第 13 卷第 4 期 2015 年 8 月
1672-6553/2015/13(4)/246-4

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 13 No. 4
Aug. 2015

Birkhoff 框架下 Whittaker 方程的离散变分算法*

刘世兴† 李娜 刘畅
(辽宁大学物理学院,沈阳 110036)

摘要 本文在 Birkhoff 框架下,采用离散变分方法研究了非 Hamilton 系统-Whittaker 方程的数值解法,并通过和传统的 Runge-Kutta 方法进行比较,说明了在 Birkhoff 框架下研究非 Hamilton 系统可以得到更加可靠和精确的数值结果.

关键词 Whittaker 方程, Birkhoff 方程, 离散变分方法

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-005

引言

Lagrange 系统或 Hamilton 系统具有简单的辛几何结构,自动满足自伴随性质,可以用来描述耗散可忽略的保守动力学系统,并在动力学系统的保结构算法研究中具有重要意义[1-3]. 但是对于本质非自伴随的动力学系统,在保持实验室可观测量或动力学函数物理意义不变的情况下,则不能表示为 Lagrange 或 Hamilton 系统. 我们称这类不能表示为简单 Lagrange 或 Hamilton 方程的动力学系统为非 Lagrange 或非 Hamilton 系统[4]. 如 Beteman 在 1931 年描述了一个始终不能求解的问题. 之后,Tolman 根据这个故事提出了如下问题:是否存在不能由 Lagrange 函数得到的方程组? Whittaker 提出如下方程[5]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - x &= 0 \\ \ddot{y} - \dot{x} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

并确信该方程不能由任何 Lagrange 函数导出,即不能将该方程表示成 Lagrange 方程或 Hamilton 正则方程组的形式. 这个方程就是著名的 Whittaker 方程,其在 Lagrange 力学逆问题以及 Birkhoff 力学的研究和发展过程中起着重要的作用. 物理和工程应用中存在着大量的非 Hamilton 系统,如非完整系统,非保守系统,奇异系统等都不能在保持实验室可观测量或动力学函数物理意义的情况下表示为简单的 Hamilton 系统,然而,将不满足自伴随条件的非 Hamilton 系统表示为具有一般辛结构的 Birkhoff 系统,则能够实现动力学系统的自伴随化,并保持实验室可观测量或动力学函数的物理意义. 对于这类系统,由于不具有简单的辛结构,传统的保辛算法已经不再适用,因此需要找到一种较理想的数值算法来数值求解这类系统的运动方程问题. Birkhoff 动力学是 Hamilton 动力学的自然推广,是一般辛结构的局部实现[6],因此,在 Birkhoff 框架下研究非 Hamilon 系统问题,不但可以推广和深化 Hamilton 动力学理论,同时通过对 Birkhoff 系统的几何数值积分的研究,也可以间接的实现非 Hamilton 系统的保结构算法,从而对解决工程科学中大量的非 Hamilton 系统问题具有重要的理论意义和工程应用价值. 本文以 Whittaker 方程为例,在 Birkhoff 意义下,将 Whittaker 方程表示为自洽 Birkhoff 方程的形式,并采用离散变分方法,给出研究这类非 Lagrange 或非 Hamilton 系统的数值积分子. 通过数值实验说明了在 Birkhoff 框架下研究这类系统的几何数值积分问题是合理和有效的,从而为研究非 Lagrange 或非 Hamilton 系统的几何数值积分问题开辟了一条新的途径.

1 Whittaker 方程的 Birkhoff 表示

如果取 $a^1 = x, a^2 = y, a^3 = \dot{x}, a^4 = \dot{y}$,则原方程

2014-12-15 收到第 1 稿,2014-12-31 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11472124,11202090,11172120 和 11301350),辽宁省博士启动基金资助(20141050),辽宁省教育厅科学技术研究一般项目(L2013005)
† 通讯作者 E-mail: liushixing@lnu.edu.cn

(1)可以写成如下的 1 阶形式:

$$\dot{a}^1 = a^3,\ \dot{a}^2 = a^4,\ \dot{a}^3 = a^1,\ \dot{a}^4 = a^3, \quad (2)$$

该系统有如下的第一积分:

$$I^1 = (a^1 + a^3)e^{-t},$$

$$I^2 = (a^1 - a^3)e^t,$$

$$I^3 = a^4 - a^1,$$

$$I^4 = a^3 + a^4 t - a^2 - a^1 t,$$

利用 Hojman 方法,则可以求得 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组:

$$B = -3(a^1)^2 + 2(a^3)^2 - (a^4)^2 + 2a^1a^4, \quad (3)$$

$$R_1 = 3a^3 - a^2,$$

$$R_2 = a^1 - a^4,$$

$$R_3 = a^4 - 3a^1,$$

$$R_4 = a^2 - a^3 \quad (4)$$

从所得到的 Birkhoff 函数(3)和 Biikhoff 函数组(4)可以看出,Whittaker 方程的 Birkhoff 表示为自治 Birkhoff 方程[6].

2 自治 Birkhoff 积分子的构造

取坐标为$\{a^\mu\}(\mu = 1,\cdots,2n)$的构型空间 M^{2n},设自治 Birkhoff 函数 $B:M^{2n}\to R$ 和 Birkhoff 函数组 $R_\mu:M^{2n}\to R$,并定义如下 Pfaff 作用量:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P(a,\dot{a})\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} (R_\mu(a)\dot{a}^\mu - B(a))\,\mathrm{d}t \quad (5)$$

这里 $P(a,\dot{a})$为 Pfaff 函数. 利用等时变分原理 $\delta A = 0$,并考虑端点条件 $\delta a(t_1) = \delta a(t_2) = 0$,可以得到自治 Birkhoff 方程[6]:

$$\left(\frac{\partial R_\nu(a)}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu(a)}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B(a)}{\partial a^\mu} = 0 \quad (6)$$

取离散空间为 $M\times M$,并取定时间步长 $h\in \mathrm{R}$,定义离散 Pfaff 函数 $P_d:M\times M\times R\to R$,从而给出离散作用泛函为[7-10]:

$$A_d = \sum_{k=0}^{N-1} P_d(h,a_k,a_{k+1}) \quad (7)$$

利用离散变分计算 $\delta A_d = 0$,并考虑端点条件 $\delta a_0 = \delta a_N = 0$,则可以得到如下离散自治 Birkhoff 方程:

$$D_B P_d(a_k,a_{k+1},h) = 0 \quad (8)$$

这里,D_B 为离散 Birkhoff 映射,写成坐标形式如下:

$$D_1P_d(a_k,a_{k+1},h) + D_2P_d(a_{k-1},a_k,h) = 0 \quad (9)$$

这里 $D_iP_d(i = 1,2)$表示对 P_d 中第 i 个变量的偏导数. 如果取

$$b_k = -D_1P_d(a_k,a_{k+1},h) \quad (10)$$

$$b_{k+1} = D_2P_d(a_k,a_{k+1},h) \quad (11)$$

作为中间变量,通过求解隐式方程(10)可以得到 a_{k+1},然后求解显式方程(11),则得到映射:$\hat{F}_{P_d}:(\mathrm{a_k},\mathrm{b_k})\to(\mathrm{a_{k+1}},\mathrm{b_{k+1}})$,即给出系统随时间的演化. 可以证明,映射$\hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{P_d}}$保持离散 Birkhoff 辛形式[10],从而方程(10)和(11)给出了计算自治 Birkhoff 系统的 Birkhoff 辛积分子. 可以采用许多方法离散 Pfaff 函数,如中点格式,Verlet 方法,Runge - Kutta 方法等[11]. 本文采用 Euler 中点格式来离散 Pfaff 函数.

3 Whittaker 方程的数值分析

给定初始条件,如取 $x(0) = 2,\dot{x}(0) = 0,\ y(0) = -2,\dot{y}(0) = 3$,则 Whittaker 方程(1)存在解析解:

$$x = e^{-t} + e^t,\ y = e^t - e^{-t} + t - 2 \quad (12)$$

可以看出,Whittaker 方程的解随时间呈指数增加.

将 Whittaker 方程的 Birkhoff 表示(3)和(4)代入(5)中的 $P(a,\dot{a}) = R_\mu(a)\dot{a}^\mu - B(a)$,并采用 Euler 中点格式可以得到离散 Pfaff 函数:

$$P_d = h\left[\begin{array}{l}\left(3\left(\dfrac{a^3_{k+1}+a^3_k}{2}\right) - \dfrac{a^2_{k+1}+a^2_k}{2}\right)\left(\dfrac{a^1_{k+1}-a^1_k}{h}\right)\\ +\left(\dfrac{a^1_{k+1}+a^1_k}{2} - \dfrac{a^4_{k+1}+a^4_k}{2}\right)\left(\dfrac{a^2_{k+1}-a^2_k}{h}\right)\\ +\left(\dfrac{a^4_{k+1}+a^4_k}{2} - 3\left(\dfrac{a^1_{k+1}+a^1_k}{2}\right)\right)\left(\dfrac{a^3_{k+1}-a^3_k}{h}\right)\\ +\left(\dfrac{a^2_{k+1}+a^2_k}{2} - \dfrac{a^3_{k+1}+a^3_k}{2}\right)\left(\dfrac{a^4_{k+1}-a^{24}_k}{h}\right)\\ -\left[\begin{array}{l}-3\left(\dfrac{a^1_{k+1}+a^1_k}{2}\right)^2 + 2\left(\dfrac{a^3_{k+1}+a^3_k}{2}\right)^2\\ -\left(\dfrac{a^4_{k+1}+a^4_k}{2}\right)^2 + 2\left(\dfrac{a^1_{k+1}+a^1_k}{2}\right)\left(\dfrac{a^4_{k+1}+a^4_k}{2}\right)\end{array}\right]\end{array}\right] \quad (13)$$

将其代入离散 Birkhoff 方程(9)就可以得到离散 Birkhoff 积分子,从而可以数值计算求解出 Whittaker 方程的数值解,从而得出系统随时间演化的曲线.

图 1 和图 2 分别表示计算所得的 x 和 y 的相对误差,实线表示在 Birkhoff 框架下采用本文方法算得的结果,而点线表示在原方程框架下采用 2 阶 R-K 方法算得的结果,从图中可以看出,虽然两种框架下算得的结果的相对误差都随时间的增加而发散,但在 Birkhoff 框架下采用离散变分方法算得的 x 和 y 相对精确解的误差要远远小于在原方程框架下采用 R-K 法算得的结果,且发散的较慢,这充分说明在 Birkhoff 框架下采用离散变分方法计算这类问题相比较而言具有较好的稳定性,能够得到相对真实的结果.

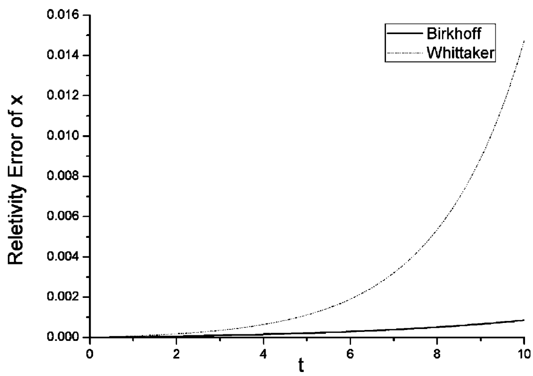

图 1 x 的相对误差

Fig. 1 Relativity error of x

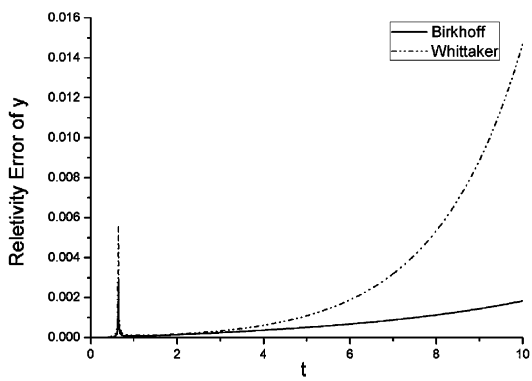

图 2 y 的相对误差

Fig. 2 Relativity error of y

4 结论

通过对 Whittaker 方程的数值研究,说明在求解这类不能表示成 Lagrange 方程或 Hamilton 方程的非 Hamilton 系统的数值解时,为了得到更好的数值结果,可以将该系统的运动方程转化为具有自伴随特性的 Birkhoff 方程的形式,从而在 Birkhoff 框架下研究非 Hamilton 系统的数值积分问题,以得到更加可靠、精确的数值结果.

参 考 文 献

1 冯康,秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法. 杭州:浙江科学技术出版社,2003 (Feng K, Qin M Z. Symplectic geometric algorithms for Hamiltonian systems. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2003 (in Chinese))

2 Hairer E, Lubich C, Wanner G. Geometric numerical integration structure-preserving algorithms for ordinary differential equations. Berlin: Springer, 2002

3 高强,钟万勰. Hamilton 系统的保辛守恒积分算法. 动力学与控制学报,2009,7(3):193 ~ 199 (Gao Q, Zhong W X. The Symplectic and energy preserving method for the integration of Hamilton system. *Journal of Dynamics and Control*, 2009,7(3):193 ~ 199 (in Chinese))

4 刘畅,宋端,刘世兴,郭永新. 非齐次 Hamilton 系统的 Birkhoff 表示. 中国科学:物理学、力学、天文学, 2013,43(3):541 ~ 548 (Liu C, Song D, Liu S X, Guo Y X. Birkhoffian representation of non-homogenous Hamiltonian systems. *Scientia Sinica Physica, Mechanica and Astronomica*, 2013, 43(3):541 ~ 548 (in Chinese))

5 梅凤翔. 关于 Whittaker 方程和 Hojman-Urrutia 方程. 力学与实践, 2012, 34:62 ~ 63 (Mei F X. About Whittaker equation and Hojman-Urrutia equation. *Mechanics in Engineering*, 2012, 34:62 ~ 63 (in Chinese))

6 梅凤翔,史荣昌,张永发,吴惠彬. Birkhoff 系统动力学. 北京:北京理工大学出版,1996 (Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B. Dynamics of Birkhoff systems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996 (in Chinese))

7 Liu S X, Liu C, Guo Y X. Geometric formulations and variational integrators of discrete autonomous Birkhoff systems. *Chinese Physics B*, 2011, 20(3):034501

8 宋端,刘世兴. Birkhoff 意义下 Hojman-Urrutia 方程的离散变分计算. 动力学与控制学报,2013,11(3):199 ~ 201 (Song D, Liu S X. Discrete variational calculation of Hojman-Urrutia equation in the Birkhoffian sense. *Journal of Dynamics and Control*, 2013,11(3): 199 ~ 201 (in Chinese))

9 Liu S X, Hua W, Guo Y X. Research on the discrete variational method for a Birkhoffian system. *Chinese Physics B*, 2014, 23(6): 064501

10 刘世兴,刘畅,郭永新. Birkhoff 意义下 Henon-Heiles 方程的离散变分计算. 物理学报,2011,60(6):060000 (Liu S X, Liu C, Guo Y X. Discrete variational calculation of Henon-Heiles equation in the Birkhoffian sense. *Acta Physica Sinica*, 2011,60(6):060000(in Chinese))

11 Marsden J E, West M. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, 2001:357 ~ 514

DISCRETE VARIATIONAL CALCULATION OF WHITTAKER EQUATION IN THE BIRKHOFFIAN FRAMEWORK *

Liu Shixing† Li Na Liu Chang

(*College of Physics*, *Liaoning University*, *Shenyang* 110036, *China*)

Abstract In this paper, the numerical algorithms of Whittaker equation, which is a non-Hamiltonian system, are researched by using the discrete variational method in the framework of Birkhoffian. Compared with Runge-Kutta method, the numerical results show that the more reliable and accurate numerical results are obtained when the non-Hamilton systems without simple symplectic structure are studied in the Birkhoffian framework.

Key words Whittaker equation, Birkhoff equations, discrete variational methods

Received 15 December 2014, revised 31 December 2014.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11472124, 11202090, 11172120 and 11301350), the Dr. Start – up fund in liaoning province(20141050) andthe General science and technologyResearch Plans of Liaoning Educational Bureau(L2013005)

†Corresponding author E-mail: liushixing@ lnu. edu. cn