

# 一类具有标准发生率的 SIRS 传染病模型分岔分析\*

刘苏雨 蒋贵荣<sup>†</sup> 凌琳

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 桂林 541004)

**摘要** 研究了一类具有脉冲生育和接种、垂直传染和标准发生率的 SIRS 传染病模型的动力学行为, 通过利用 Poincaré 映射, 讨论了平凡解和正周期  $-T$  解的存在和稳定性以及系统的跨临界分岔和 flip 分岔行为, 并给出了能验证理论分析的数值结果.

**关键词** SIRS 传染病模型, 标准发生率, 跨临界分岔, flip 分岔

DOI: 10.6052/1672-6553-2014-011

## 引言

疾病发生率是刻画传染病模型的主要内容, 经典的传染病模型大多是采用双线性发生率<sup>[1]</sup>和饱和发生率<sup>[2]</sup>. 标准发生率<sup>[3]</sup>属于非线性发生率, 这种发生率可以包括行为变化和群体效应, Anderson 和 May<sup>[4]</sup>通过研究证实, 对于某些动物来说, 标准发生率比双线性发生率更符合实际.

连续动力系统的分岔理论研究已较为丰富, 而对于脉冲动力系统的分岔研究很少. 蒋贵荣等<sup>[5]</sup>研究了一类自治脉冲微分方程, 得到了由半平凡解分岔出正周期  $-T$  解的 fold 分岔; 钱临宁和陆启韶在文<sup>[6]</sup>中得到了系统的半平凡解到正周期  $-T$  解的跨临界分岔行为; 文<sup>[7]</sup>分析了由平凡解分岔出非平凡周期  $-T$  解的超临界分岔现象, 等等. 但是对于由平凡解分岔出正周期  $-T$  解的分岔现象大多没有考虑.

垂直传染、脉冲接种<sup>[8]</sup>和脉冲生育<sup>[9]</sup>常被用来建立和研究传染病模型. 本文同时考虑垂直传染、脉冲接种和脉冲生育, 建立一个有标准发生率的传染病模型, 利用映射研究该模型正周期解的存在性及该系统的分岔现象.

## 1 模型描述

设  $S(t)$ ,  $I(t)$  和  $R(t)$  分别为  $t$  时刻的易感者、感染者和移出者的数量, 现给出有脉冲生育和接

种、垂直传染和标准发生率 SIRS 的传染病模型:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\sigma S - \frac{\beta SI}{N} + \delta R, \\ \dot{I} = \frac{\beta SI}{N} - (\gamma + \sigma)I, \\ \dot{R} = \gamma I - (\delta + \sigma)R, \end{cases} \quad t \neq nT \quad (1)$$
$$\begin{cases} \Delta S = (b - cN)(S + R) - pS, \\ \Delta I = (b - cN)I, \\ \Delta R = pS, \end{cases} \quad t = nT$$

其中,  $\sigma$  表示自然死亡率且有  $0 < \sigma \leq 1$ ,  $\delta$  是移出者丧失免疫进入易感者类的比率,  $\gamma$  是感染者的自然恢复率,  $\beta SI/N$  是标准发生率, 生育脉冲为  $\Delta N = (b - cN)N$ , 其中  $b$  是最大出生率. 染病者的后代均为染病者, 易感者和移出者的后代均为易感者. 在生育时刻,  $\Delta S = (b - cN)(S + R)$ , 由于垂直传染,  $\Delta I = (b - cN)I$ . 易感者的接种率为  $p$ , 即  $\Delta S = -pS$ ,  $\Delta R = pS$ , 其中  $0 < p < 1$ .

## 2 无病周期 $-T$ 解和平凡解的存在、稳定性

当种群中不存在感染者, 即  $I(t) = 0 (t > 0)$  时,  $N(t) = S(t) + R(t)$ , 系统(1)变为:

$$\begin{cases} \dot{N} = -\sigma S, \\ \dot{R} = -(\delta + \sigma)R, \end{cases} \quad t \neq nT \quad (2)$$
$$\begin{cases} \Delta N = (b - cN)N, \\ \Delta R = p(N - R), \end{cases} \quad t = nT$$

2012-11-09 收到第1稿, 2012-12-24 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11162004, 60964006), 广西自然科学基金资助项目(2012GXNSFAA053006)和广西研究生教育创新计划资助项目(YCSZ2012072)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: grjiang@163.com

设系统(2)的轨线从 $(N_k, R_k)$ 出发,在 $T$ 时刻到达点 $(\bar{N}_k, \bar{R}_k)$ 然后跳到 $(N_{k+1}, R_{k+1})$ ,则有映射

$$\begin{cases} N_{k+1} = (1+b-cN_k \exp(-\sigma T))N_k \exp(-\sigma T), \\ R_{k+1} = p \exp(-\sigma T)N_k + (1-p) \exp(-(\delta+\sigma)T)R_k. \end{cases} \quad (3)$$

离散映射(3)的不动点为

$$\begin{cases} G_1(N_0, R_0) = (0, 0) \\ G_2(N_0, R_0) = \left( \frac{1+b-\exp(\sigma T)}{c \exp(-\sigma T)}, \right. \\ \left. \frac{p(1+b-\exp(\sigma T))}{c(1-(1-p)\exp(-(\delta+\sigma)T))} \right) \end{cases}$$

由 $G_2(N_0, R_0)$ 可得系统(1)无病周期解为

$$\begin{cases} \bar{S}(t) = \frac{1+b-\exp(\sigma T)}{c \exp(-\sigma T)} \exp(-\sigma(t-nT)) - \bar{R}(t) \\ \bar{I}(t) = 0, \\ \bar{R}(t) = \frac{p(1+b-\exp(\sigma T))}{c(1-(1-p)\exp(-(\delta+\sigma)T))} \\ \exp(-(\delta+\sigma)(t-nT)) \\ nT < t \leq (n+1)T \end{cases}$$

由于 $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ ,由(1)有:

$$\begin{cases} \dot{N} = -\sigma N, \\ \dot{I} = \frac{\beta(N-R-I)}{N} - (\gamma+\sigma)I, \\ \dot{R} = \gamma I - (\delta+\sigma)R, \end{cases} \quad t \neq nT \quad (4)$$

$$\begin{cases} \Delta N = (b-cN)N, \\ \Delta I = (b-cN)I, \\ \Delta R = p(N-R-I), \end{cases} \quad t = nT$$

由系统(4)在无病周期 $-T$ 解 $(\bar{S}(t) + \bar{R}(t), 0, \bar{R}(t))$  ( $t \in (0, T]$ )处的变分系统对应的特征值为:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (1+b-2c\bar{N}(T)) \exp(-\sigma T), \\ \lambda_2 &= (1-p) \exp(-(\delta+\sigma)T), \\ \lambda_3 &= (1+b-c\bar{N}(T)) \exp\left(\beta \int_0^T \frac{\bar{S}(t)}{N(t)} dt - (\gamma+\sigma)T\right). \end{aligned}$$

因为 $0 < p < 1, (\delta+\sigma)T > 0$ ,所以 $|\lambda_2| < 1$ .当 $|\lambda_1| < 1, |\lambda_3| < 1$ 时,无病周期 $-T$ 解渐近稳定.由得 $|\lambda_1| < 1$ :

$$\frac{1}{T} \ln \frac{1+b}{3} =: \sigma_3 < \sigma < \frac{1}{T} \ln(1+b) =: \sigma_1$$

假设 $\beta > \gamma$ ,由 $|\lambda_3| < 1$ 得:

$$\sigma < \frac{1}{T} \ln \left( \frac{p\beta(1-\exp(-\delta T))}{\delta(\beta-\gamma)T} + (1-p) \exp(-\delta T) \right) =: \sigma_2$$

$$(1-p) \exp(-\delta T) =: \sigma_2$$

在本文中总假设下列条件成立,

$$(A) \beta > \gamma; \quad (B) \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_1 \quad (5)$$

当 $\sigma \in (\sigma_3, \sigma_1)$ 时,有 $|\lambda_3| > 1$ ;当 $\sigma \in (0, \sigma_2)$ 时,有 $|\lambda_1| > 1$ ;当 $\sigma \in (\sigma_2, \sigma_3)$ 时,有 $|\lambda_1| > 1$ 和 $|\lambda_3| > 1$ 对任意的 $\sigma \in (0, 1]$ ,总有模大于1的特征值,从而(1)的无病周期 $-T$ 解是不稳定的.

过 $G_1(N_0, R_0) = (0, 0)$ 的系统(1)平凡解 $(0, 0, 0)$ 处对应变分系统的单值矩阵的乘子是:

$$\lambda_{01} = (1-p) \exp(-(\delta+\sigma)T),$$

$$\lambda_{02} = (1+b) \exp(-\sigma T), \lambda_{03} = (1+b) \exp(-(\gamma+\sigma)T).$$

当 $\sigma \in (\sigma_1, 1]$ 时,  $|\lambda_{01}| < 1, |\lambda_{02}| < 1, |\lambda_{03}| < 1$ ,从而平凡解稳定;当 $\sigma \in (0, \sigma_1]$ 时,  $|\lambda_{02}| > 1$ 从而平凡解不稳定.于是我们有下面的结论:

**定理 2.1** 假设(5)成立,(1)的平凡解在 $\sigma \in (0, \sigma_1]$ 下是不稳定的,在 $\sigma \in (\sigma_1, 1]$ 下是稳定的;(1)的无病周期 $-T$ 解在 $\sigma \in (0, 1]$ 下是不稳定的.

### 3 分岔

取 $\mu = -\sigma$ 为参数,讨论(1)的周期解的分岔.

#### 3.1 跨临界分岔现象

对于 $\mu_1 = -\sigma_1$ 和 $I(t) = 0$ .由 $\bar{\mu} = \mu - \mu_1 = \mu + \sigma_1 = \mu + \ln(1+b)/T$ 得 $\mu = \bar{\mu} - \ln(1+b)/T$ ,由(3)得

$$F_{\bar{\mu}}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x \exp(\bar{\mu}T) - \frac{c}{(1+b)^2} x^2 \exp(2\bar{\mu}T) \\ \frac{p}{1+b} x \exp(\bar{\mu}T) + \frac{1-p}{1+b} y \exp((\bar{\mu}-\delta)T) \end{cases} \quad (6)$$

映射(6)的一个中心流形可以表示为:

$$W_{\bar{\mu}}^c(0) = \{(x, y, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^3 \mid y = h(x, \bar{\mu}), h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0\}$$

则限制在中心流形上的映射为:

$$F: x \mapsto x \exp(\bar{\mu}T) - \frac{c}{(1+b)^2} x^2 \exp(2\bar{\mu}T),$$

在点 $(x, \bar{\mu}) = (0, 0)$ 处,  $F(0, 0) = 0, \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 1,$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \bar{\mu}}(0, 0) = T > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0) = -\frac{2c}{(1+b)^2} < 0.$$

由文献[10]中的跨临界分岔的判定可知,系统(4)在 $\mu = \mu_1 = -\sigma_1$ 处发生跨临界分岔,系统的平凡解在 $\mu = \mu_1 = -\sigma_1$ 分岔出周期 $-T$ 解.由于 $\delta$

$>0$ , 当  $\mu \in (\mu_1, \mu_1 + \varepsilon)$  时, 系统没有稳定的无病周期  $-T$  解, 故此时原系统的平凡解在  $\mu = \mu_1 = -\sigma_1$  分岔出稳定的正周期  $-T$  解.

**定理 3.1** 系统(1)在  $\mu = \mu_1 = -\sigma_1$  处发生跨临界分岔, 平凡解分岔出正周期  $-T$  解, 即  $\varepsilon > 0$ , 当  $\mu \in (\mu_1, \mu_1 + \varepsilon)$  时, 系统(1)有稳定的正周期  $-T$  解.

### 3.2 Flip 分岔现象

假设系统(4)的周期  $-T$  解  $(N(t), I(t), R(t))$  从点  $A_0(N_0, I_0, R_0)$  出发, 到达  $B_0(N(T), I(T), R(T))$ , 再跳到  $A_0$ , 有  $R_0 = p(N(T) - I(T)) + (1+p)R(T)$ ,  $N_0 = (1+b-cN(T))N(T)$ ,  $I_0 = (1+b-cN(T))I(T)$ , 由  $\dot{N} = -\sigma N$  得到  $N(T) = N_0 \exp(-\sigma T)$ , 于是  $N_0 = (1+b-\exp(\sigma T)) \exp(\sigma T)/c$ .

现取 Poincaré 截面  $S_0 = \{(N, I, R) \mid I = I_0\}$ , 过初始点  $A_k(N_0 + x_k, I_0, R_0 + y_k)$  的解为  $(N_1(t), I_1(t), R_1(t))$ , 其中  $A_k \in S_0$ . 在时刻  $T$  解到达  $B_k = (N_1(T), I_1(T), R_1(T))$ , 再然后跳到点  $A_{k+1}(N_0 + x_{k+1}, I_0, R_0 + y_{k+1})$ .

令  $x(t) = N_1(t) - N(t)$ ,  $y(t) = R_1(t) - R(t)$ ,  $z(t) = I_1(t) - I(t)$ . 则  $x(t), y(t), z(t)$  满足下面的关系:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} x_k \\ 0 \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ o(|x_k| + |y_k|) \\ o(|x_k| + |y_k|) \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中  $M(t)$  满足

$$M'(t) = A(t)M(t), M(0) = E,$$

$$M(t) = \begin{pmatrix} m_1(t) & m_2(t) & m_3(t) \\ n_1(t) & n_2(t) & n_3(t) \\ u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) =$$

$$\begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ \frac{\beta(R(t)+I(t))I(t)}{N^2(t)} & (\beta-\gamma-\sigma)\frac{\beta(R(t)+2I(t))}{N(t)} & \frac{\beta I(t)}{N(t)} \\ 0 & \gamma & -(\delta+\sigma) \end{pmatrix}$$

$$m_1(t) = \exp(-\sigma t), m_3(t) = 0,$$

$$a(t) := \beta - \gamma - \sigma - \frac{\beta(R(t) + 2I(t))}{N(t)},$$

$$n_1(t) = \exp\left(\int_0^t a(\tau) d\tau\right) \int_0^t (\exp(-\sigma t) -$$

$$u_1(\tau)) \frac{\beta I(\tau)}{N(\tau)} \exp\left(-\int_0^\tau a(s) ds\right) d\tau,$$

$$n_3(t) = -\beta \exp\left(\int_0^t a(\tau) d\tau\right) \int_0^t \frac{I(\tau)}{N(\tau)} \times$$

$$u_3(\tau) \exp\left(-\int_0^\tau a(s) ds\right) d\tau,$$

$$u_1(t) = \exp(-(\delta + \sigma)t) \int_0^t \exp((\delta +$$

$$\sigma)\tau) \gamma n_1(\tau) d\tau,$$

$$u_3(t) = \exp(-(\delta + \sigma)t) + \exp(-(\delta + \sigma)t) \int_0^t \exp((\delta + \sigma)\tau) \gamma n_3(\tau) d\tau.$$

由(7)得:

$$z(T) = n_1(T)x_k + n_3(T)y_k + o(|x_k| + |y_k|),$$

$$x(T) = \exp(-\sigma T)x_k,$$

$$y(T) = u_1(T)x_k + u_3(T)y_k + o(|x_k| + |y_k|).$$

从而得到 Poincaré 映射:

$$\begin{cases} x_{k+1} = a_1(T)x_k + a_2(T)x_k^2 \\ y_{k+1} = a_3(T)x_k + a_4(T)y_k + o(|x_k| + |y_k|) \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$a_1(T) = (2\exp(\sigma T) - 1 - b)\exp(-\sigma T),$$

$$a_3(T) = (p\exp(-\sigma T) - pn_1(T) + (1-p)u_1(T))$$

$$a_2(T) = -c\exp(-2\sigma T),$$

$$a_4(T) = (1-p)u_3(T) - pn_3(T).$$

式(8)的不动点的特征值为:

$$\lambda_4 = a_1(T), \lambda_5 = a_4(T).$$

当  $\mu = \mu_3 = -\sigma_3 = -\frac{1}{T} \ln\left(\frac{1+b}{3}\right)$  时,  $\lambda_4 = a_1(T) = -1$ .

**定理 3.2** 系统在  $\mu = \mu_3 = -\sigma_3$  处发生 flip 分岔.

证明: 令  $\tilde{\mu} = \mu - \mu_3 = \mu + \sigma_3$ , 则(8)可以写成:

$$f_{\tilde{\mu}}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (2 - 3\exp(\tilde{\mu}T))x - \frac{9x\exp(2\tilde{\mu}T)}{(1+b)^2}x^2 \\ a_3(T)x + a_4(T)y + o(|x| + |y|) \end{pmatrix}$$

可计算出一个限制在中心流形上的映射为:

$$f: x \mapsto (2 - 3\exp(\tilde{\mu}T))x - \frac{9x\exp(2\tilde{\mu}T)}{(1+b)^2}x^2, \text{ 在点}$$

$(x, \tilde{\mu}) = (0, 0)$  处有:  $\frac{\partial f}{\partial \tilde{\mu}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \tilde{\mu}} = -6T \neq 0, \bar{a}$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right) = \frac{162c^2}{(1+b)^4} > 0.$$

由文献[11]中定理 3.5.1 可知: 系统在  $\mu = \mu_3 = -\sigma_3$  处发生 flip 分岔, 从而  $\varepsilon > 0$ , 当  $\mu \in (\mu_3, \mu_3 + \varepsilon)$  时, 系统有稳定的正周期  $-2T$  解. 定理得证.

## 4 数值模拟

在(1)中,取  $b = 2.8, T = 2, \delta = 0.4, p = 0.2, c = 0.2, \beta = 0.6, \gamma = 0.5$ . 则  $\mu_1 = -\sigma_1 \approx -0.6675, \mu_2 = -\sigma_2 \approx -0.0851, \mu_3 = -\sigma_3 \approx -0.1182$ . 显然条件(5)成立. 以  $\mu(-\sigma)$  为参数,系统(1)的周期解的分岔如图1所示,当  $\mu \in [-1, -0.6675]$  时,系统有稳定的平凡解,系统在  $\mu = \mu_1 = -\sigma_1$  处发生跨临界分岔,当  $\mu$  从  $\mu_1$  左侧变到右侧时,系统出现稳定的正周期  $-T$  解,系统在  $\mu = \mu_3 = -\sigma_3$  处发生 flip 分岔,由正周期  $-T$  解分岔出正周期  $-2T$  解,很好的验证了定理 3.1 和定理 3.2. 图2给出了(1)在  $\mu = -\sigma = -0.4$  时的正周期  $-T$  解.

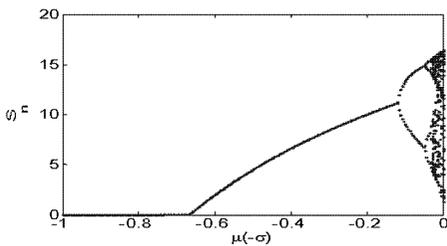


图1 系统(1)关于  $\mu$  的分岔图

Fig. 1 The bifurcation diagram of periodic solutions of system (1) with respect to parameter  $\mu$

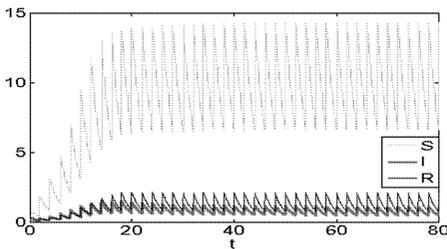


图2  $\mu = -0.4$  时的系统(1)的解的时间序列图

Fig. 2 The time-series of  $S, I$  and of (1) with  $\mu = -0.4$

## 5 结论

本文讨论了对所建的系统在  $\beta > \gamma$  的情形下,由于参数间的变化使得  $\sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_1$  下的系统的动力学性质. 随着参数  $\mu = -\sigma$  的增加,系统在  $\mu = \mu_3 = -\sigma_3$  处发生跨临界分岔,由平凡解分岔出正周期  $-T$  解;在  $\mu = \mu_3 = -\sigma_3$  处发生 flip 分岔,由正周期  $-T$  解分岔出正周期  $-2T$  解.

随着  $\sigma$  的变化,系统出现不同的稳定周期解,说明了自然死亡率大小在传染病的控制过程中的作用,为控制传染病的传播提供了一定的理论依据.

## 参 考 文 献

- 屈林波,韩瑞珠. 一类具有迁移特性的生物危险源扩散动力学模型分析. 东南大学学报(自然科学版),2007,37(II):381~386 (Qu L B, Han R Z. Analysis of biology dangerous source diffusing dynamics model in population migration. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2007, 37(II):381~386 (in Chinese))
- 庞国萍,陈兰荪. 具饱和和传染率的脉冲免疫接种 SIRS 模型. 系统科学与数学,2007,27(4):563~572 (Pang G P, Chen L S. The SIRS epidemic model with saturated contact rate and pulse vaccination. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2007, 27(4):563~572 (in Chinese))
- Hu Z X, Liu S, Wang H. Backward bifurcation of an epidemic model with standard incidence rate and treatment rate. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, 9: 2302~2312
- Anderson R, May R. Infectious diseases of human: dynamics and control. Oxford: Oxford University Press, 1991
- 蒋贵荣,陆启韶,钱临宁. 一类脉冲动力系统的状态反馈控制. 动力学与控制学报,2005,3(4):17~23 (Jiang G R, Lu Q S, Qian L N. State feedback control of a class of impulsive dynamic systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4):17~23 (in Chinese))
- 钱临宁,陆启韶. 一类自治脉冲微分方程的动力学研究. 动力学与控制学报,2008,6(2):97~101 (Qian L N, Lu Q S. Dynamics of a class of autonomous impulsive equations. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2):97~101 (in Chinese))
- Zhang H, Paul Georgescu, Chen L S. On the impulsive controllability and bifurcation of a predator-pest model of IPM. *BioSystems*, 2008, 93: 151~171
- Gakkhar S, Negi K. Pulse vaccination in SIRS epidemic model with non monotonic incidence rate. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 35:626~638
- 韩丽涛. 两种群相互竞争具有脉冲出生率的 SIS 传染病模型. 生物数学学报,2006,21(2):237~246 (Han L T. An SIS epidemic model of two competitive species with birth pulse. *Journal of Biomathematics*, 2006, 21(2):237~246 (in Chinese))
- Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Springer-Verlag, 1990
- Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations, dy-

namical systems, and bifurcations of vector fields. New

York: Springer-Verlag, 1983

## BIFURCATION ANALYSIS OF AN SIRS EPIDEMIC MODEL WITH STANDARD INCIDENCE RATE\*

Liu Suyu Jiang Guirong<sup>†</sup> Ling Lin

(School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

**Abstract** The dynamics of an SIRS epidemic model with birth pulse and vaccination, vertical transmission, and standard incidence rate was studied. The Poincaré map was used to discuss the existence and stability of trivial solution and positive periodic solutions, transcritical bifurcation, and flip bifurcation. Numerical results are in good agreement with the theoretical analysis.

**Key words** SIRS epidemic model, standard incidence rate, transcritical bifurcation, flip bifurcation

---

Received 9 November 2012, revised 24 December 2012.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11162004, 60964006), the National Natural Science Foundation of Guangxi, China (2012GXNSFAA053006) and the Innovation Project of Guangxi Graduate Education, China (YCSZ2012072)

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: grjiang9@163.com