第 13 卷第 4 期 2015 年 8 月
1672-6553/2015/13(4)/241-5
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 13 No. 4
Aug. 2015

一种新的改进精细直接积分法*

张继锋[1] 邓子辰[1,2†] 徐方暖[1] 张凯[1]

(1. 西北工业大学力学与土木建筑学院, 西安 710072)

(2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘要 针对结构动力方程转化为状态空间方程后矩阵维数增加而导致计算量增大的问题,考虑状态空间方程中所含外部荷载的特点,提出了一种新的改进精细直接积分法. 给出了利用梯形公式、复化梯形公式、辛普生公式、复化辛普生公式、科特斯公式、高斯公式计算杜哈姆积分时的计算格式,分析了不同计算格式下的计算精度和计算效率. 数值算例表明本文改进方法的正确性.

关键词 结构动力方程, 直接积分, 分块计算, 精细积分, 改进方法

DOI: 10.6052/1672-6553-2015-028

引言

结构动力方程广泛应用于航空、航天、航海等多个领域,其求解一直备受关注. 由钟万勰提出的精细积分法[1-2],为结构动力方程的求解提供了一种高精度方法,并在各个领域得到了广泛应用[3-5]. 由于矩阵求逆有计算量大和稳定性差的缺点,为了避免矩阵求逆,张森文等[5]利用辛普生积分公式计算杜哈姆积分,提出了状态方程直接积分法. 储德文等[6]进一步讨论了积分方法的选择,指出科特斯积分和高斯积分是精度的较高,是较好的积分方法. 后来一些学者尝试用不同的数值积分方法来求解杜哈姆积分[7-9],取得了比较好的结果. 由于结构动力方程转化为状态空间方程后矩阵维数增加,并且数值积分都是利用插值方法,因而存在插值点过多导致计算量增大的问题,计算时间较长,效率需要提高. 为了提高计算效率,有很多学者做了许多非常有益工作[10-12].

本文在文献[10]的基础上,针对结构动力方程转化为状态空间方程后矩阵维数增加而导致计算量增大的问题,考虑状态空间方程中所含外部荷载的特点,提出一种新的改进精细直接积分法. 给出利用梯形公式、复化梯形公式、辛普生公式、复化辛普生公式、科特斯公式、高斯公式计算杜哈姆积分时的计算格式,同时分析不同计算格式下的计算精度和计算效率.

1 精细直接积分法的简化计算

1.1 精细直接积分法

采用集中质量法或有限元法进行动力学分析时,有如下所示的结构动力方程:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{I}\ddot{u}_g \tag{1}$$

其中初始值 $\boldsymbol{x}(0)$, $\dot{\boldsymbol{x}}(0)$ 给定, $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ ($\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$) 分别为质量矩阵,阻尼矩阵和刚度矩阵, $I\ddot{u}_g$ 为外部荷载列向量. 引入状态变量 $X = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$, 可以把(1)转化为状态空间方程:

$$\dot{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{F}(t) = 0 \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{F}(t)$ 分别为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -I\ddot{u}_g \end{bmatrix}_{2n\times 1}$$

利用常微分方程理论,对式(2)的非齐次方程求解可以采用如下迭代格式:

$$X_{k+1} = \exp(A\Delta t)X_k + \int_0^{\Delta t} \exp[A(\Delta t - \xi)]F(t_k + \xi)d\xi \tag{3}$$

直接积分法一般是对式(3)的杜哈姆项数值积分,其间出现的 $\exp(A\Delta t)$ 可用精细计算[2]得到.

2015-01-13 收到第 1 稿, 2015-04-21 收到修改稿.

* 国家自然科学基金重点项目(11432010)、国家基础研究 973 项目(2011CB610300)、111 引智计划项目(B07050)、高校博士点基金(20126102110023)及西北工业大学基础研究基金(310201401JCQ01001)资助

† 通讯作者 E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn

1.2 精细直接积分法简化计算[10]

式(3)的计算过程中将会出现如下矩阵运算:

$$D = T_{2n\times 2n}\times F_{2n\times 1} \tag{4}$$

对 T 和 $F(t)$ 进行如下分块:

$$T_{2n\times 2n} = [\,T^{(1)}_{2n\times n} \quad T^{(2)}_{2n\times n}\,] \quad F_{2n\times 1} = \begin{bmatrix} F^{(1)}_{n\times 1} \\ F^{(2)}_{n\times 1}\end{bmatrix} \tag{5}$$

考虑上式中的 $F^{(1)}_{n\times 1}$ 是 0,这样可以得到:

$$D = T_{2n\times 2n}\times F_{2n\times 1} = T^{(2)}_{2n\times n}\times F^{(2)}_{n\times 1} \tag{6}$$

下面通过式(6)进行简化计算:

(1)当用梯形公式对杜哈姆项进行计算时,可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)d\xi = \frac{\Delta t}{2}(T^{(2)}\times F^{(2)}(t_k)+F(t_{k+1})) \tag{7}$$

(2)当用复化梯形公式对杜哈姆项进行计算时,将 Δt 分为 n 等份,子区间长度为 $h=\dfrac{b-a}{n}$,可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)d\xi = \frac{h}{2}(T^{(2)}\times F^{(2)}(t_k)+2\sum_{i=1}^{n-1}T^{(2)}_{ih}\times F^{(2)}(t_k+ih)+F(t_{k+1})) \tag{8}$$

(3)当用辛普生公式对杜哈姆项进行计算时,可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)d\xi = \frac{\Delta t}{6}(T^{(2)}\times F^{(2)}(t_k)+4T^{(2)}_{\frac{\Delta t}{2}}\times F^{(2)}(t_k+\frac{\Delta t}{2})+F(t_{k+1})) \tag{9}$$

(4)当用复化辛普生公式对杜哈姆项进行计算时,将 Δt 分为 n 等份,子区间长度为 $h=\dfrac{b-a}{n}$,可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)d\xi = \frac{h}{3}(T^{(2)}\times F^{(2)}(t_k)+4\sum_{i=0}^{n-1}T^{(2)}_{ih+\frac{h}{2}}\times F^{(2)}(t_k+ih+\frac{h}{2})+2\sum_{i=0}^{n-1}T^{(2)}_{ih}\times F^{(2)}(t_k+ih)+F(t_{k+1})) \tag{10}$$

(5)当用科特斯公式对杜哈姆项进行计算时,可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)d\xi = \frac{\Delta t}{90}(7T^{(2)}\times F^{(2)}(t_k)+32T^{(2)}_{\frac{3\Delta t}{4}}\times F^{(2)}(t_k+\frac{\Delta t}{4})+12T^{(2)}_{\frac{\Delta t}{2}}\times F^{(2)}(t_k+\frac{\Delta t}{2})+32T^{(2)}_{\frac{\Delta t}{4}}\times F^{(2)}(t_k+\frac{3\Delta t}{4})+7F(t_{k+1})) \tag{11}$$

(6)当用高斯积分公式对杜哈姆项进行计算时,可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)d\xi = \int_0^{\Delta t}T_{\frac{\Delta t}{2}(1-y)}\times F(t_k+\frac{\Delta t}{2}(1-y))\times\frac{\Delta t}{2}dy = \sum_{i=1}^{n}w_i\times T^{(2)}_{\frac{\Delta t}{2}(1-y_i)}\times F^{(2)}(t_k+\frac{\Delta t}{2}(1-y_i))\times\frac{\Delta t}{2} \tag{12}$$

当 $n=3$ 时上式中的参数为:$w_1=8/9$,$y_1=0$,$w_2=5/9$,$y_2=-\sqrt{0.6}$,$w_3=5/9$,$y_3=\sqrt{0.6}$.

2 改进精细直接积分法

2.1 改进精细直接积分法及计算格式

一般进行动力学分析时不一定每个质点上都作用有外荷载,所以外荷载可能出现有零项,因而可以通过对矩阵分块,去掉对应的零项,将外荷载是零的部分行不参加矩阵运算.

在矩阵运算以前将外荷载是零的行对应的部分重新分块,根据外荷载有零的特点,假设外荷载不为零的部分为 m 行,可以在式(6)的基础上继续分块如下:

$$T_{2n\times 2n} = [\,T^{(1)}_{2n\times n} \quad T^{(2)}_{2n\times(n-m)} \quad T^{(3)}_{2n\times m}\,]$$
$$F_{2n\times 1} = \begin{bmatrix} F^{(1)}_{n\times 1} \\ F^{(2)}_{(n-m)\times 1} \\ F^{(3)}_{m\times 1}\end{bmatrix} \tag{13}$$

去掉零项对应的部分,则相应的式(6)可以改写为:

$$D = T_{2n\times 2n}\times F_{2n\times 1} = T^{(3)}_{2n\times m}\times F^{(3)}_{m\times 1} \tag{14}$$

下面分别给出梯形公式、复化梯形公式、辛普生公式、复化辛普生公式、科特斯公式、高斯公式计算时的改进计算格式,这些计算格式都是以式(13)和式(14)为基础进行计算,可以不同程度的提高计算效率.

(1)当用梯形公式对杜哈姆项进行计算时,利用式(14)分块计算可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)d\xi = \frac{\Delta t}{2}(T^{(3)}\times F^{(3)}(t_k)+F(t_{k+1})) \tag{15}$$

(2)当用复化梯形公式对杜哈姆项进行计算

时,利用式(14)分块计算可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)d\xi=\frac{h}{2}(T^{(3)}\times F^{(3)}(t_k)+2\sum_{i=1}^{n-1}T_{ih}^{(3)}\times F^{(3)}(t_k+ih)+F(t_{k+1}))\quad(16)$$

(3)当用辛普生公式对杜哈姆项进行计算时,利用式(14)分块计算可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)d\xi=\frac{\Delta t}{6}(T^{(3)}\times F^{(3)}(t_k)+4T_{\frac{\Delta t}{2}}^{(3)}\times F^{(3)}(t_k+\frac{\Delta t}{2})+F(t_{k+1}))\quad(17)$$

(4)当用复化辛普生公式对杜哈姆项进行计算时,将 Δt 分为 n 等份,子区间长度为 $h=\frac{b-a}{n}$,利用式(14)分块计算可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)d\xi=\frac{h}{3}(T^{(3)}\times F^{(3)}(t_k)+4\sum_{i=0}^{n-1}T_{ih+\frac{h}{2}}^{(3)}\times F^{(3)}(t_k+ih+\frac{h}{2})+2\sum_{i=0}^{n-1}T_{ih}^{(3)}\times F^{(3)}(t_k+ih)+F(t_{k+1}))\quad(18)$$

(5)当用科特斯公式对杜哈姆项进行计算时,利用式(14)分块计算可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)d\xi=\frac{\Delta t}{90}(7T^{(3)}\times F^{(3)}(t_k)+32T_{\frac{3\Delta t}{4}}^{(3)}\times F^{(3)}(t_k+\frac{\Delta t}{4})+12T_{\frac{\Delta t}{2}}^{(3)}\times F^{(3)}(t_k+\frac{\Delta t}{2})+32T_{\frac{\Delta t}{4}}^{(3)}\times F^{(3)}(t_k+\frac{3\Delta t}{4})+7F(t_{k+1}))\quad(19)$$

(6)当用高斯积分公式对杜哈姆项进行计算时,利用式(14)分块计算可得:

$$\int_0^{\Delta t}\exp[A(\Delta t-\xi)]F(t_k+\xi)d\xi=\int_0^{\Delta t}T_{\frac{\Delta t}{2}(1-y)}\times F(t_k+\frac{\Delta t}{2}(1-y))\times\frac{\Delta t}{2}dy=\sum_{i=1}^{n}w_i\times T_{\frac{\Delta t}{2}(1-y_i)}^{(3)}\times F^{(3)}(t_k+\frac{\Delta t}{2}(1-y_i))\times\frac{\Delta t}{2}\quad(20)$$

当 $n=3$ 时上式中的参数为:$w_1=8/9,y_1=0$,$w_2=5/9,y_2=-\sqrt{0.6},w_3=5/9,y_3=\sqrt{0.6}$.

2.2　改进算法精度分析

对于计算精度来讲,对比计算式(6)和(14)可以发现二者的差别在于对矩阵分块后去掉了零项,因此式(15)~式(20)的改进过程中不会有计算精度的变化,所以改进方法仍能保持原有算法的精度.

2.3　改进算法效率分析

通过式(14)的改进可以将 $2n\times n$ 次乘法变为 $2n\times m$ 次乘法. 本改进方法节约的时间会随着 m 的变化而变化,其极限情况就是外荷载只有一行不为零,只有一行参加计算,即最大能将矩阵与矩阵的相乘变为矩阵和数字相乘,计算效率可以提高.

只考虑矩阵乘法计算,定量分析一个迭代步内的各计算格式下的计算效率,以下分别给出各计算格式减少时间的预估公式:

(1)梯形公式对杜哈姆项进行计算

式(7)一个迭代步内乘法计算量为:

$$2n\times 2n+2n\times n+2n\quad(21)$$

利用式(15)改进后一个迭代步内乘法计算量为:

$$2n\times 2n+2n\times m+2n\quad(22)$$

改进后和改进前二者比值为:

$$\frac{2n\times 2n+2n\times m+2n}{2n\times 2n+2n\times n+2n}=\frac{2n+m+1}{3n+1}\quad(23)$$

上式中 m 的范围为 $1\sim n$,故改进方法最多可节约大约 33% 的时间.

(2)辛普生公式对杜哈姆项进行计算

式(9)一个迭代步内乘法计算量为:

$$2n\times 2n+2n\times n+2n\times n+2n+2n\quad(24)$$

利用式(17)改进后一个迭代步内乘法计算量为:

$$2n\times 2n+2n\times m+2n\times m+2n+2n\quad(25)$$

改进后和改进前二者比值为:

$$\frac{2n\times 2n+2n\times m+2n\times m+2n+2n}{2n\times 2n+2n\times n+2n\times n+2n+2n}=\frac{n+m+1}{2n+1}\quad(26)$$

上式中 m 的范围为 $1\sim n$,故改进方法最多可节约大约 50% 的时间.

(3)科特斯公式对杜哈姆项进行计算

式(11)一个迭代步内乘法计算量为:

$$2n\times 2n+4\times(2n\times n)+4\times 2n+n+2n\quad(27)$$

利用式(19)改进后一个迭代步内乘法计算量为:

$$2n\times 2n+4\times(2n\times m)+4\times 2n+m+2n\quad(28)$$

改进后和改进前二者比值为:

$$\frac{2n\times 2n+4\times(2n\times m)+4\times 2n+m+2n}{2n\times 2n+4\times(2n\times n)+4\times 2n+n+2n}=$$

$$\frac{4n^2+8mn+10n+m}{12n^2+11n} \leqslant \frac{4n+8m+11}{12n+11} \tag{29}$$

上式中 m 的范围为 $1 \sim n$,故改进方法最多可节约大约 67% 的时间.

(4)高斯积分公式对杜哈姆项进行计算

式(12)一个迭代步内乘法计算量为:

$$2n \times 2n + 3 \times (2n \times n) + 2n \tag{30}$$

利用式(20)改进后一个迭代步内乘法计算量为:

$$2n \times 2n + 3 \times (2n \times m) + 2n \tag{31}$$

改进后和改进前二者比值为:

$$\frac{2n \times 2n + 3 \times (2n \times m) + 2n}{2n \times 2n + 3 \times (2n \times n) + 2n} = \frac{4n+6m+2}{10n+2} \tag{32}$$

上式中 m 的范围为 $1 \sim n$,故改进方法最多可节约大约 60% 的时间.

3 算例分析

文献[10]已经说明了改进方法保持了计算原有算法的计算精度,为了验证本文改进方法的计算效率,选取如下结构动力方程:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t)$$

其中:

$$M = \begin{bmatrix} 100 & & & & \\ & 100 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 100 & \\ & & & & 100 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$C = 0$$

$$K = \begin{bmatrix} 2k & -k & & & \\ -k & 2k & -k & & \\ & & \ddots & & \\ & & -k & 2k & -k \\ & & & -k & 2k \end{bmatrix}_{n \times n}$$

荷载列向量:

$$f(t) = \begin{bmatrix} 100 & & & & \\ & 100 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 100 & \\ & & & & 100 \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cos(\pi t) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$k = 10^5$,初始条件为:$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.

取 $n = 1000$,在相同步长情况下,利用本文方法和文献[10]方法对算例进行了计算,计算十次平均所需时间的比较结果列于表 1.

表 1 数值计算效率的比较(单位:秒)

Table 1 Comparison of numerical calculation efficiency (unit: second)

	the time of iterating 1000 steps
simplified Trapezium formula[10]	3.42
improved Trapezium formula	2.33
simplified Simpson formula[10]	4.67
improved Simpson formula	2.38
simplified Cotes formula[10]	6.97
improved Cotes formula	2.38
simplified Gauss formula[10]	5.85
improved Gauss formula	2.38

从表 1 可得本文方法提高了计算效率,针对本算例,改进梯形公式可以节约大约 32% 的时间,改进辛普生公式可以节约大约 49% 的时间,改进科特斯公式可以节约大约 66% 的时间,改进高斯公式可以节约大约 59% 的时间. 算例计算和前文的时间预估公式保持一致,也证明了时间预估公式的有效性.

4 结论

本文考虑状态空间方程外荷载的特点,提出了一种新的改进精细直接积分法. 推导了利用梯形公式、复化梯形公式、辛普生公式、复化辛普生公式、科特斯公式、高斯公式计算杜哈姆积分时的计算格式,给出了改进梯形公式、改进辛普生公式、改进科特斯公式、改进高斯公式的节约时间公式,证明了改进梯形公式最大可以节约 33% 的时间,改进辛普生公式最大可以节约 50% 的时间,改进科特斯公式最大可以节约 67% 的时间,改进高斯公式最大可以节约 60% 的时间. 数值算例表明本文改进方法提高了计算效率.

参 考 文 献

1 Zhong W X, Williams. A precise time step integration method. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1994, 208:427 ~ 430

2 钟万勰. 应用力学的辛数学方法. 北京:高等教育出版社,2006 (Zhong W X. Symplectic solution methodology in applied mechanics. Beijing: Higher Education Press,2006 (in Chinese))

3 钟万勰,林家浩,高强. 分层介质中非平稳随机波的精细求解. 动力学与控制学报,2003,1(1):1 ~ 8 (Zhong W X, Lin J H, Gao Q. Precise computation of non-stationary random waves in stratified materials. *Journal of*

Dynamics and Control,2013,1(1):1 ~8 (in Chinese))

4 朱宝,钟万勰. 半解析高阶有限谱元法及其在波导介质层 PBG 结构滤波器优化设计中的应用. 动力学与控制学报,2014,12(4):289 ~294 (Zhu B, Zhong W X. High order semi-analytical spectral element method and its application in optimal design of PBG structure in waveguide filter. *Journal of Dynamics and Control*, 2014,12(4):289 ~294 (in Chinese))

5 张森文,曹开彬. 计算结构动力响应的状态方程直接积分法. 计算力学学报,2000,17(1):94 ~97 (Zhang S W, Cao K B. Direct integration of state equation method for dynamic response of structure. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2000,17(1):94 ~97 (in Chinese))

6 储德文,王元丰. 精细直接积分法的积分方法选择. 工程力学,2002,19(6):115 ~119 (Chu D W, Wang Y F. Integration formula selection for precise direct integration method. *Engineering Mechanics*, 2002, 19 (6): 115 ~ 119 (in Chinese))

7 Wang M F, Zhou X Y. Modified precise time step integration method of structural dynamic analysis. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2005,4(2):287 ~293

8 高小科,邓子辰,黄永安. 基于三次样条插值的精细积分法. 振动与冲击,2007,26(9):75 ~77 (Gao X K, Deng Z C, Huang Y A. A high precise direct integration base on cubic spline interpolation. *Journal of Vibration and Shock*,2007,26(9):75 ~77 (in Chinese))

9 富明慧,廖子菊,刘祚秋. 结构动力方程的样条精细积分法. 计算力学学报,2009,26(3):379 ~384 (Fu M H, Liao Z J, Liu Z Q. Spline precise time-integration of structural dyanmic analysis. *Journal of Computational Mechanics*,2009,26(3):379 ~384 (in Chinese))

10 张继锋,邓子辰,胡伟鹏. 结构动力方程精细直接积分的简化计算. 动力学与控制学报,2008,6(2):107 ~111 (Zhang J F, Deng Z C, Hu W P. Simplified computation of precise immediate integration method for structure dynamic equation. *Journal of Dynamics and Control*,2008,6(2):107 ~111 (in Chinese))

11 徐建新,郭巧荣,卿光辉. 可分型指数矩阵的快速精细积分法. 动力学与控制学报,2010,8(1):24 ~28 (Xu J X, Guo Q R, Qing G H. A fast precise integration method for the separable exponential matrix. *Journal of Dynamics and Control*,2010,8(2):24 ~28 (in Chinese))

12 高强,吴锋,张洪武,林家浩,钟万勰. 大规模动力系统改进的快速精细积分方法. 计算力学学报,2011,28(4):493 ~498 (Gao Q, Wu F, Zhang H W, Lin J H, Zhong W X. A fast precise integration method for large-scale dynamic structures. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2011,28(4):493 ~498(in Chinese))

ANEW IMPROVED PRECISE DIRECT INTEGRATION METHOD *

Zhang Jifeng[1] Deng Zichen[1,2†] Xu Fangnuan[1] Zhang Kai[1]

(1. *School of Mechanics, Civil Engineering & Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, *China*)

(2. *State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian* 116023, *China*)

Abstract Considering the characteristics of non-homogeneous external loadings in the state space formula conversed from structural dynamic equation, a new improved direct precise integration method is presented in this paper. Meanwhile, different improved formats for Duhamel integration are proposed based on the Trapezium formula、compound Trapezium formula、Simpson formula、compound Simpson formula、Cotes formula and Gauss formula. The precision and the efficiency of the calculation are examined under the different formats. The results of the case study show the validity of the improved method.

Key words structural dynamic equation, direct integration, partitioning calculation, precise integration, improved method

Received 13 January 2015, revised 21 April 2015.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11432010), the National Basic Research Program of China (2011CB610300), the Programme of Introducing Talents of Discipline to Universities(B07050), the Doctoral Program Foundation of Education Ministry of China(20126102110023) and the Fundamental Research Foundation of Northwestern Polytechnical University(310201401JCQ01001)

† Corresponding author E-mail: dweifan@ nwpu. edu. cn