

# 非均匀缓变折射率平板波导放大器中的畸形波\*

宋妮<sup>1,2</sup> 张伟<sup>1†</sup> 杨晓峰<sup>1,2</sup> 曹东兴<sup>1</sup>

(1. 北京工业大学机电学院, 北京 100124) (2. 中北大学数学系, 太原 030051)

**摘要** 以缓变波导中光束传播的非线性传输方程为研究对象, 研究了非均匀缓变折射率平板波导放大器中畸形波的非线性动力学性质. 通过相似变换和直接假设, 构建出带有自由函数的一阶精确畸形波解. 在此基础上, 针对不同类型的自由函数, 通过数值模拟得到了不同畸形波的波形图, 对于描述光纤中出现的一些物理现象具有重要的意义.

**关键词** 畸形波, 非线性传输方程, 相似变换

DOI: 10.6052/1672-6553-2014-078

## 引言

畸形波(rogue waves)的研究最早源于海洋动力学, 是一种目前尚无法解释和预测的突然出现的大浪. 其波高极大, 波峰尖瘦, 存在时间短, 破坏力大, 因此也被称为奇异波、怪波、瞬间波、极端风浪等<sup>[1-4]</sup>. 近几十年, 越来越多的学者和工程人员开始研究畸形波, 并在其它领域中也发现了这一现象, 如光学<sup>[5-9]</sup>、物质波<sup>[10]</sup>、超流体<sup>[11]</sup>、等离子体和金融学<sup>[12]</sup>等. 目前, 畸形波的动力学特征大多采用非线性薛定谔方程(NLSE)来表征. 自20世纪80年代以来, 非线性薛定谔方程已经成为非线性科学中一个重要的基本方程, 如水动力学、等离子体物理、非线性量子场论、流体力学、非线性光学等.

光孤子作为一种信息载体, 在过去几十年里一直是人们研究的热点课题之一. 在理想情况下, 光孤子在单模光纤中的传输行为可以由非线性薛定谔方程来精确地描述, 可以传播无限长的距离而不会信息失真, 具有很高的传输码率. 然而, 稳定传输是受脉冲能量限制的. 而自相似脉冲可以很好地解决传输中脉冲的强度限制问题, 它在高功率传播时, 脉冲形状不改变, 具有抵御光波分裂的能力<sup>[13]</sup>. 最近, 考虑到连续光束在缓变折射率平面波导中的传输, Ponomarenko 和 Afrawal 给出了非均匀非线性放大器中的亮暗空间自相似波以及周期自

相似波, 并进行了具体分析<sup>[14]</sup>. 随后, 通过一种变换法, 更多形式的精确自相似解也已得出<sup>[15]</sup>. 本文我们将在光波传输方程的基础上研究非均匀缓变折射率平板波导放大器中的畸形波, 并进一步讨论畸形波的非线性动力学行为.

## 1 非均匀缓变折射率平板波导光波传输方程

在一个非均匀缓变折射率平板波导放大器中, 考虑连续光波束的传播, 其折射率分布为

$$n = n_0 + n_1 x^2 + n_2 I, \quad (1)$$

其中, 前两项表示折射率的线性部分, 后一项表示波导放大器中的克尔非线性,  $I$  代表光强. 为了方便, 假定  $n_1 > 0$ , 表示在低强度极限中, 缓变波导作用为线性自散焦透镜. 在此缓变波导中, 光束传播的非线性传输方程可以表示为<sup>[14]</sup>

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{ig}{2} u + \frac{1}{2} k_0 n_1 x^2 u + k_0 n_2 |u|^2 u = 0 \quad (2)$$

其中,  $u$  为脉冲包络的慢变振幅,  $g$  为增益函数, 波数  $k_0 = 2\pi n_0 / \lambda$ ,  $\lambda$  为光束的波长.

引入归一化变换

$$X = \frac{x}{w_0}, Z = \frac{z}{L_D}, G = gL_D, U = \sqrt{k_0 |n_2| L_D} u \quad (3)$$

其中  $w_0 = (2k_0^2 n_1)^{-1/4}$  为横向特征长度,  $L_D = k_0 w_0^2$  为衍射长度.

方程(2)归一化后可写成下面的无量纲形式

2014-06-30 收到第1稿, 2014-09-26 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金项目(11290152), 高等学校博士学科点专项科研基金(20131103110026)

† 通讯作者 E-mail: sandyzhang@yahoo.com

$$i \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \frac{iG}{2} U + \frac{1}{2} X^2 U + \sigma |U|^2 U = 0 \quad (4)$$

其中  $\sigma = \pm 1$ , 式中“ $\pm$ ”分别代表波导中的自聚焦或自散焦非线性。

## 2 相似变换和畸形波解

为了得到方程(4)的畸形波,引入相似变换<sup>[16]</sup>

$$U(X, Z) = [U_R(X, Z) + iU_I(X, Z)] e^{i\varphi(X, Z)} \quad (5)$$

这里,  $U_R(X, Z)$ ,  $U_I(X, Z)$  和相位  $\varphi(X, Z)$  都是  $X$ ,  $Z$  的实函数. 将方程(5)代入到方程(4)中,得到如下耦合的偏微分方程

$$\begin{aligned} & -U_{I,Z} - U_R \varphi_Z + \frac{1}{2} U_{R,XX} - U_{I,X} \varphi_X - \frac{1}{2} U_R \varphi_X^2 - \\ & \frac{1}{2} U_I \varphi_{XX} + \frac{1}{2} G U_I + \frac{1}{2} U_R X^2 + \\ & \sigma (U_R^2 + U_I^2) U_R = 0 \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} & -U_{R,Z} - U_I \varphi_Z + \frac{1}{2} U_{I,XX} - U_{R,X} \varphi_X - \frac{1}{2} U_I \varphi_X^2 + \\ & \frac{1}{2} U_R \varphi_{XX} - \frac{1}{2} G U_R + \frac{1}{2} U_I X^2 + \\ & \sigma (U_R^2 + U_I^2) U_I = 0 \end{aligned} \quad (6b)$$

对于实函数  $U_R(X, Z)$ ,  $U_I(X, Z)$  和  $\varphi(X, Z)$ , 引入新的变量函数来求解上述方程组

$$U_R = A(Z) + B(Z)P(\eta(Z, X), \tau(Z)) \quad (7a)$$

$$U_I = C(Z)Q(\eta(Z, X), \tau(Z)) \quad (7b)$$

$$\varphi = h(Z, X) + \delta\tau(Z) \quad (7c)$$

其中,  $\delta$  是一个常数.

将方程(7)代入方程(6),有

$$\begin{aligned} & -C_Z Q - C(Q_\eta \eta_Z + Q_\tau \tau_Z) - (A + BP)(h_Z + \\ & \delta\tau_Z) + \frac{B}{2}(P_{\eta\eta} \eta_X^2 + P_\eta \eta_{XX}) - CQ_\eta \eta_X h_X - \\ & \frac{1}{2}(A + BP)h_X^2 - \frac{1}{2}CQh_{XX} + \frac{1}{2}GCQ + \frac{1}{2}(A + \\ & BP)X^2 + \sigma[(A + BP)^2 + C^2 Q^2](A + BP) = 0 \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} & A_Z + B_Z P + B(P_\eta \eta_Z + P_\tau \tau_Z) - CQ(h_Z + \delta\tau_Z) + \\ & \frac{C}{2}(P_{\eta\eta} \eta_X^2 + P_\eta \eta_{XX}) + BP_\eta \eta_X h_X - \frac{1}{2}CQh_X^2 + \\ & \frac{1}{2}(A + BP)h_{XX} - \frac{1}{2}G(A + BP) + \frac{1}{2}CQX^2 + \\ & \sigma[(A + BP)^2 + C^2 Q^2]CQ = 0 \end{aligned} \quad (8b)$$

简化方程(8),得到如下方程组

$$\eta_{XX} = 0 \quad (9a)$$

$$\eta_Z + \eta_X h_X = 0 \quad (9b)$$

$$-2h_Z + h_X^2 + X^2 = 0 \quad (9c)$$

$$\chi_Z + \frac{\chi}{2} h_{XX} - \frac{1}{2} GA = 0, \quad (\chi = A, B, C) \quad (9d)$$

$$\begin{aligned} & -CQ_\tau \tau_Z - (A + BP)\delta\tau_Z + \frac{B}{2}P_{\eta\eta} \eta_X^2 + \\ & \sigma(A + BP)[(A + BP)^2 + C^2 Q^2] = 0 \end{aligned} \quad (9e)$$

$$\begin{aligned} & -BP_\tau \tau_Z - CQ\lambda\tau_Z + \frac{C}{2}Q_{\eta\eta} \eta_X^2 + \\ & \sigma CQ[(A + BP)^2 + C^2 Q^2] = 0 \end{aligned} \quad (9f)$$

由方程(9a),不妨假设

$$\eta(Z, X) = \alpha(Z)X + \beta(Z) \quad (10)$$

其中  $\alpha(Z)$ ,  $\beta(Z)$  是关于  $Z$  的自由函数. 将其代入到方程(9b-9c),得到

$$h_X = -\frac{\alpha_Z}{\alpha} X - \frac{\beta_Z}{\alpha} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} A(Z) &= a_0 \exp\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^Z g(s) ds + \int_0^Z \frac{\alpha_s}{\alpha} ds\right)\right] \\ B(Z) &= bA, \quad C(Z) = dA \end{aligned} \quad (11b)$$

其中  $b, d$  是任意常数.

若方程(9e-9f)满足以下的约束关系

$$\tau(Z) = \frac{1}{2} \int_0^Z \alpha^2(s) ds, \quad \alpha^2 = 2A^2 \quad (12)$$

时,可以简化为

$$\begin{aligned} & -dQ_\tau - (1 + bP)\delta + bP_{\eta\eta} + \\ & \sigma(1 + bP)[(1 + bP)^2 + d^2 Q^2] = 0 \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} & -bP_\tau - dQ\delta + dP_{\eta\eta} + \sigma dQ[(1 + bP)^2 + \\ & d^2 Q^2] = 0 \end{aligned} \quad (13b)$$

不妨假设  $\sigma = \delta = 1$ , 利用文献[17-18]中的方法,得到方程(4)的一阶有理函数形式的畸形波解

$$P(\eta, \tau) = -\frac{4}{R_1(\eta, \tau)b}, \quad Q(\eta, \tau) = -\frac{8\tau}{R_1(\eta, \tau)d} \quad (14)$$

其中  $R_1(\eta, \tau) = 1 + 2\eta^2 + 4\tau^2$ .

结合方程(11b)和(12),可以求得

$$A(Z) = \frac{\sqrt{2}}{2} a_0^2 \alpha \sqrt{|\alpha|} \quad (15)$$

从而方程(4)的畸形波解可以表示为

$$U = \frac{\sqrt{2}}{2} a_0^2 \alpha \sqrt{|\alpha|} \left(1 - \frac{4 + 8i\tau}{1 + 2\eta^2 + 4\tau^2}\right) e^{i(h+\tau)} \quad (16)$$

## 3 畸形波的数值模拟分析

在方程(16)中,  $\alpha(Z)$  和  $\beta(Z)$  是两个自由函数. 我们可以通过选取这两个函数的不同表达式来描述畸形波的非线性动力学行为.

若  $\alpha(Z)$  为常数,  $\beta(Z)$  为多项式函数. 不妨假设  $\alpha(Z) = 1$ ,  $\beta(Z) = 0.1Z$ , 将其代入到方程(16)中,可以得到如图1所示的单畸形波和其等高线

图. 从图 1(a) 中可以观察到畸形波的形状类似于单 Dromion 形, 其最大幅值为 2.1. 图(b) 是图(a) 的等高线图, 图中的中心表示畸形波的幅值达到最大值时的位置, 即  $Z = 0, X = 0$ . 从图中也可以看出畸形波具有突然出现, 接着又消失得无影无踪的特点.

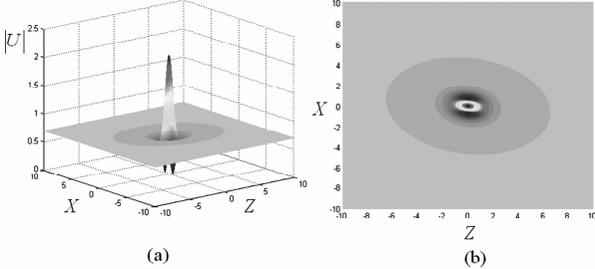


图 1 畸形波和等高线图

Fig. 1 The rogue waves and the contourcolor plots

保持  $\alpha(Z)$  不变, 依次取  $\beta(Z) = 0.1Z^2, \beta(Z) = 0.1Z^3$ , 将其代入到方程(16) 中, 同样可以得到畸形波和其等高线图. 通过数值模拟发现畸形波的波形图和图 1(a) 类似, 但其等高线图不同, 如图 2 所示. 图 2(a) 为  $\beta(Z) = 0.1Z^2$  时的等高线图, 图 2(b) 为  $\beta(Z) = 0.1Z^3$  时的等高线图. 图中可以看出, 在  $Z = 0, X = 0$  时, 畸形波的幅值都达到了最大值.

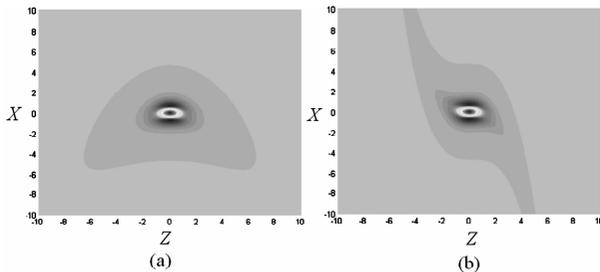


图 2 畸形波的等高线图

Fig. 2 The contour color plots of the rogue waves

若  $\alpha(Z)$  和  $\beta(Z)$  均为三角函数, 不妨假设  $\alpha(Z) = 0.8\cos(Z), \beta(Z) = \cos(Z)$ . 将其代入到方程(16) 中, 可以得到如图 3(a) 所示的单畸形波, 其最大幅值为 11.1643. 和图 1(a) 的畸形波相比, 波形图不同, 得到的最大幅值也不同. 当  $Z = 0$  时, 图 3(b) 所示为图 3(a) 的剖面图. 从图中可以观察到, 畸形波的幅值在  $X = -1.26$  时达到最大值. 和图 1(b) 相比较, 畸形波的幅值达到最大值时的位置发生了变化. 由此可以看出, 自由函数的选择不仅对畸形波的波形有影响, 对其最大幅值也有影响.

若取  $\alpha(Z) = 0.9\cos(0.3Z), \beta(Z) = 0.1Z$ , 将其代入到方程(16) 中, 可以得到如图 4(a) 所示的

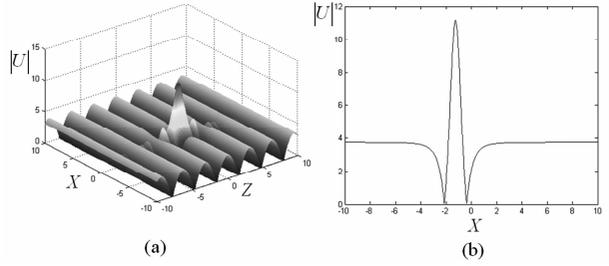


图 3 畸形波和剖面图

Fig. 3 The rogue waves and the sectional views

单畸形波. 由其等高线图可以观察出, 在  $Z = 0, X = 0$  时, 畸形波的幅值达到了最大值, 最大幅值为 12.1674; 若取  $\alpha(Z) = \text{sech}(0.2Z^2), \beta(Z) = \cos(0.1Z)$ , 将其代入到方程(16) 中, 可以得到如图 4(b) 所示的单畸形波. 由其等高线图可以观察出, 在  $Z = 0, X = -1$  时, 畸形波的幅值达到了最大值, 最大幅值为 34.1615. 这种情况下, 自由函数对畸形波的最大幅值和波形图影响较大.

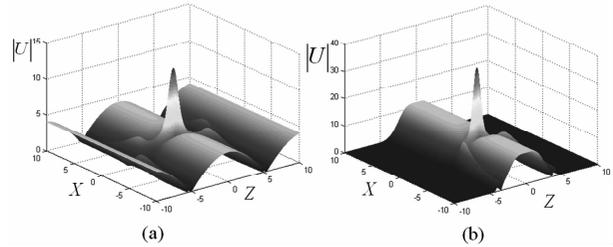


图 4 畸形波图

Fig. 4 The rogue waves propagation

### 4 结论

本文以缓变波导中光束传播的非线性传输方程为基础, 研究了非均匀缓变折射率平板波导放大器中畸形波的非线性动力学性质. 通过相似变换和直接假设, 得到了一阶有理函数形式的畸形波解, 并且针对不同类型自由函数的表达式, 通过数值模拟得到了不同畸形波的波形图. 需要注意的是, 并非所有的自由函数  $\alpha(Z)$  和  $\beta(Z)$  对其进行取值时都存在畸形波. 进一步地, 可以求得二阶有理函数形式的畸形波解, 并对其非线性动力学分析. 这些结果对研究光纤中的畸形波具有一定的理论意义.

### 参 考 文 献

- 1 Osborne R. Nonlinear ocean waves. Academic Press, 2009
- 2 KhariF C, Pelinovsky E. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *European Journal of Mechanics-B/Flu-*

- ids, 2003, 22: 603 ~ 634
- 3 Kharif C, Pelinovsky E, Slunyaev A. Rogue waves in the ocean observation, theories and modeling. New York: Springer, 2009
  - 4 陶爱峰, 胡国栋. 灾害性异常浪特性及研究方法综述. 自然灾害学报, 2008, 17: 174 ~ 179 ( Tao A F, Hu G D, Characteristics of disastrous rogue waves and summary of its research method. *Journal of Natural Disasters*, 2008, 17: 174 ~ 179 (in Chinese))
  - 5 Solli D R, Ropers C, Koonath P, Jalali B. Optical rogue waves. *Nature*, 2007, 450: 1054 ~ 1058
  - 6 Dudley J M, Genty G, Dias F, Kibler B, Akhmediev N. Modulation instability Akhmediev breathers and continuous wave supercontinuum generation. *Optics Express*, 2009, 17: 21497 ~ 21508
  - 7 Genty G, Dudley J M, B. Eggleton J. Modulation control and spectral shaping of optical fiber supercontinuum generation in the picosecond regime. *Applied Physics B: Lasers and Optics*, 2009, 94: 187 ~ 194
  - 8 Genty G, DeSterke C M, Bang O, Dias F, Akhmediev N, Dudley J M. Collisions and turbulence in optical rogue wave formation. *Physics Letters A*, 2010, 374: 989 ~ 996
  - 9 Yeom D I, Eggleton B J. Photonics: Rogue waves surface in light. *Nature*, 2007, 450: 953 ~ 954
  - 10 Bludov Y V, Konotop V V, Akhmediev N. Matter rogue waves. *Physical Review A*, 2009, 80: 033610
  - 11 Ganshin A N, Efimov V, Kolmakov G V, Mezhev-Deglin L P, McClintock P V E. Observation of an inverse energy cascade in developed acoustic turbulence in superfluid helium. *Physical Review Letters*, 2008, 101: 065303
  - 12 Yan Z Y. Financial rogue waves. *Communications in Theoretical Physics*, 2010, 54: 947 ~ 949
  - 13 冯杰, 徐文成, 张巧芬, 宋方, 莫杰雄, 刘颂豪. 光纤中自相似脉冲研究进展. 激光与光电子学进展, 2006, 43: 26 ~ 36 (Feng J, Xu W C, Zhang Q F, Song F, Mo J X, Liu S H, Self-similar pulse evolution in optical fibers. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2006, 43: 26 ~ 36 (in Chinese))
  - 14 Ponomarenko S A, Agrawal G P. Do solitonlike self-similar waves exist in nonlinear optical media? *Physical Review Letters*, 2006, 97: 013901
  - 15 Li H M, Song F Q. Novel exact self-similar solitary waves in graded-index media with Kerr nonlinearity. *Optics Communications*, 2007, 277: 174 ~ 180
  - 16 Yan Z Y. Nonautonomous "rogons" in the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients. *Physics Letters A*, 2010 374: 67 ~ 679
  - 17 Peregrine D H. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions. *Journal of the Australian Mathematical Society, Series B*, 1983, 25: 16 ~ 43
  - 18 Akhmediev N, Ankiewicz A, Soto-Crespo J M. Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *Physical Review E*, 2009, 80: 026601

## ROGUE WAVES IN A PLANAR, GRADED-INDEX NONLINEAR WAVEGUIDES AMPLIFIER \*

Song Ni<sup>1,2</sup> Zhang Wei<sup>1†</sup> Yang Xiaofeng<sup>1,2</sup> Cao Dongxing<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

(2. Department of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract** Focusing on the nonlinear transmission equation in the graded-index waveguides, the nonlinear dynamic behaviors of the rogue wave in a planar amplifier were studied. The similarity transformation and direct hypothesis were used to construct the first order rogue wave solution with arbitrary function. On the basis of the solution, different rogue waves were obtained by numerical simulation in view of different types of free function. It is significant to describe the physical phenomena in the optical fibers.

**Key words** rogue waves, nonlinear transmission equation, similarity transformation

Received 30 June 2014, revised 26 September 2014.

\* The project supported by the National Natural Science Key Program of China (11290152) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (20131103110026)

† Corresponding author E-mail: sandyzhang0@yahoo.com