第 13 卷第 3 期 2015 年 6 月
1672-6553/2015/13(3)/165-5

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 13 No. 3
Jun. 2015

# 两自由度微扰力学系统的二阶近似守恒量*

楼智美†
（绍兴文理学院物理系，绍兴　312000）

**摘要**　把微扰力学系统视为未受微扰系统与微扰项的迭加，并选择合适的方法求得未受微扰系统的精确守恒量 $I_0$. 从近似守恒量的性质出发，建立守恒量的一阶微扰项系数 $I_1$ 与精确守恒量 $I_0$、守恒量的二阶微扰项系数 $I_2$ 与守恒量的一阶微扰项系数 $I_1$ 及精确守恒量 $I_0$ 的递推关系. 考虑微扰项对精确守恒量以及对守恒量的一阶微扰项系数的影响，利用递推关系并直接积分求得二阶近似守恒量. 文中用此方法研究了一微扰力学系统的二阶近似守恒量，并得到 2 个稳定的二阶近似守恒量.

**关键词**　两自由度微扰力学系统，　精确守恒量，　递推关系，　直接积分，　二阶近似守恒量

DOI：　10.6052/1672-6553-2014-067

## 引言

为研究方便，在建立力学系统模型时常常会忽略一些次要因素或把某些条件理想化，使建立的力学系统与实际的力学系统存在一定的差异，从而导致其研究成果不能直接应用于实际的力学系统. 若重新考虑在建立力学模型时忽略的某些次要因素或考虑某些实际的条件，则描述力学系统的运动微分方程中就会出现微扰项，存在微扰项的力学系统叫微扰力学系统. 微扰力学系统更接近实际的力学系统，其研究成果更适合推广应用. 微扰力学系统近似守恒量的研究对于研究力学系统的特性至关重要. 近年来关于微分方程近似守恒量的研究已取得不少成果[1-15]，目前研究近似守恒量主要采用近似 Lie 对称性理论[1]和近似 Noether 对称性理论[2]，引进近似的群无限小变换，微分方程在此变换下近似保持不变则为近似 Lie 对称性；哈密顿作用量在此变换下近似保持不变则为近似 Noether 对称性，所得的守恒量为近似守恒量. 用近似对称性理论求近似守恒量要用到 Lagrange 函数和近似的群无限小变换，并需解出近似的无限小生成元、规范函数，计算较繁复，尤其对计算多自由度二阶及以上阶近似守恒量带来了困难. 另外，用近似对称性理论求近似守恒量时，无法明确表达高阶近似守恒量与低阶近似守恒量、一阶近似守恒量与精确守恒量间的递推关系，给理论的推广应用带来了不便.

本文研究微扰力学系统的二阶近似守恒量，把微扰力学系统视为未受微扰系统与微扰项的迭加，先选择合适的方法求得未受微扰系统的精确守恒量 $I_0$[16,17]，再从近似守恒量的性质出发，得到守恒量的一阶微扰项系数 $I_1$ 与精确守恒量 $I_0$、守恒量的二阶微扰项系数 $I_2$ 与守恒量的一阶微扰项系数 $I_1$ 和精确守恒量 $I_0$ 的递推关系，并考虑微扰项对精确守恒量以及对守恒量的一阶微扰项系数的影响，利用递推关系并直接积分求得二阶近似守恒量. 文中用此方法研究了一微扰力学系统的二阶近似守恒量并得到了 2 个稳定的二阶近似守恒量.

## 1　求两自由度微扰力学系统二阶近似守恒量的基本理论

两自由度微扰力学系统的运动微分方程一般可表示成

$$\ddot{x}_1 = g_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \varepsilon) = g_1(\varepsilon^0) + \varepsilon g_1(\varepsilon^1) + \varepsilon^2 g_1(\varepsilon^2) \tag{1a}$$

$$\ddot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \varepsilon) = g_2(\varepsilon^0) + \varepsilon g_2(\varepsilon^1) + \varepsilon^2 g_2(\varepsilon^2) \tag{1b}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$，$g_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \varepsilon)$，$g_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2,$

2014-09-21 收到第 1 稿，2014-10-18 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(11472177)
† 通讯作者 E-mail：louzhimei@usx.edu.cn

$\varepsilon$)为广义加速度,可表示成未受微扰作用时的广义加速度 $g_1(\varepsilon^0)$,$g_2(\varepsilon^0)$ 和因微扰作用产生的一阶微扰项 $\varepsilon g_1(\varepsilon^1)$、$\varepsilon g_2(\varepsilon^1)$ 及二阶微扰项 $\varepsilon^2 g_1(\varepsilon^2)$、$\varepsilon^2 g_2(\varepsilon^2)$ 之和,$g_1(\varepsilon^1)$,$g_2(\varepsilon^1)$,$g_1(\varepsilon^2)$,$g_2(\varepsilon^2)$ 分别表示一阶、二阶微扰项的系数(下文表示类同). 与系统(1)相应的未受微扰作用系统的运动微分方程可表示成

$$\ddot{x}_1 = g_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = g_1(\varepsilon^0) \tag{2a}$$

$$\ddot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = g_2(\varepsilon^0) \tag{2b}$$

系统(1)可视为系统(2)与一阶微扰项 $\varepsilon g_1(\varepsilon^1)$、$\varepsilon g_2(\varepsilon^1)$ 及二阶微扰项 $\varepsilon^2 g_1(\varepsilon^2)$、$\varepsilon^2 g_2(\varepsilon^2)$ 的迭加.

二阶近似守恒量可表示成

$$I = I_0 + \varepsilon I_1 + \varepsilon^2 I_2 \tag{3}$$

式(3)中的 $I_1$、$I_2$ 分别称为守恒量的一阶微扰项系数和二阶微扰项系数,若 $I_0$ 不为 0,$I_1$、$I_2$ 均为 0,则称 $I = I_0$ 为精确守恒量;若 $I_0$、$I_1$ 不为 0,$I_2$ 为 0,则称 $I$ 为稳定的一阶近似守恒量;若 $I_0$、$I_2$ 不为 0,则称 $I$ 为稳定的二阶近似守恒量;若 $I_0$、$I_2$ 为 0,$I_1$ 不为 0,则称 $I$ 为平凡的一阶近似守恒量;若 $I_0$ 为 0,$I_2$ 不为 0,则称 $I$ 为平凡的二阶近似守恒量.

二阶近似守恒量的性质为

$$\frac{dI}{dt} = O(\varepsilon^3) \tag{4}$$

将(3)式代入(4)式并展开,令 $\varepsilon^0$,$\varepsilon^1$,$\varepsilon^2$ 的系数分别等于 0,忽略 $\varepsilon^3$ 及以上项,可得守恒量的一阶微扰项系数 $I_1$ 与精确守恒量 $I_0$,二阶微扰项系数 $I_2$ 与一阶微扰项系数 $I_1$ 及精确守恒量 $I_0$ 的递推关系

$$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^0) = 0 \tag{5a}$$

$$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^1) + \frac{dI_1}{dt}(\varepsilon^0) = 0 \tag{5b}$$

$$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^2) + \frac{dI_1}{dt}(\varepsilon^1) + \frac{dI_2}{dt}(\varepsilon^0) = 0 \tag{5c}$$

从系统(2)求得的精确守恒量 $I_0$ 一定满足(5$a$)式,将$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^1)$代入(5$b$)式可得$\frac{dI_1}{dt}(\varepsilon^0)$,同时考虑 $g_1(\varepsilon^0)$,$g_2(\varepsilon^0)$ 的形式可求得 $I_1$. 由 $I_1$ 及 $\varepsilon g_1(\varepsilon^1)$、$\varepsilon g_2(\varepsilon^1)$ 可求得$\frac{dI_1}{dt}(\varepsilon^1)$,将$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^2)$、$\frac{dI_1}{dt}(\varepsilon^1)$代入(5$c$)式,并同时考虑 $g_1(\varepsilon^0)$,$g_2(\varepsilon^0)$ 的形式可求得 $I_2$.

综上所述,二阶近似守恒量(3)中的第一部分 $I_0$ 的形式是由未受微扰系统(2)决定的,而守恒量的一阶微扰项系数 $I_1$ 的形式是由未受微扰系统和一阶微扰项 $\varepsilon g_1(\varepsilon^1)$、$\varepsilon g_2(\varepsilon^1)$ 共同决定的,一阶微扰项 $\varepsilon g_1(\varepsilon^1)$、$\varepsilon g_2(\varepsilon^1)$ 对精确守恒量 $I_0$ 产生影响,此影响体现在$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^1)$中,而由$\frac{dI_1}{dt}(\varepsilon^0)$确定 $I_1$ 时又要考虑未受微扰项 $g_1(\varepsilon^0)$,$g_2(\varepsilon^0)$ 的形式,从而实现 $g_1(\varepsilon^0)$,$g_2(\varepsilon^0)$ 项对 $I_1$ 的影响. 类似地,守恒量的二阶微扰项系数 $I_2$ 的形式是由未受微扰系统和微扰项 $\varepsilon g_1(\varepsilon^1)$、$\varepsilon g_2(\varepsilon^1)$、$\varepsilon^2 g_1(\varepsilon^2)$、$\varepsilon^2 g_2(\varepsilon^2)$ 共同决定的,二阶微扰项 $\varepsilon^2 g_1(\varepsilon^2)$、$\varepsilon^2 g_2(\varepsilon^2)$ 会对$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^2)$产生影响,一阶微扰项 $\varepsilon g_1(\varepsilon^1)$、$\varepsilon g_2(\varepsilon^1)$ 会对$\frac{dI_1}{dt}(\varepsilon^1)$产生影响,而由$\frac{dI_2}{dt}(\varepsilon^0)$确定 $I_2$ 时又要考虑未受微扰项 $g_1(\varepsilon^0)$,$g_2(\varepsilon^0)$ 的形式,实现 $g_1(\varepsilon^0)$、$g_2(\varepsilon^0)$ 项对 $I_2$ 的影响.

因此,求系统(1)的二阶近似守恒量的步骤可归结如下:首先,分解微扰力学系统并求得精确守恒量,即将系统(1)分解成未受微扰系统(2)和微扰项,并根据系统(2)的形式选择一种合适的方法求得其精确守恒量 $I_0$,由此求得的守恒量中不含微扰项. 其次,建立守恒量的高阶微扰项系数与低阶微扰项系数及精确守恒量之间的递推关系,即根据二阶近似守恒量的性质,建立守恒量的一阶微扰项系数 $I_1$ 与精确守恒量 $I_0$、二阶微扰项系数 $I_2$ 与一阶微扰项系数 $I_1$ 和精确守恒量 $I_0$ 的递推关系. 第三,考虑微扰项的影响,利用递推关系直接积分求得守恒量的一阶、二阶微扰项系数,即考虑微扰项 $\varepsilon g_1(\varepsilon^1)$、$\varepsilon g_2(\varepsilon^1)$、$\varepsilon^2 g_1(\varepsilon^2)$、$\varepsilon^2 g_2(\varepsilon^2)$ 对精确守恒量 $I_0$ 的影响,计算$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^1)$、$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^2)$,将$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^1)$代入(5$b$)式并同时考虑 $g_1(\varepsilon^0)$、$g_2(\varepsilon^0)$ 的形式求得 $I_1$;考虑微扰项 $\varepsilon g_1(\varepsilon^1)$、$\varepsilon g_2(\varepsilon^1)$ 对守恒量的一阶微扰项系数 $I_1$ 的影响,计算$\frac{dI_1}{dt}(\varepsilon^1)$,将$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^2)$和$\frac{dI_1}{dt}(\varepsilon^1)$代入(5$c$)式并同时考虑 $g_1(\varepsilon^0)$、$g_2(\varepsilon^0)$ 的形式求得 $I_2$.

## 2 应用举例

设两自由度微扰力学系统的运动微分方程可

表示成

$$\ddot{x}_1=-4x_1+\varepsilon x_2^2+\varepsilon^2(-\frac{1}{3}x_1^3+\frac{3}{4}x_1\dot{x}_1^2)=$$
$$g_1(\varepsilon^0)+\varepsilon g_1(\varepsilon^1)+\varepsilon^2 g_1(\varepsilon^2) \quad (6a)$$

$$\ddot{x}_2=-x_2+\varepsilon(2x_1x_2)+\varepsilon^2(-\frac{11}{24}x_2^3+\frac{3}{8}x_2\dot{x}_2^2)=$$
$$g_2(\varepsilon^0)+\varepsilon g_2(\varepsilon^1)+\varepsilon^2 g_2(\varepsilon^2) \quad (6b)$$

其中 $\varepsilon$ 为非线性耦合系数,且 $0<\varepsilon\ll1$. 与系统(6)相应的未受微扰系统为

$$\ddot{x}_1=-4x_1, \quad (7a)$$
$$\ddot{x}_2=-x_2 \quad (7b)$$

系统(7)是频率比为 2:1 的两维各向异性谐振子,存在如下 4 个精确守恒量[18]

$$I_0^1=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\dot{x}_2^2+2x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2 \quad (8a)$$

$$I_0^2=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+2x_1^2 \quad (8b)$$

$$I_0^3=\frac{1}{2}\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}x_2^2 \quad (8c)$$

$$I_0^4=x_1x_2^2-x_1\dot{x}_2^2+x_2\dot{x}_1\dot{x}_2 \quad (8d)$$

其中 $I_0^1$ 为系统的总能量,$I_0^2$,$I_0^3$ 为两个分振子的能量,这 4 个守恒量不是相互独立的,存在 $I_0^1=I_0^2+I_0^3$ 的关系.

下面计算$\frac{dI_0^\alpha}{dt}(\alpha=1,2,3,4)$. 将(8)式分别代入$\frac{dI_0^\alpha}{dt}$,并同时考虑(6)式得

$$\frac{dI_0^1}{dt}=\varepsilon(x_2^2\dot{x}_1+2x_1x_2\dot{x}_2)+\varepsilon^2(\frac{3}{4}x_1\dot{x}_1^3-\frac{1}{3}x_1^3\dot{x}_1+$$
$$\frac{3}{8}x_2\dot{x}_2^3-\frac{11}{24}x_2^3\dot{x}_2) \quad (9a)$$

$$\frac{dI_0^2}{dt}=\varepsilon(x_2^2\dot{x}_1)+\varepsilon^2(\frac{3}{4}x_1\dot{x}_1^3-\frac{1}{3}x_1^3\dot{x}_1) \quad (9b)$$

$$\frac{dI_0^3}{dt}=\varepsilon(2x_1x_2\dot{x}_2)+\varepsilon^2(\frac{3}{8}x_2\dot{x}_2^3-\frac{11}{24}x_2^3\dot{x}_2) \quad (9c)$$

$$\frac{dI_0^4}{dt}=\varepsilon(x_2^3\dot{x}_2+2x_1x_2^2\dot{x}_1-4x_1^2x_2\dot{x}_2)+$$
$$\varepsilon^2(\frac{11}{12}x_1x_2^3\dot{x}_2-\frac{3}{4}x_1x_2\dot{x}_2^3-\frac{1}{3}x_1^3x_2\dot{x}_2+$$
$$\frac{3}{4}x_1x_2\dot{x}_1^2\dot{x}_2-\frac{11}{24}x_2^4\dot{x}_1+\frac{3}{8}x_2^2\dot{x}_1\dot{x}_2^2) \quad (9d)$$

将(9)式中的$\frac{dI_0^\alpha}{dt}(\varepsilon^1)$项分别代入(5b)式,并同时考虑(6)式中 $g_1(\varepsilon^0)$,$g_1(\varepsilon^0)$项的形式,可求得与 $I_0^1$,$I_0^4$ 相对应的 2 个 $I_1$

$$I_1^1=-x_1x_2^2 \quad (10a)$$

$$I_1^4=\frac{1}{32}(10x_2^2\dot{x}_1^2+6x_2^2\dot{x}_2^2+$$
$$3\dot{x}_2^4-8x_1^2x_2^2-8x_1^2\dot{x}_2^2-32x_1x_2\dot{x}_1\dot{x}_2-$$
$$5x_2^4-6\dot{x}_1^2\dot{x}_2^2) \quad (10b)$$

与 $I_0^2$,$I_0^3$ 相应的 $I_1$ 不存在.

下面计算$\frac{dI_1}{dt}(\varepsilon^1)$,将(10)式分别代入$\frac{dI_1}{dt}$并考虑(6)式中 $\varepsilon g_1(\varepsilon^1)$,$\varepsilon g_1(\varepsilon^1)$项的形式,得

$$\frac{dI_1^1}{dt}(\varepsilon^1)=0 \quad (11a)$$

$$\frac{dI_1^4}{dt}(\varepsilon^1)=\frac{5}{8}x_2^4\dot{x}_1-\frac{1}{4}x_1x_2^3\dot{x}_2+\frac{3}{4}x_1x_2\dot{x}_2^3-$$
$$x_1^3x_2\dot{x}_2-2x_1^2x_2^2\dot{x}_1-\frac{3}{8}x_2^2\dot{x}_1\dot{x}_2^2-\frac{3}{4}x_1x_2\dot{x}_1^2\dot{x}_2$$
$$(11b)$$

将(9a)式中的$\frac{dI_0^1}{dt}(\varepsilon^2)$项和(11a)式代入(5c)式,并考虑(6)式中 $g_1(\varepsilon^0)$,$g_1(\varepsilon^0)$项的形式,可得

$$I_2^1=\frac{1}{12}x_1^4+\frac{3}{64}\dot{x}_1^4+\frac{11}{96}x_2^4+\frac{3}{32}\dot{x}_2^4 \quad (12)$$

将(9d)式中的$\frac{dI_0^4}{dt}(\varepsilon^2)$项和(11b)式代入(5c)式,并考虑(6)式中 $g_1(\varepsilon^0)$,$g_1(\varepsilon^0)$项的形式,可得

$$I_2^4=\frac{2}{3}x_1^3x_2^2-\frac{1}{6}x_2^4x_1, \quad (13)$$

因此,系统存在 2 个稳定的二阶近似守恒量

$$I^1=(\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\dot{x}_2^2+2x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2)-\varepsilon x_1x_2^2+$$
$$\varepsilon^2(\frac{1}{12}x_1^4+\frac{3}{64}\dot{x}_1^4+\frac{11}{96}x_2^4+\frac{3}{32}\dot{x}_2^4) \quad (14a)$$

$$I^2=(x_1x_2^2-x_1\dot{x}_2^2+x_2\dot{x}_1\dot{x}_2)+\varepsilon\frac{1}{32}(10x_2^2\dot{x}_1^2+$$
$$6x_2^2\dot{x}_2^2+3\dot{x}_2^4-8x_1^2x_2^2-8x_1^2\dot{x}_2^2-32x_1x_2\dot{x}_1\dot{x}_2-$$
$$5x_2^4-6\dot{x}_1^2\dot{x}_2^2)+\varepsilon^2(\frac{2}{3}x_1^3x_2^2-\frac{1}{6}x_2^4x_1) \quad (14b)$$

另外,由于精确守恒量的$\frac{dI_0}{dt}(\varepsilon^0)$必为 0,则系统一定存在以下 4 个平凡的二阶近似守恒量

$$I^\alpha=\varepsilon^2 I_0^\alpha \quad (\alpha=1,2,3,4) \quad (15)$$

其中的 $I_0^\alpha$ 由(8)式给出.

## 3　小结

本文从二阶近似守恒量的性质出发研究微扰

力学系统的二阶近似守恒量,提出了分三步求得二阶近似守恒量的直接积分法:首先,分解微扰力学系统并求得精确守恒量;其次,建立守恒量的高阶微扰项系数与低阶微扰项系数及精确守恒量之间的递推关系;第三,考虑微扰项的影响,利用递推关系直接积分求得守恒量的一阶、二阶微扰项系数,从而求得系统的二阶近似守恒量.文中用此方法研究了一微扰力学系统的二阶近似守恒量并得到了2个稳定的二阶近似守恒量和4个平凡的二阶近似守恒量.用本方法求近似守恒量,思想方法简单,高阶近似守恒量与低阶近似守恒量间的递推关系明确,可推广至多自由度微扰力学系统及高阶近似守恒量的求解,是求近似守恒量的一种有效方法.

## 参 考 文 献


1 Leach P G L, Moyo S, Cotsakis S, Lemmer R L. Symmetry, singularities and integrability in complex dynamics Ⅲ: approximate symmetries and invariants. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2001,8(1): 139~156

2 Govinder K S, Heil T G, Uzer T. Approximate Noether symmetries. *Physics Letters A*, 1998, 240(3):127~131

3 Unal G. Approximate generalized symmetries, normal forms and approximate first integrals. *Physics Letters A*, 2000, 266(2): 106~122

4 Kara A H, Mahomed F M, Unal G. Approximate symmetries and conservation laws with application. *International Journal of Theoretical Physics*, 1999, 38(9): 2389 ~2399

5 Johnpillai A G, Kara A, H. Variational formulation of approximate symmetries and conservation laws. *International Journal of Theoretical Physics*, 2001, 40 (8), 1501~1509

6 Dolapci I T, Pakdemirli M. Approximate symmetries of creeping flow equations of a second grade fluid. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2004, 39(10): 1603~1619

7 Kara A H, Mahomed F M, Qadir A. Approximate symmetries and conservation laws of the geodesic equations for the Schwarzschild metric. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 51(1-2): 183~ 188

8 Grebenev V N, Oberlack M. Approximate Lie symmetries of the Navier-Stokes equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2007, 14(2): 157~163

9 Johnpillai A G, Kara A H, Mahomed F M. Approximate Noether-type symmetries and conservation laws via partial Lagrangians for PDEs with a small parameter. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 223(1): 508~518

10 楼智美.微扰Kepler系统轨道微分方程的近似Lie对称性与近似不变量.物理学报,2010, 59(10): 6764~6769 (Lou Z M. Approximate Lie symmetries and approximate invariants of the orbit differential equation for perturbed Kepler system. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59 (10): 6764~6769(in Chinese))

11 Naeem I, Mahomed F M. Approximate first integrals for a system of two coupled van der Pol oscillators with linear diffusive coupling. *Mathematical and Computational Applications*, 2010, 15 (4):720~731

12 楼智美,梅凤翔,陈子栋.弱非线性耦合二维各向异性谐振子的一阶近似Lie对称性与近似守恒量.物理学报,2012, 61(11),110204 (Lou Z M, Mei F X, Chen Z D. The first-order approximate Lie symmetries and approximate conserved quantities of the weak nonlinear coupled two-dimensional anisotropic harmonic oscillator. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(11 ) :110204(in Chinese))

13 Zhang Z Y, Yong X L, Chen Y F. A new method to obtain approximate symmetry of nonlinear evolution equation form perturbations. *Chinese Physics B*, 2009, 18 (7): 2629~2633

14 楼智美.两自由度弱非线性耦合系统的一阶近似Lie对称性与近似守恒量.物理学报,2013,62(22):220202( Lou Z M. The first order approximate Lie symmetries and approximate conserved quantities of the weak nonlinear coupled two-dimensional system. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62 (22):220202(in Chinese))

15 楼智美.含非线性微扰项的二阶动力学系统的一阶近似守恒量的一种新求法.物理学报,2014, 63(6): 060202( Lou Z M. A new method to obtain first order approximate conserved quantities of second-ordinary dynamics system containing nonlinear perturbation terms. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(6): 060202(in Chinese))

16 张斌,方建会,张东爱,徐瑞莉,刘学锋.相对论性非完整系统的Lagrange对称性与守恒量.动力学与控制学报, 2014,12(2):105~110 ( Zhang B, Fang J H, Zhang D A, Xu R L, Liu X F. Symmetry and conserved quantity of Lagrangians for relativistic nonholonomic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2014,12(2):105~110 (in Chinese))

17 徐瑞莉,方建会,张斌,王菲菲. Chetaev型非完整系统

Nielsen 方程 Lie 对称性导致的一种守恒量. 动力学与控制学报,2014,12(1):13 ~ 17 (Xu R L, Fang J H, Zhang B, Wang F F. A type of conserved quantity of lie symmetry for nonholonomic system of nielsen equation of chetaev´s type. *Journal of Dynamics and Control*, 2014,12(1):13 ~ 17 (in Chinese))

18 楼智美,梅凤翔. 二维各向异性谐振子的第三个独立守恒量及其对称性. 物理学报. 2012,61(11):110201(Lou Z M, Mei F X. The third independent conserved quantity and its symmetry of the two-dimensional anisotropic harmonic oscillator. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61 (11): 110201(in Chinese))

# SECOND ORDER APPROXIMATE CONSERVED QUANTITIES OF TWO DIMENSIONAL PERTURBED MECHANICS SYSTEM *

Lou Zhimei†

(*Department of Physics*, *Shaoxing University*, *Shaoxing* 312000, *China*)

**Abstract** We consider the perturbed mechanics system as the combination of unperturbed system and perturbed terms, we can select a suitable method to obtain the exact conserved quantities $I_0$ of unperturbed system. Based on the characteristic of the approximate conserved quantities, the recursion relations between the first order perturbed coefficient $I_1$ of conserved quantities to the exact conserved quantities $I_0$ and the second order perturbed coefficient $I_2$ to the first order perturbed coefficient $I_1$ of conserved quantities and the exact conserved quantities $I_0$ are established. We calculate the influence of perturbed terms on exact conserved quantities and on the first order perturbed coefficient, according to the recursion relation between the second order perturbed coefficient to the first order perturbed coefficient of conserved quantities and the exact conserved quantities, we obtain the second order approximate conserved quantities of the system by direct integral method. An actual perturbed mechanics system is studied in this paper, and two stable second order approximate conserved quantities are obtained by using this method.

**Key words** two dimensional perturbed mechanics system, exact conserved quantities, recursion relations, direct integral method, second order approximate conserved quantities

Received 21 September 2014, revised 18 October 2014.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11472177)

† Corresponding author E-mail: louzhimei@usx.edu.cn