

一类异构多智能体系统有向图下的广义平均一致性分析

孙一杰^{1,2†} 张国良¹ 张胜修¹

(1. 第二炮兵工程大学控制工程系, 西安 710025) (2. 中国人民解放军96211部队, 红河 654300)

摘要 本文对有向图下离散时间一阶二阶混合的异构多智能体系统广义平均一致性问题进行研究. 首先给出了该异构系统广义平均一致性的基本概念. 在此基础上, 针对平均一致性研究中对交互拓扑为平衡网络的局限, 提出了一种基于辅助变量的线性一致性协议, 对每一个智能体增加一个辅助变量, 用于记录个体的状态更新. 采用图论、非负矩阵理论、特征值扰动等方法进行分析证明, 表明该协议使得异构多智能体系统在任意强连通有向图下达到广义平均一致性. 并对收敛值的性质进行了分析. 最后, 通过仿真对该结论进行了验证.

关键词 异构多智能体系统, 图论, 强连通有向图, 广义平均一致性, 特征值扰动理论

DOI: 10.6052/1672-6553-2014-072

引言

近年来, 分散式多智能体协同控制系统在无人航天器的协同控制、多机器人编队控制等领域得到了广泛应用, 逐渐成为控制理论、统计物理学、生物学、应用数学、计算机科学等学科领域研究的热点问题. 到目前为止, 研究人员通过采用图论、矩阵论、频域分析方法、李亚普诺夫稳定性理论等方法, 对一致性问题进行了研究, 获得了许多一阶、二阶以及高阶多智能体系统的一致性标准^[1-4].

以上结论都是基于同构系统, 但异构系统在工程实际中广泛存在. 基于以上考虑, Liu 研究了离散时间有界通信时延下的异构多智能体一致性问题^[5]. Kaizuka 和 Tsumura 采用参考自适应控制方法处理了异构多智能体问题^[6]. Zheng 和 Zhu 采用图论和李亚普诺夫方法研究了无向拓扑情况下的异构多智能体一致性问题^[7]. Tian 研究了高阶未知时延的异构多智能体一致性问题^[8]. 朱亚银, 关新平等研究了异构多智能体系统的有限时间一致性问题^[9].

以上异构系统的研究都是集中解决系统是否一致和收敛速度的问题, 对于一个给定的系统往往

需要知道最终的收敛值, 即控制的最终目标. 对于同构系统, 现在研究较多的是平均一致性. 所谓平均一致性就是所有智能体状态收敛到初始状态的平均值. 针对同构系统的平均一致性问题, 取得了许多成果^[3,10-13]. 在此基础上, 本文研究了异构多智能体系统的一致性收敛问题. 通过采用平均一致性的基本思想, 得出了系统收敛到一个给定的最终收敛值的充分条件, 并称之为异构系统的广义平均一致性. 本文在文献[13]基础上对异构系统的广义平均一致性进行了研究, 不同于文献[13]基于辅助变量的协议设计可以直接给出, 该异构系统为一阶、二阶模型的混合, 个体间状态存在差异, 基于参考变量的协议设计较文献[13]困难, 本文首先对异构系统提出一般一致性协议, 然后对该协议进行拓展, 设计基于辅助变量的一致性协议, 最后基于图论、非负矩阵理论、特征值扰动等理论进行分析证明, 表明该协议使得异构多智能体系统在任意强连通有向图下达到广义平均一致性. 该收敛值与采样时间间隔 T 和系统初始值有关, 在采样时间间隔的范围内, 通过调整采样时间间隔, 可以使系统收敛值在一定范围内变化, 使系统收敛到该范围内的任意值.

1 问题描述

1.1 预备知识

一个有向图 $G = (v, \varepsilon)$, 由顶点集 $V = \{1, 2, \dots, n\}$, 边集 $\varepsilon \subseteq v \times v$, $e_{ij} \in \varepsilon$ 表示 G 中 i 到 j 的有向边, 表示节点 j 可以获得节点 i 的信息. 对于每一个节点 $i \in v, N_i^+ = \{j \in v: e_{ij} \in \varepsilon\}$ 表示为入邻居集, $N_i^- = \{j \in V: e_{ji} \in \varepsilon\}$ 表示出邻居集. $N_i^+ \neq N_i^-$; 并且排除自循环边, 即 $i \notin N_i^+ \cup N_i^-$. 更新权重 a_{ij} 满足, 如果 $j \in N_i^+, a_{ij} \in (0, 1)$, 否则 $a_{ij} = 0$, 并且 $\sum_{j \in N_i^+} a_{ij} < 1$. 设 A 为有向图 G 的邻接矩阵 $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$, 元素为更新权重. 拉普拉斯矩阵定义为 $L = D - A = [l_{ij}] \in R^{n \times n}$, $D = \text{diag}\{\sum_{j=1}^n a_{ij}, i = 1, \dots, n\}$ 是度矩阵. 则矩阵 $I - L$ (当 $\sum_{j \in N_i^+} a_{ij} < 1$) 是非负矩阵, 并且所有行和为 1, $I - L$ 是行随机矩阵. 设矩阵 $B = [b_{ih}] \in R^{n \times n}$, 元素为输出权重. 定义矩阵 $E = (I - \tilde{D}) + B, \tilde{D} = \text{diag}(\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n), \tilde{d}_i = \sum_{h=1}^n b_{ih}, i = 1, \dots, n$. 则矩阵 E 非负矩阵 ($\sum_{h \in N_i^-} b_{ih} < 1$), 且每一个列和为 1, 则为列随机矩阵. 在有向图 G 中从节点 i_1 到 i_s 是一个边的序列 $e_{i_1 i_2}, \dots, e_{i_{s-1} i_s}, i_j \in V$. 如果图 G 中存在一个节点使得从这个节点到其它每一个节点都存在一条有向路径则称该图有一个生成树. 强连通是指任意节点均存在有向路径到达每一个节点.

对于一个由 n 个一阶、二阶组成的混合异构系统, 假设前 m 个智能体为二阶, 余下 $n - m$ 个为一阶. 二阶智能体入邻居表示为 $N_i^+ = N_{s_s}^+ \cup N_{s_f}^+$, 一阶智能体入邻居表示为 $N_i^+ = N_{j_s}^+ \cup N_{j_f}^+$. 二阶智能体出邻居表示为 $N_i^- = N_{s_s}^- \cup N_{s_f}^-$, 一阶智能体出邻居表示为 $N_i^- = N_{j_s}^- \cup N_{j_f}^-$. 则拉普拉斯矩阵可以表示为,

$$L = \begin{bmatrix} \bar{L}_s & -A_{s_f} \\ -A_{j_s} & \bar{L}_f \end{bmatrix}, \bar{L}_s(k) = L_s + D_{s_f}, \\ \bar{L}_f(k) = L_f + D_{j_s}, D_{s_f} = \text{diag}\{\sum_{j \in N_{j_s}^+} a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m\}, \\ D_{j_s} = \text{diag}\{\sum_{j \in N_{j_s}^+} a_{ij}, l = m + 1, \dots, n\},$$

L_s 表示 m 个二阶智能体之间的拉普拉斯矩阵, L_f 为 $n - m$ 个一阶智能体之间的拉普拉斯矩阵. A_{s_f} 表示二阶个体与一阶个体的邻接关系, A_{j_s} 表示一阶个体与二阶个体的邻接关系.

几个重要矩阵的定义:

非负矩阵: 矩阵所有的元素都非负. 随机矩阵: 矩阵所有行和为 1 的非负矩阵. SIA 矩阵: 如果随机矩阵 P 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = 1v^T$ 则称该矩阵是 SIA 矩阵.

1.2 异构多智能体系统

假设异构多智能体系统由一阶和二阶智能体组成, 前 m ($m < n$) 个智能体为二阶, 余下的 ($n - m$) 个智能体为一阶. 该异构系统模型描述如下:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = x_i(k) + Tv_i(k) + \frac{T^2}{2}u_i(k) \\ v_i(k+1) = v_i(k) + Tu_i(k), \quad i = 1, \dots, m \\ x_l(k+1) = x_l(k) + Tu_l(k) \quad l = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

采用如下离散时间协议:

$$\begin{cases} u_i(k) = -k_1 v_i(k) + \sum_{j \in N_i(k)} a_{ij}(x_j(k) - x_i(k)), \\ \quad i = 1, \dots, m \\ u_l(k) = k_2 \sum_{j \in N_l(k)} a_{lj}(x_j(k) - x_l(k)), \\ \quad l = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2)$$

定义 $z_i(k) = x_i(k) + Tv_i(k), i = 1, \dots, m$, 则该异构系统可以描述为:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = \frac{Tk_1}{2}x_i(k) + \frac{2 - Tk_1}{2}z_i(k) + \\ \quad \frac{T^2}{2}(\sum_{j \in N_i} a_{ij}(k)(x_j(k) - x_i(k))) \\ z_i(k+1) = \frac{4 - 3Tk_1}{2}z_i(k) + \frac{3Tk_1 - 2}{2}x_i(k) + \\ \quad \frac{3T^2}{2}(\sum_{j \in N_i} a_{ij}(k)(x_j(k) - x_i(k))), i = 1, \dots, m \\ x_l(k+1) = x_l(k) + Tk_2 \sum_{j \in N_l} a_{lj}(x_j(k) - x_l(k)), \\ \quad l = m + 1, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

(1) ~ (3) 中, $k_1 > 0, k_2 > 0$ 为控制增益, $0 < T < T_{\max}$ 为采样时间间隔, 下文将给出取值范围. 令 $y(k) = [x_s^T(k), z_s^T(k), x_f^T(k)]^T, x_s^T(k) = [x_1, \dots, x_m]^T, z_s^T(k) = [z_1, \dots, z_m]^T, x_f^T(k) = [x_{m+1}, \dots, x_n]^T$. 则系统(3)可以描述为:

$$y(k+1) = \Gamma y(k) \quad (4)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{Tk_1}{2}I_m - \frac{T^2}{2}\bar{L}_s & \frac{2 - Tk_1}{2}I_m & \frac{T^2}{2}A_{s_f}(k) \\ \frac{3Tk_1 - 2}{2}I_m - \frac{3T^2}{2}\bar{L}_s & \frac{4 - 3Tk_1}{2}I_m & \frac{3T^2}{2}A_{s_f}(k) \\ Tk_2A_{j_s}(k) & 0 & I_{n-m} - Tk_2\bar{L}_f \end{bmatrix}$$

注 1: 协议(2)为静态一致性协议, 引入的状态变量 $z_i(k) = x_i(k) + Tv_i(k), i = 1, \dots, m$, 可以看出, 当系统(3)获得一致性时, 达到了协议(2)的控制目标.

下面给出广义平均一致性的定义:

定义 1 对于系统(1), 当且仅当:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = \frac{1}{n+m} \sum_{i=1}^{n+m} y_i(0) = \frac{1}{n+m} [2 \sum_{j=1}^m x_j(0) + \sum_{l=m+1}^n x_j(0) + T \sum_{j=1}^m v_j(0)] \quad i=1, \dots, n$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_j(k) = 0, \quad j=1, \dots, m \quad (5)$$

则称所提出的一致性协议使异构系统达到了广义平均一致性.

可以看出系统(4)获得平均一致性时, 系统(1)获得广义平均一致性.

1.3 有向图下广义平均一致性问题分析

在时间 k (k 为非负整数), 系统状态可以描述为:

$$y(k) = [y_1, y_2, \dots, y_{n+m}]^T = [x_s^T(k), z_s^T(k), x_f^T(k)]^T$$

根据上文给出的异构系统广义平均一致性定义, 可以得出广义平均一致性的目标就是设计分布式协议, 使得有向图 G 中的每一个节点通过与邻居信息交互进行信息更新, 使得每一个 $y_i(k)$ 最终收敛到初始状态的平均值 $y_a = 1^T y(0) / (n+m)$. 在一般强连通有向图中要实现平均一致性, 主要的困难的是系统状态和 $1^T y(k)$ 是变化的, 导致了对初始状态平均值跟踪的失败. 针对这个问题, 引入一个变量 $s_i(k) \in \mathbb{R}$, 称为辅助变量. 记 $s(k) = [s_1(k), \dots, s_{n+m}(k)]^T = [s_s, s_z, s_f]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ 且 $s(0) = 0$. 辅助变量的功能是记录状态的变化, 使得对于所有时刻 $k, 1^T(y(k) + s(k)) = 1^T y(0)$, 保持 $1^T(y(k) + s(k))$ 是恒定的.

定义 2 对于每一个初始条件 $(y(0), 0)$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $(y(k), s(k)) \rightarrow (y_a 1, 0)$, 则称异构多智能体系统达到了广义平均一致性.

2 一般强连通有向图下的广义平均一致性分析

本部分, 首先提出基于辅助变量的线性分布式协议, 主要是对上文异构系统一致性协议的一种拓展. 然后对所提出的协议进行证明, 确保在任意强连通有向图下该异构系统实现广义平均一致性.

2.1 基于辅助变量的协议描述

在系统(3)的基础上, 借鉴文献[13]的设计思路对系统中的一阶智能体和二阶智能体对状态和

辅助变量做如下更新:

$$x_i(k+1) = \frac{Tk_1}{2} x_i(k) + \frac{2-Tk_1}{2} z_i(k) + \frac{T^2}{2} \sum_{j \in N_i^+(k)} a_{ij} (x_j(k) - x_i(k)) + \varepsilon s_{si}(k) \quad i=1, \dots, m \quad (6)$$

$$z_i(k+1) = \frac{4-3Tk_1}{2} z_i(k) + \frac{3Tk_1-2}{2} x_i(k) + \frac{3T^2}{2} \sum_{j \in N_i^+(k)} a_{ij} (x_j(k) - x_i(k)) + \varepsilon s_{zi}(k) \quad i=1, \dots, m \quad (7)$$

$$x_l(k+1) = x_l(k) + Tk_2 \sum_{j \in N_l^+(k)} a_{lj} (x_j(k) - x_l(k)) + \varepsilon s_{fl}(k) \quad l=m+1, \dots, n \quad (8)$$

$$s_{si}(k+1) = (1 - \sum_{h \in N_i^-(k)} b_{ih} s_{si}(k)) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N_{ss}^+(k)} b_{ji} (s_{sj}(k) + s_{zj}(k)) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N_{sf}^+(k)} b_{ji} s_{fj}(k) - (x_i(k) - x_i(k+1)), \quad i=1, \dots, m \quad (9)$$

$$s_{zi}(k+1) = (1 - \sum_{h \in N_i^-(k)} b_{ih} s_{zi}(k)) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N_{ss}^+(k)} b_{ji} (s_{sj}(k) + s_{zj}(k)) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N_{sf}^+(k)} b_{ji} s_{fj}(k) - (z_i(k) - z_i(k+1)), \quad i=1, \dots, m \quad (10)$$

$$s_{fl}(k+1) = (1 - \sum_{h \in N_l^-(k)} b_{lh} s_{fl}(k)) + \sum_{j \in N_{fs}^+(k)} b_{jl} (s_{sj}(k) + s_{zj}(k)) + \sum_{j \in N_{ff}^+(k)} b_{jl} s_{fj}(k) - (x_l(k) - x_l(k+1)), \quad l=m+1, \dots, n \quad (11)$$

$\varepsilon > 0$ 为干扰系数. 通过以上分析可以将(6)~(11)用矩阵的形式进行表示:

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ s(k+1) \end{bmatrix} = \Lambda(k) \begin{bmatrix} y(k) \\ s(k) \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中, $\Lambda = \begin{bmatrix} \Gamma & \varepsilon I \\ I - \Gamma & F - \varepsilon I \end{bmatrix}$

$$F = \begin{bmatrix} I - \bar{D}_s + \frac{1}{2} B_{ss} & \frac{1}{2} B_{ss} & \frac{1}{2} B_{sf} \\ \frac{1}{2} B_{ss} & I - \bar{D}_s + \frac{1}{2} B_{ss} & \frac{1}{2} B_{sf} \\ B_{fs} & B_{fs} & I - \bar{D}_f + B_{ff} \end{bmatrix}$$

容易验证 F 和 Λ 均为列随机矩阵.

2.2 收敛性分析

本部分采用非负矩阵理论和矩阵扰动理论分析出实现广义平均一致性的条件.

引理 1 当通信拓扑图 G 为强连通时, 矩阵 Γ 为随机矩阵且仅有一个 1 特征值, 非 1 特征值的模均小于 1 的条件是采样时间 T 及控制参数 k_1, k_2 满足:

$$\begin{cases} 0 < T < \sqrt{\frac{2}{3 \max\{d_i, i=1, \dots, m\}}} \\ \frac{2}{3T} + T \max\{d_i, i=1, \dots, m\} < k_1 < \frac{4}{3T} \\ 0 < k_2 < \frac{1}{T \max\{d_l, l=m+1, \dots, n\}} \end{cases} \quad (13)$$

其中, $d_i, i=1, \dots, n$ 为系统度矩阵的对角元素.

证明: 当满足 (13) 可以得出矩阵 Γ 满足以上条件时为非负矩阵, 容易验证该矩阵行和为 1, 所以矩阵 Γ 为随机矩阵. 又 $\hat{\Gamma} = \Gamma - I_{(n+m) \times (n+m)}$, 对 $\hat{\Gamma}$ 做初等行列变换可得:

$$\hat{\Gamma} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3}I_m & 0 & 0 \\ \frac{2-3Tk_1}{3T^2}I_m & -\bar{L}_s & A_{sf} \\ 0 & A_{fs} & -\bar{L}_f \end{bmatrix}$$

则可以得出 $\text{rank}(\hat{\Gamma}) = m + \text{rank}(L)$, 又强连通有向图中, $\text{rank}(L) = n - 1$. 设 $\bar{\Gamma} = \Gamma + I_{n+m}$, 对 $\bar{\Gamma}$ 做行列变换可以验证 $\text{rank}(\bar{\Gamma}) = n + m$, 则矩阵 Γ 不含 -1 特征值. 根据随机矩阵属性 $\lambda = 1$ 是矩阵 Γ 代数重复度为 1 的一个特征值, 并且其余特征值的模都是小于 1 的 ($|\lambda| < 1$).

定理 1 系统 (12) 实现广义平均一致性的充分条件是矩阵 Λ 仅有一个 1 特征值, 并且非 1 特征值的模均小于 1.

证明: 当矩阵 Λ 仅有一个 1 特征值, 并且其它特征值模数小于 1 时, 可以将 Λ 写为 **Jordan** 规范型, 具有如下形式:

$$\Lambda = PJP^{-1} = [w_1, \dots, w_{2(m+n)}] \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0_{1 \times (2(m+n)-1)} & & \\ & & J' & \\ & 0_{(2(m+n)-1) \times 1} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \dots \\ v_{2(m+n)}^T \end{bmatrix}$$

又非 1 特征值模数均小于 1, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} (J')^k = 0$.

不失一般性, 选择 $w_1 = [1_{n+m}^T, 0_{n+m}^T]^T$, 可以验证 w_1 为 Λ 阵 1 特征值对应的特征向量. 又 Λ 是列随机矩阵, 则 $v_1 = [\alpha 1_{n+m}^T, \alpha 1_{n+m}^T]^T, \alpha \neq 0$, 为 1 特征值对应的左特征向量. 又有 $v_1^T w_1 = 1$, 得 $\alpha = 1/n + m$. 则

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} y(k) \\ s(k) \end{bmatrix} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda^k \begin{bmatrix} y(0) \\ s(0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{m+n} \begin{bmatrix} 1_{n+m} 1_{n+m}^T y(0) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_i(k) = \frac{1_{n+m}^T y(0)}{m+n}$. 则系统 (12) 实现广义平均一致性.

引理 2 ^[14] 一个 $n \times n$ 的矩阵 $W(\varepsilon)$, 随实数 $\varepsilon \geq 0$ 光滑变化. 取 $l \in [1, n]$; 设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_l$ 为矩阵 $W(0)$ 的单一特征值, 并且具有线性独立的右特征向量 $y_1 = y_2 = \dots = y_l$, 和线性独立的左特征向量 $z_1 = z_2 = \dots = z_l$, 使得:

$$\begin{bmatrix} z_1^T \\ \dots \\ z_l^T \end{bmatrix} [y_1 \dots y_l] = I$$

取比较小的 $\varepsilon > 0$, $\lambda_i(\varepsilon)$ 表示 $\lambda_i, i \in [1, l]$ 相应的 $W(\varepsilon)$ 的特征值. 则导数 $d\lambda_i(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ 存在, 并且该导数值是以下 $l \times l$ 矩阵对应的特征值:

$$\begin{bmatrix} z_1^T \dot{W} y_1 & \dots & z_1^T \dot{W} y_l \\ \dots & \dots & \dots \\ z_l^T \dot{W} y_1 & \dots & z_l^T \dot{W} y_l \end{bmatrix}, \dot{W} = dW(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$$

引理 3 ^[16] (Perron-Frobenius) 如果矩阵 A 是不可约的, 则谱半径 $\rho(A) > 0$ 为矩阵单一特征值, 且对应特征向量是正的.

定理 2 系统 (12) 满足 (13) 式时达到广义平均一致性的充分条件是参数 ε 足够小且有向图 G 为强连通.

$$\text{证明: 设 } \Lambda_0 = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ I - \Gamma & F \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

则 $\Lambda = \Lambda_0 + \varepsilon H$, 矩阵 Λ 通过矩阵 Λ_0 通过 εH “扰动” 获得. 矩阵 Λ 光滑的依赖于 ε . 可以看出矩阵 Λ_0 是分块下三角矩阵, 其谱属性满足 $\sigma(\Lambda_0) = \sigma(\Gamma) \cup \sigma(F)$. 由引理 1 当通信拓扑图 G 为强连通时, 矩阵 Γ 与 F 均仅有一个 1 特征值, 几何重复度与代数重复度均为 1, 且非 1 特征值的模均小于 1. 表明 $1 = \lambda_1(\Lambda_0) = \lambda_2(\Lambda_0) > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_{2(m+n)}|$, 又 $\text{rank}(\Lambda_0 - I) = 2(n+m) - 2$, 则 Λ_0 特征值 1 的代数重复度和几何重复度均为 1. 在一个小的扰动 εF 下, Λ_0 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 发生了变化. 根据引理 2 计算导数 $d\lambda_1(\varepsilon)/d\varepsilon, d\lambda_2(\varepsilon)/d\varepsilon, \lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon)$ 为 Λ 与 λ_1, λ_2 相关特征值. 对于矩阵 Λ_0 的

特征值 1, 有线性无关的右特征向量 $y_1 = [0^T, v_1^T]^T$, $y_2 = [1^T, -nv_1^T]^T$, 和线性无关的左特征向量 $z_1 = [1^T, 1^T]^T$, $z_2 = [v_2^T, 1^T]^T$. v_1 为矩阵 F 特征值 $\rho(F)$ 对应的左特征向量, $1^T v_1 = 1$, v_2 为 $\rho(\Gamma)$ 对应的右特征向量, $v_2^T 1 = 1$. 满足通信拓扑强连通, 可以看出矩阵 F 和 Γ 均为不可约矩阵, 则根据引理 3 可知 v_1 和 v_2 均为正的特征向量. 根据引理 2 可得

$$I = \begin{bmatrix} z_1^T H y_1 & z_1^T H y_2 \\ z_2^T H y_1 & z_2^T H y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v_2^T v_1 & -n v_2^T v_1 \end{bmatrix}$$

对于较小的 ε , 导数 $d\lambda_1(\varepsilon)/d\varepsilon, d\lambda_2(\varepsilon)/d\varepsilon$ 存在, 且为矩阵 I 的特征值. 则 $d\lambda_1(\varepsilon)/d\varepsilon = 0, d\lambda_2(\varepsilon)/d\varepsilon = -n v_2^T v_1 < 0$ 表明当 ε 足够小时, $\lambda_1(\varepsilon)$ 保持不变, $\lambda_2(\varepsilon)$ 沿实轴向左移动, 则必然存在正整数 δ_1 使得, $\lambda_1(\delta_1) = 1, \lambda_2(\delta_1) < 1$. 另一方面特征值是矩阵元素的连续函数, 则必定存在正的 δ_2 , 使得 $|\lambda_i(\delta_2)| < 1, i \in [3, 2(n+m)]$. 这样对于任意足够小的 $\varepsilon \in (0, \min\{\delta_1, \delta_2\})$, 矩阵 Λ 有一个单一特征值 1, 且非 1 特征值的模均小于 1. 因此根据定理 1, 系统广义平均一致性可达.

3 收敛值分析

通过以上分析得出了系统实现广义平均一致性的充分条件. 得出的最终收敛值为:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = \frac{1}{n+m} [2 \sum_{j=1}^m x_j(0) + \sum_{l=m+1}^n x_l(0) + T \sum_{j=1}^m v_j(0)]$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_j(k) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

令

$$\sum_{j=1}^m x_j(0) = a, \quad \sum_{l=m+1}^n x_l(0) = b,$$

$$\sum_{j=1}^m v_j(0) = c,$$

当 $c > 0$ 时为:

$$\left[\frac{1}{m+n}(2a+b), \frac{1}{m+n}(2a+b+T_{\max}c) \right]$$

当 $c < 0$ 时,

$$\left[\frac{1}{m+n}(2a+b+T_{\max}c), \frac{1}{m+n}(2a+b) \right]$$

引理 1 给出了采样时间间隔 T 的取值范围, 这样根据系统的初始状态就可以确定出系统的收敛区间, 结合实际需求, 就可以通过调整采样时间间隔对系统最终的收敛值进行调整.

4 仿真实验

本部分主要对本文获得的理论结果进行仿真验证. 通过采用所得出的结论, 实现异构多机器人系统的聚集控制. 考虑一个 4 个机器人组成的多机器人系统, 通信拓扑如图 1 所示, 其中, 节点 1, 2 为二阶模型, 节点 3, 4, 为一阶模型, 显然通信拓扑强连通. 机器人 R_i 的位置为 $x_i = [x_{ix}, x_{iy}, \theta_i]^T, i = 1, 2, 3, 4, 5$, 二阶机器人的速度表示 $v = [v_{ix}, v_{iy}, \omega_i]^T, i = 1, 2, 3$, 其中 x_{ix}, x_{iy}, θ_i 表示机器人 x, y 方向上的位移和方向角, v_{ix}, v_{iy}, ω_i 为二阶个体 x, y 方向上的速度和转动速度.

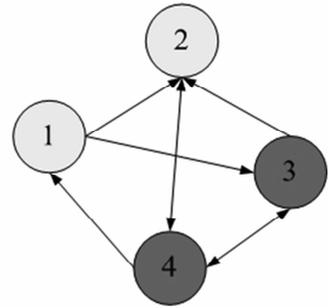


图 1 信息交互拓扑图

Fig. 1 The information interaction graph of the multi-agent

$a_{ij} = 1/(|N_i^+| + 1), j \in N_i^+, i = 1, \dots, 4, b_{ij} = 1/(|N_i^-| + 1), j \in N_i^-, i = 1, \dots, 4$. 任意选取 $x_1(0) = [1, 2, 1]^T, x_2(0) = [1, -1, 2]^T, x_3(0) = [1, 2, -1]^T, x_4(0) = [1.5, 2, -1]^T, v_1(0) = [0.5, 1, 0.5]^T, v_2(0) = [-1, -1, 1.2]^T$, 仿真结果如图 2, 图 3, 图 4 所示.

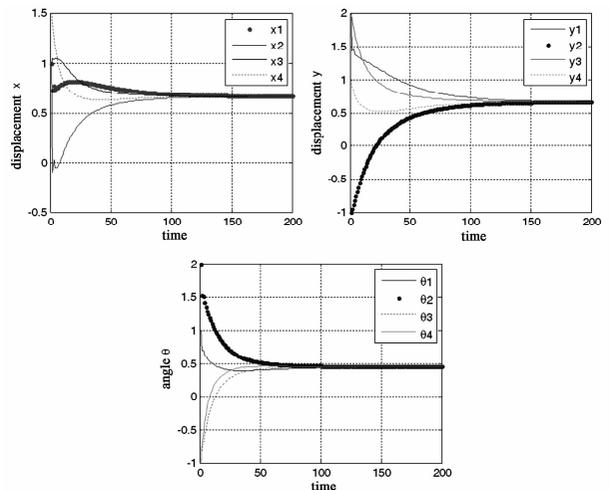


图 2 机器人的位置信息

Fig. 2 The positions of robots

图2显示了智能体的位置状态信息的,根据(5)计算出系统在三个变量上的广义平均一致性分别为: $\bar{y}_x = 0.665$, $\bar{y}_y = 0.663$, $\bar{y}_\theta = 0.450$,可以看出系统实现了广义平均一致性.图3显示了二阶智能体的速度状态信息,可以看出所有二阶智能体的速度一致趋于0.图3显示了辅助变量的变化情况,可以看出在系统达到广义平均一致性的过程中所有辅助变量一致趋于0,与理论分析结果一致.

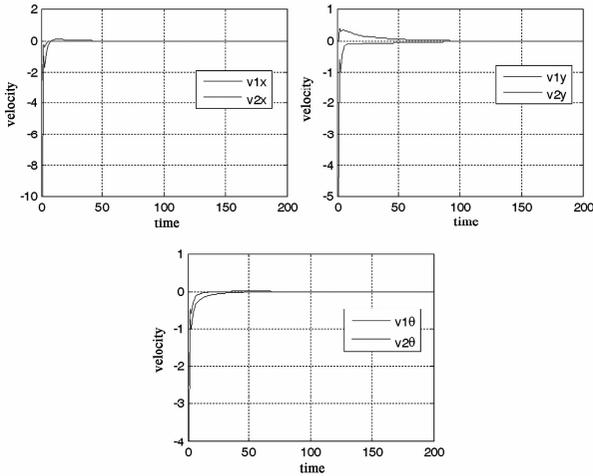


图3 二阶机器人速度信息

Fig. 3 The velocities of second-order robots

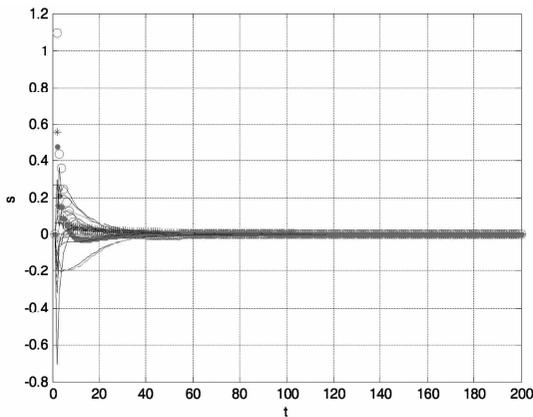


图4 辅助变量信息

Fig. 4 The additional variable information

5 结论

本文对包含一阶、二阶混合的离散时间异构多智能体系统的一致性进行研究,提出了该类异构智能体系统的广义平均一致性概念.在此基础上,采用同构系统平均一致性研究的方法,针对先前文献要求网络具有平衡结构的问题,提出了一种新的分布式协议,在任意强连通交互拓扑下,实现了异构

多智能体的广义平均一致性.根据收敛值的性质,得出了收敛值的范围.最后对该结果进行了仿真验证,结果与理论分析一致.该研究主要是在固定拓扑情况下,下一步研究考虑将现有的理论结果拓展到动态拓扑的情况中.

参 考 文 献

- 1 Vicsek T, Czirok A, Jacob E B., Cohen I, Schochet O. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6):1226 ~ 1229
- 2 颜青,马米花,吴海亮.具有引导者的多智能体网络系统的脉冲一致性. *动力学与控制学报*, 2012, 10(2):152 ~ 156 (Yan Q, Ma, M H, Wu H L. Impulsive consensus of networked multi-agent system with a leader. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, 10(2):152 ~ 156 (in Chinese))
- 3 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9):1520 ~ 1533
- 4 Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5):655 ~ 661
- 5 Liu C L, Liu F. Stationary consensus of heterogeneous multi-agent systems with bounded communication delays. *Automatica*, 2011, 47:2130 ~ 2133
- 6 Okajima T, Tsumura K, Hayakawa T, Ishii H. Adaptive consensus of discrete-time heterogeneous multi-agent systems. In: *SICE Annual Conference*, 2011:2237 ~ 2242
- 7 Zheng Y, Zhu Y, Wang L. Consensus of heterogeneous multi-agent systems. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(16):1881 ~ 1888
- 8 Tian Y P, Zhang Y. High-order consensus of heterogeneous multi-agent systems with unknown communication delays. *Automatica*, 2012, 48:1205 ~ 1212
- 9 Zhu Y K, Guan X P, Luo X Y. Finite-time consensus of heterogeneous multi-agent systems. *Chinese Physics B*, 2013, 22(3):038901
- 10 Kingston D B, Beard R W. Discrete-time average-consensus under switching network topologies. In: *Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis*, 2006:3551 ~ 3556
- 11 Sun Y G, Wang L, Xie G. Average consensus in net-

- works of dynamic agents with switching topologies and multiple time varying delays. *System & Control Letters*, 2008,58:175 ~ 83
- 12 Shuai L, Tao L, Lihua X. Distributed consensus for multi-agent systems with communication delays and limited data rate. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2011,49(6):2239 ~ 62
- 13 Cai K, Ishii H. Average consensus on general strongly connected digraphs. *Automatica*, 2012,48:2750 ~ 2761
- 14 Seyranian A P, Mailybaev A A. Multi-parameter stability theory with mechanical applications. Singapore: World Scientific,2004
- 15 Lin Z Y, Francis B, Manfredi M. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005,50(1):121 ~ 128
- 16 Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis. London: Cambridge:Cambridge University Press, 1985

GENERALIZED AVERAGE CONSENSUS ANALYSIS FOR A CLASS OF HETEROGENEOUS MULTI-AGENT SYSTEM ON DIGRAPHS

Sun Yijie^{1,2†} Zhang Guoliang¹ Zhang Shengxiu¹

(1. Department of Control Engineering, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

(2. The United 96211, People's Liberation Army, Honghe 654300, China)

Abstract The generalized average consensus of heterogeneous multi-agent system with discrete-time on general strongly connected digraphs was investigated. Firstly, the definition of generalized average consensus was presented. Aiming at the study of average consensus confined to the balanced or symmetric network, a new linear distributed algorithm was proposed. The novelty is the augmentation of an additional variable for each agent, whose function is to record individual state update. By applying nonnegative matrices theory, graph theory and the eigenvalue perturbation theory, the consensus algorithm was studied. The result indicates that the algorithm guarantees state averaging on arbitrary strongly connected digraphs. Numerical simulations were given to demonstrate the effectiveness of the theoretical results.

Key words heterogeneous multi-agent systems, graph theory, strongly connected digraph, generalized average consensus, eigenvalue perturbation theory