q_5=-gt+c_5 \tag{61}$$

这组解实际上表示自由落体运动,讨论的约束条件已失去意义. 在质点所受的主动力为零时,也存在与(61)相似的解,即质点沿 x_3 轴作匀速直线运动,也是一个数学上允许的而物理上失去意义的解.

6 结论和讨论

(1)本文以状态变量为描述力学系统的基本量,将状态空间几何约束系统的Lagrange力学理论推广的带有与速度相关的运动约束系统,建立了一种新的力学理论. 这个理论处理与速度相关的约束问题的模式,与通常位形空间分析力学理论处理几何约束相似.

(2)本文给出的理论在只存在几何约束情况下,与传统的Lagrange力学一致,这是新理论立足的基点,表明它是经典分析力学的一种符合逻辑的推广;但是,对于存在与速度相关的运动约束情况下,则与通常的非完整力学以及Vacco力学理论都不相同.

(3)本文给出的力学理论是自洽的,避开了通常的位形空间中处理非完整系统时所存在的一些矛盾. 在一定条件下,本文状态空间中的运动约束与位形空间中的微分约束形式一致,运动约束的作用消失,这种条件需要进一步深入研究.

(4)本文证明引入状态变量处理运动约束系统问题时,运动方程是奇异的,这是一个重要的新结论,这种性质会带来解的不确定性问题,但是给引入补充条件来处理实际问题带来新的可能.

参考文献

1 罗绍凯,张永发. 约束系统动力学研究进展. 北京:科学出版社, 2008 (Luo S K, Zhang Y F. Advances in the study of dynamics of constrained systems. Beijing: Sceince Press. 2008 (in Chinese))

2 陈滨. 状态空间非线性约束的完整性和非完整性. 中国科学:A 辑, 1993,23(8):839 ~ 846 (Chen B. Holonomic property and non-holonomic property of nonlinear constraints in state space. *Science in China* (*Series A*), 1993, 23(8): 839 ~ 846 (in Chinese))

3 朱如曾. 非完整力学的第二类、第一类和中间类型变分原理. 中国科学:A 辑,1999,29(1):49 ~ 54 (Zhu R Z. The second kind, the first kind and the middle kind of variational principles in the nonholonomic mechanics. *Science in China* (*Series A*), 1999,29(1): 49 ~ 54(in Chinese))

4 Liang L F, Hu H C. Generalized variational principles of three kinds of variables in general mechanics. *Science in China* (*Series A*), 2001,44(6):770 ~ 776

5 丁光涛. 状态空间中变分原理和运动方程. 安徽师范大学学报(自然科学版),1989,12(1):12 ~ 24 (Ding G T. A variational principle and equations of motion in the state space. *Journal of Anhui Normal University* (*Science Edition*),1989,12(1):12 ~ 24(in Chinese))

6 丁光涛. 状态空间 Lagrange 函数和运动方程. 中国科学:物理学、力学、天文学,2009,39(6):813 ~ 820 (Ding G T. Lagrangians and equations of motion in state space. *Science China Physics*, *Mechanics & Astronomy*, 2009,39(6): 813 ~ 820 (in Chinese))

7 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics I. New York : Springer-Verlag ,1978

8 Hojman S, Urrutia L F. On the inverse problem of the calculus of variations. *Journal of Mathematical Physics-Scitation*,1981,22: 1896 ~ 1902

9 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京:北京工业学院出版社,1985 (Mei F X. Foundations of mechanics of nonholonomic systems. Beijing: BeijingInstitute of Technology Press,1985 (in Chinese))

10 Arnold V I, Kozlov V V, Neishtadt A I. Mathematical aspects of classical and celestial Mechanics,3-rd ed. Beijing: Science Press,2009

11 梅凤翔. 非完整系统的自由运动和非完整性的消失. 力学学报, 1994,26(4):470 ~ 476(Mei F X. The free motion of nonholonomic system and disappearance of the nonholonomic property. *Acta Mechanica Sinica*, 1994,26(4): 470 ~ 476 (in Chinese))

EQUATIONS OF MOTION IN STATE SPACE FOR CONSTRAINED MECHANICAL SYSTEMS *

Ding Guangtao†

(*College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

Abstract The constraint equations expressed by state variables were introduced, and new variational principles of kinematic constrained systems in state space were established. The equations of motion with multiplier and in general state variables for kinematic constrained systems were derived. It is shown that the motion equations of constrained systems in state space are singular. An example was given to illustrate the application of the result.

Key words analytical mechanics, state space, kinematic constraint, variational principle, equations of motion

Received 3 November 2013, revised 27 November 2013.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11472063)

† Corresponding author E-mail: dgt695@ sina. com